Aku Mau Coba
Mengerjakan & Membahas
Ujian Tengah Semester & Ujian Akhir Semester

Pengantar Struktur Aljabar 1

Semester Genap 2021/2022

Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Gadjah Mada

Mawi Wijna

Yogyakarta, 2023

Daftar Isi

Siapa Aku?

Halo!

Kenalkan! Nama aku Wijna.
Sering juga dipanggil Wisna.
Jarang-jarang dipanggil Mawi.
Kalau orang-orang sedang jengkel, kadang dipanggil bedebah juga. 😀

Aku dulu pernah jadi mahasiswa matematika UGM. Maksudnya, aku dulu itu pernah kuliah di Program Studi Matematika FMIPA UGM. Masuk September 2004. Lulus Februari 2009. Info lebih lanjut, *googling* saja namaku di Google.

Oh ya, kenapa aku kurang kerjaan bikin tulisan ini?

Euh....

Tulisan ini aku buat dalam rangka **mengisi waktu luang**. Berhubung si *bocil* kalau makan sukanya diemut, jadi ya sambil nunggu itu rongga mulutnya kosong lagi, iseng-iseng aku ngerjain soal-soal ujian ini. Itu pun kalau pas lagi bosen nge-*scrall-scroll manga online*, *marketplace*, *Instagram*, dll.

Berhubung ngerjain soal ujian sambil nyuapin *bocil*, jadi ya cuma sebatas *orat-oret* di kertas-kertas kosong bekas. Pas menunggu azan subuh berkumandang atau pas *weekend* cuma di rumah doang, nah, baru deh *orat-oret* itu dipindah ke format LaTeX.

Yah, pokoknya semua dibawa santai sajalah. *Lha wong*, namanya sekadar mengisi waktu luang. Bukan mahasiswa pula ini. 😀

Eh, sebelumnya ya, mohon maaf ya kalau tulisan ini lebih banyak salahnya daripada benarnya, hehehe. Maklum, kan sudah belasan tahun yang lalu jadi mahasiswa matematika. Jadi ya, mohon maaf kalau lupa-lupa ingat.

Tapi, berhubung pada zaman ini ada yang namanya math.stackexchange.com dan Quora. Jadi, boleh lah nyontek-nyontek sedikit. 😀

Ya, sudahlah. Bagian pengantar ini nggak usah panjang-panjang. Semoga ada yang bisa dipelajari dari tulisan ini.

Oh yes! Last but not least, *matur nuwun* buat teman-teman di HIMATIKA FMIPA UGM yang menyediakan sumber soal-soal ujian yang bisa diakses secara cuma-cuma di *website* mereka, himatika.fmipa.ugm.ac.id.

Ah... somehow I felt nostalgic....

Diketik sambil diiringi nyanyiannya mbak-mbak fromis_9.

Yogyakarta, 2023
Wihikan "Mawi" Wijna

Pengantar Struktur Aljabar 1 Buat Aku

Pas zamanku kuliah (tahun 2004-2009 silam), Pengantar Struktur Aljabar 1 itu mata kuliah wajib berbobot 3 SKS yang diselenggarakan pada Semester 2 Program Studi Matematika FMIPA UGM. Jadi ya, Struktur Aljabar 1 itu adalah salah satu mata kuliah yang menjadi "santapannya" para mahasiswa baru.

Aku bisa berbangga hati karena Pengantar Struktur Aljabar 1 itu adalah mata kuliah pertamaku yang "murni" matematika yang nilai akhirnya adalah A! Hahaha. 😀

Walaupun ya, sebetulnya ya dapatnya nilai akhirnya itu A- sih. 😀

Ya, seenggaknya dapat nilai A lah! Pencapaian ini kan kemudian bikin aku berpikir bahwasanya ~~kuliah di prodi matematika itu ternyata nggak susah-susah amat~~ aku "kemungkinan" bisa lulus dari prodi matematika dengan IPK tiga koma. 😀

Ya pokoknya setelah semester 2 ini dan mendapatkan nilai akhir A untuk mata kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1, aku mulai memantapkan hati bahwasanya **aljabar adalah jalan ninjaku**.

Well, ketika kamu lebih sering menghabiskan waktu *ngendog* sambil membaca buku *A First Course in Abstract Algebra*, aku yakin nilai akhir mata kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1-mu minimal dapat B asal tidak membuat kesalahan fatal.

Pas semester 2 dulu, aku diajar mata kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1 oleh Bu Diah Junia Eksi Palupi a.k.a Bu Diah. Sayangnya, seumur-umur aku kuliah, beliau hanya mengajar mata kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1 dan Kriptologi (mata kuliah pilihan). Konon katanya, beliau lebih sering mengajar di prodi sebelah. Sedih....

Oke deh! Sebagai penutup, semoga tulisan ini membawa manfaat. Walaupun aku yakin kalau tulisan ini lebih banyak salahnya daripada benarnya, hehehe. Maklum, kan sudah belasan tahun yang lalu jadi mahasiswa matematika. Jadi ya, mohon maaf kalau lupa-lupa ingat.

Aku nggak tahu apakah benar-benar ada orang yang membaca tulisan ini. Semisal Anda yang membaca tulisan ini adalah mahasiswa, aku doakan semoga Anda mendapat pencerahan dan sukses berkuliah. Semisal Anda yang membaca tulisan ini penasaran dengan soal-soal ujian kuliah matematika, aku harap Anda tidak *shock* dan bisa memahami tulisan ini dengan baik. Semisal Anda yang membaca tulisan ini hanya sekadar mengisi waktu luang, aku sarankan untuk membaca tulisan ini sebagai kawan *ngendog* di toilet.

Semoga tulisan ini bermanfaat bagi mahasiswa matematika semester awal. Khususnya yang kesulitan dan kebingungan memahami mata kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1 dan sungkan bertanya ke dosen atau kakak tingkat. Tulisan ini bisa diunduh secara cuma-cuma dan diam-diam. Silakan *googling* namaku untuk menemukan lebih banyak tulisan sejenis ini untuk beragam mata kuliah lain.

Akhir kata, selamat menikmati tulisan ini!

Yogyakarta, 2023
Wihikan "Mawi" Wijna

1

Soal-Soal Ujian Tengah Semester

1. Diberikan himpunan G dengan definisi sebagai berikut.

$$G = \mathbb{Z} \cdot 2 + \mathbb{Z}(1 + \sqrt{19}) = \{2a + b(1 + \sqrt{19}) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

   (a) Tumjukkan bahwa G merupakan grup terhadap operasi penjumlahan!

   (b) Selidiki apakah $G - \{0\}$ merupakan grup terhadap operasi perkalian!

2. (a) Show that the following are equivalent for a group G!

      i. for every $a, b, c \in G$ satisfying $ab = ca$, we have $b = c$; and

      ii. G is commutative

   (b) Suppose that G is a group in which every element has order 1 or 2. Show that G must be commutative!

3. Diberikan grup komutatif G dan bilangan asli k. Misalkan e_G, adalah elemen identitas di G dan dibentuk himpunan H dan K dengan definisi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} H &= \{a \in G \mid a^k = e_G\} \\ K &= \{a^k \in G \mid a \in G\} \end{aligned}$$

   Tunjukkan bahwa H dan K keduanya merupakan subgrup dari G!

4. Diberikan grup G yang memuat subgrup H dengan order 28 dan subgrup K dengan order 65. Tunjukkan bahwa $H \cap K = \{e_G\}$!

2

Soal-Soal Ujian Akhir Semester

1. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3\}$. Diketahui

$$S_3 = \{f : A \to A \;\mid\; f \text{ pemetaan bijektif}\}$$

merupakan grup terhadap operasi komposisi fungsi.

Diketahui juga bahwa himpunan $\mathbb{Z}_5^* = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}_5 \mid \bar{x} \neq \bar{0}\}$ merupakan grup terhadap operasi modulo di $\mathbb{Z}_5$.

Jika dibentuk pengaitan $\psi : S_3 \to \mathbb{Z}_5^*$ dengan definisi:

$$\psi(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \overline{\alpha(1)}$$

untuk setiap $\alpha \in S_3$, selidiki apakah pengaitan ψ merupakan homomofisma grup atau bukan! Jelaskan jawaban Saudara!

2. Suppose $V_4 = \{e, a, b, ab\}$ is a group with the following multiplication table

$\star$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

Investigate whether $V_4 \cong \mathbb{Z}_4$ or not!

3. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Diketahui

$$S_6 = \{f : A \to A \mid f \text{ pemetaan bijektif}\}$$

merupakan grup terhadap operasi komposisi fungsi.

Jika $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, maka:

(a) Sajikan f sebagai perkalian dari sikel-sikel saling asing!

(b) Sajikan f sebagai perkalian dari transposisi-transposisi!

(c) Tentukan order dari f!

(d) Tentukan $f^{2.022}$ dimana $f^{2.022} = f \circ f \circ f \circ ... \circ f \circ f$(sebanyak 2.022 kali)!

4. Diketahui $(G, \star)$ merupakan grup komutatif.
Diketahui juga H dan K masing-masing menupakan subgrup dari G.

Diperhatikan bahwa $H \times K$ merupakan grup terhadap operasi biner $\otimes$ dengan definisi:

$$(h_1, k_1) \otimes (h_2, k_2) \overset{\text{def}}{=} (h_1 \star h_2,\ k_1 \star k_2)$$

untuk setiap $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \times K$. (tidak perlu dibuktikan!)

Jika dibentuk himpunan $N = \{(x, x^{-1}) \mid x \in H \cap K\}$, maka:

(a) Buktikan bahwa N merupakan subgrup normal dari $H \times K$!

(b) Buktikan bahwa $(H \times K)/N \cong HK$!

3

Ayo Kerjakan!
Ujian Tengah Semester
Soal Nomor 1

Soal

Diberikan himpunan G dengan definisi sebagai berikut.

$$G \;=\; \mathbb{Z}\cdot 2 \;+\; \mathbb{Z}(1+\sqrt{19}) \;=\; \{2a + b(1+\sqrt{19}) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

(a) Tunjukkan bahwa G merupakan grup terhadap operasi penjumlahan!

(b) Selidiki apakah $G - \{0\}$ merupakan grup terhadap operasi perkalian!

Dikerjakan

Oke. ***FIRST THING FIRST!***

Kita harus memastikan bahwa himpunan G **tidak kosong**!

Jika melihat sepintas definisi himpunan G, kelihatan kok bahwa himpunan ini tidak kosong. Supaya lebih yakin, kita bisa menyelidiki tiga hal berikut.

1. Jika dipilih $a = b = 0$, maka $2a + b(1 + \sqrt{19}) = 2 \cdot 0 + 0 \cdot (1 + \sqrt{19}) = 0 + 0 = 0$.
   Dengan demikian, $0 \in G$.

2. Jika dipilih $a = 0$ dan $b = 1$, maka $2a + b(1 + \sqrt{19}) = 2 \cdot 0 + 1 \cdot (1 + \sqrt{19}) = 1 + \sqrt{19}$
   Dengan demikian, $1 + \sqrt{19} \in G$.

3. Jika dipilih $a = 2$ dan $b = 0$, maka $2a + b(1 + \sqrt{19}) = 2 \cdot 2 + 0 \cdot (1 + \sqrt{19}) = 4 + 0 = 4$
   Dengan demikian, $4 \in G$.

Nah, karena 0, $1+\sqrt{19}$, dan 4 termuat di G, maka kita bisa menyatakan bahwa G bukan himpunan kosong.

Oh iya. Jika mau menyelidiki "lebih dalam", kita juga bisa menyatakan bahwa himpunan $\mathbb{Z} \cdot 2$ dan $\mathbb{Z}(1 + \sqrt{19})$ termuat di himpunan G.

Oke. Pada intinya ya G bukan himpunan kosong.

- **Subsoal Poin (a)**

Nah, setelah memastikan bahwa G bukan himpunan kosong, selanjutnya kita akan menunjukkan bahwa G merupakan grup terhadap operasi penjumlahan. Operasi penjumlahan ini adalah penjumlahan bilangan real ($\mathbb{R}$) sebagaimana yang kita tahu.

Weee! Kenapa pakainya operasi penjumlahan bilangan real?

Perhatikan! Elemen-elemen himpunan $\mathbb{Z} \cdot 2$ adalah bilangan bulat. Lebih tepatnya, bilangan bulat yang merupakan kelipatan 2.

Di lain sisi, elemen-elemen himpunan $\mathbb{Z}(1 + \sqrt{19})$ adalah bilangan real. Lebih tepatnya, elemen-elemen tersebut berbentuk $x(1 + \sqrt{19})$ dengan x adalah bilangan bulat.

Oleh sebab itu, supaya kita bisa menjumlahkan antara bilangan bulat dengan bilangan real, maka kita akan menggunakan operasi penjumlahan bilangan real. Kita memandang bilangan bulat sebagai bilangan real. Paham toh?

Nah, supaya tidak membuat ambigu, kita notasikan operasi penjumlahan bilangan real untuk elemen-elemen di himpunan G dengan simbol $\oplus$. Definisinya sebagai berikut.

$$x \oplus y \overset{\text{def}}{=} (2a_1 + b_1(1 + \sqrt{19})) \; + \; (2a_2 + b_2(1 + \sqrt{19})),$$

untuk setiap $x, y \in G$ dengan $x = 2a_1 + b_1(1 + \sqrt{19})$ dan $y = 2a_2 + b_2(1 + \sqrt{19})$, dengan $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$.

***

Nah, untuk menunjukkan bahwa $(G, \oplus)$ adalah grup, kita akan melakukan empat langkah berikut secara berurutan.

1. **Langkah 1:** Kita akan menunjukkan bahwa operasi $\oplus$ adalah operasi biner yang tertutup di himpunan G.
2. **Langkah 2:** Kita akan menunjukkan bahwa operasi $\oplus$ bersifat asosiatif di himpunan G.
3. **Langkah 3:** Kita akan menunjukkan bahwa himpunan G memuat elemen identitas terhadap operasi $\oplus$.
4. **Langkah 4:** Kita akan menunjukkan bahwa setiap elemen di himpunan G memiliki invers terhadap operasi $\oplus$.

Oke! Ayo kita mulai!

•• Langkah-1:
Menunjukkan bahwa operasi $\oplus$ adalah operasi biner yang tertutup di himpunan G.

Kita akan menunjukkan bahwa $\oplus$ adalah operasi biner yang tertutup di himpunan G dengan cara menunjukkan bahwa kedua pernyataan berikut berlaku benar.

1. Untuk sebarang $x, y \in G$, akan berlaku $x \oplus y \in G$.
2. Untuk sebarang $x, y \in G$, jika $x \oplus y = r_1$ dan $x \oplus y = r_2$ untuk suatu $r_1, r_2 \in G$, maka akan berlaku $r_1 = r_2$.

Ayo, kita ambil sebarang $x, y \in G$. Dengan demikian, $x = 2a_1 + b_1(1 + \sqrt{19})$ dan $y = 2a_2 + b_2(1 + \sqrt{19})$ untuk suatu $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$.

Berdasarkan definisi operasi $\oplus$ di atas, kita akan mendapatkan hasil berikut.

$$x \oplus y \;=\; (2a_1 + b_1(1 + \sqrt{19})) \;+\; (2a_2 + b_2(1 + \sqrt{19}))$$

Perhatikan! Simbol + yang muncul pada ruas sebelah kanan adalah simbol penjumlahan bilangan real sebagaimana yang sudah kita ketahui. Selain itu, perhatikan juga bahwa kita dapat memandang a_1, a_2, b_1, dan b_2 sebagai bilangan real. Dengan demikian, "sepertinya" $x \oplus y$ ini adalah operasi yang terdefinisi dengan baik.

Hmmm, supaya lebih yakin, ayo kita jabarkan saja $x \oplus y$!

Nah, karena kita bisa memandang a_1, a_2, b_1, dan b_2 sebagai bilangan-bilangan real, maka kita dapat memanfaatkan sifat asosiatif, komutatif, dan distributif yang berlaku pada operasi penjumlahan dan perkalian bilangan real pada penjabaran $x \oplus y$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x \oplus y &= (2a_1 + b_1(1+\sqrt{19})) \ + \ (2a_2 + b_2(1+\sqrt{19})) \\ &= (2a_1 + b_1 + b_1\sqrt{19}) \ + \ (2a_2 + b_2 + b_2\sqrt{19}) \\ &= 2a_1 + 2a_2 \ + \ b_1 + b_1\sqrt{19} \ + \ b_2 + b_2\sqrt{19} \\ &= 2(a_1 + a_2) \ + \ (b_1 + b_2) \ + \ (b_1 + b_2)\sqrt{19}\sqrt{19} \\ &= 2(a_1 + a_2) \ + \ (b_1 + b_2)(1+\sqrt{19}) \end{aligned}$$

Karena a_1, a_2, b_1, dan b_2 adalah bilangan-bilangan bulat, maka $a_1 + a_2$ dan $b_1 + b_2$ juga adalah bilangan bulat. Dengan demikian, berdasarkan syarat keanggotaan himpunan G, kita bisa menyatakan bahwa:

$$x \oplus y \ = \ 2(a_1 + a_2) \ + \ (b_1 + b_2)(1+\sqrt{19}) \in G$$

untuk sebarang $x, y \in G$.

Selanjutnya, misalkan terdapat bilangan bulat c_1, c_2, d_1, dan d_2 dengan $c_1 \neq c_2$ dan $d_1 \neq d_2$ sedemikian sehingga berlaku:

- $x \oplus y \ = \ 2c_1 \ + \ d_1(1+\sqrt{19})$, dan
- $x \oplus y \ = \ 2c_2 \ + \ d_2(1+\sqrt{19})$.

Apakah hal tersebut bisa berlaku benar? Ayo kita selidiki!

Pertama-tama, berdasarkan sifat bilangan real berikut:

> **Sifat Bilangan Real 1**
>
> Diketahui a, b, dan c adalah bilangan-bilangan real.
>
> Jika berlaku $a = b$ dan $a = c$, maka akan berlaku $b = c$.

kita dapat menyatakan bahwa akan berlaku benar persamaan berikut.

$$2c_1 \ + \ d_1(1+\sqrt{19}) \ = \ 2c_2 \ + \ d_2(1+\sqrt{19})$$

Kemudian, jika kita kurangi kedua ruas dengan $2c_2$ dan juga menggunakan sifat komutatif operasi penjumlahan bilangan real, maka kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$2c_1 \ - \ 2c_2 \ + \ d_1(1+\sqrt{19}) \ = \ d_2(1+\sqrt{19})$$

Kemudian, jika kita kurangi kedua ruas dengan $d_2(1+\sqrt{19})$ dan juga menggunakan sifat komutatif operasi penjumlahan bilangan real, maka kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$2c_1 \ - \ 2c_2 \ + \ d_1(1+\sqrt{19}) \ - \ d_2(1+\sqrt{19}) \ = \ 0$$

Kemudian, dengan menggunakan sifat distributif bilangan real, maka kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$2(c_1 \ - \ c_2) \ + \ (d_1 - d_2)(1+\sqrt{19}) \ = \ 0$$

Perhatikan bahwa kita dapat menyatakan 0 sebagai $2 \cdot 0 \ + \ 0 \cdot (1+\sqrt{19})$.

$$2(c_1 \ - \ c_2) \ + \ (d_1 - d_2)(1+\sqrt{19}) \ = \ 2 \cdot 0 \ + \ 0 \cdot (1+\sqrt{19})$$

Kemudian, berdasarkan sifat bilangan real berikut:

Sifat Bilangan Real 2

Diketahui a, b, dan c adalah bilangan-bilangan real.

Jika berlaku $a \cdot b = a \cdot c$ dengan $a \neq 0$, maka akan berlaku $b = c$.

kita dapat menyatakan bahwa $c_1 - c_2 = 0$ dan $d_1 - d_2 = 0$.

Nah ini! Karena $c_1 - c_2 = 0$, maka akan berlaku $c_1 = c_2$. Demikian juga, karena $d_1 - d_2 = 0$, maka akan berlaku $d_1 = d_2$.

Berdasarkan uraian di atas, kita bisa menyatakan bahwa **tidak ada** bilangan bulat c_1, c_2, d_1, dan d_2 dengan $c_1 \neq c_2$ dan $d_1 \neq d_2$ sedemikian sehingga berlaku:

- $x \oplus y \ = \ 2c_1 \ + \ d_1(1+\sqrt{19})$, dan
- $x \oplus y \ = \ 2c_2 \ + \ d_2(1+\sqrt{19})$.

Dengan kata lain, untuk sebarang $x, y \in G$, jika $x \oplus y = r_1$ dan $x \oplus y = r_2$ untuk suatu $r_1, r_2 \in G$, maka akan berlaku $r_1 = r_2$.

Jadi, kita bisa menyatakan bahwa operasi $\oplus$ adalah operasi biner yang tertutup di himpunan G.

•• Langkah-2:
Menunjukkan bahwa operasi $\oplus$ bersifat asosiatif di himpunan G.

Definisi Asosiatif

Diketahui G adalah himpunan yang tidak kosong dan $\oplus$ adalah operasi biner yang tertutup di himpunan G.

Operasi biner $\oplus$ bersifat asosiatif di himpunan G jika dan hanya jika untuk sebarang $x, y, z \in G$ akan berlaku $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.

Ayo kita ambil sebarang $x, y, z \in G$. Dengan demikian, kita bisa menyatakan elemen x, y dan z menjadi sebagai:

- $x = 2a_1 + b_1(1 + \sqrt{19})$,
- $y = 2a_2 + b_2(1 + \sqrt{19})$, dan
- $z = 2a_3 + b_3(1 + \sqrt{19})$

untuk suatu a_i dan b_i elemen-elemen di $\mathbb{Z}$.

Selanjutnya, kita akan menjabarkan $(x \oplus y) \oplus z$ menjadi seperti di bawah ini.

$$
\begin{aligned}
(x \oplus y) \oplus z &= \Big(2a_1 + b_1(1 + \sqrt{19}) \ + \ 2a_2 + b_2(1 + \sqrt{19})\Big) \ \oplus \ z \\
&= \Big(2(a_1 + a_2) \ + \ (b_1 + b_2)(1 + \sqrt{19})\Big) \ \oplus \ z \\
&= \Big(2(a_1 + a_2) \ + \ (b_1 + b_2)(1 + \sqrt{19})\Big) \ + \ 2a_3 + b_3(1 + \sqrt{19}) \\
&= \Big((\ 2(a_1 + a_2) + 2a_3) \ + \ ((b_1 + b_2) + b_3)(1 + \sqrt{19})\Big) \\
&= \Big(2\ ((a_1 + a_2) + a_3) \ + \ ((b_1 + b_2) + b_3)(1 + \sqrt{19})\Big)
\end{aligned}
$$

Perhatikan jumlahan $(a_1 + a_2) + a_3$ dan $(b_1 + b_2) + b_3$!

Karena a_i dan b_i adalah bilangan-bilangan real, maka kita bisa memanfaatkan sifat asosiatif penjumlahan bilangan real untuk menghasilkan persamaan sebagai berikut.

- $(a_1 + a_2) + a_3 \ = \ a_1 + (a_2 + a_3)$
- $(b_1 + b_2) + b_3 \ = \ b_1 + (b_2 + b_3)$

Dengan demikian kita akan bisa melanjutkan penjabaran di atas menjadi sebagaimana berikut ini.

$$\begin{aligned}
(x \oplus y) \oplus z &= \Big(2\ ((a_1 + a_2) + a_3)\ +\ ((b_1 + b_2) + b_3)(1 + \sqrt{19})\Big) \\
&= \Big(2\ (a_1 + (a_2 + a_3))\ +\ (b_1 + (b_2 + b_3))(1 + \sqrt{19})\Big) \\
&= 2a_1 + b_1(1 + \sqrt{19})\ +\ \Big(2(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)(1 + \sqrt{19})\Big) \\
&= 2a_1 + b_1(1 + \sqrt{19})\ +\ \Big(2a_2 + b_2(1 + \sqrt{19})\ +\ 2a_3 + b_3(1 + \sqrt{19})\Big) \\
&= x\ +\ (y \oplus z) \\
&= x \oplus (y \oplus z)
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, terlihat bahwa untuk sebarang $x, y, z \in G$ akan berlaku $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$. Jadi, berdasarkan penjabaran di atas dan juga **Definisi Asosiatif**, kita bisa menyimpulkan bahwa operasi $\oplus$ bersifat asosiatif di G.

•• Langkah-3:
Menunjukkan bahwa himpunan G memuat elemen identitas terhadap operasi $\oplus$.

Ayo kita buktikan bahwa G memuat elemen identitas terhadap operasi $\oplus$!

Definisi Elemen Identitas

Diketahui G adalah himpunan yang tidak kosong dan $\oplus$ adalah operasi biner yang tertutup dan terdefinisi dengan baik sekaligus bersifat asosiatif di himpunan G.

Elemen $e_\oplus \in G$ disebut sebagai elemen identitas di himpunan G terhadap operasi $\oplus$ jika dan hanya jika untuk sebarang $x \in G$ akan berlaku $x \oplus e_\oplus \ = \ e_\oplus \oplus x \ = \ x$.

Ayo kita **andaikan** bahwa $e_\oplus$ adalah elemen identitas di G terhadap operasi $\oplus$. Kita **andaikan** bahwa elemen identitas $e_\oplus$ ini betul-betul ada dan termuat di G sebagaimana **Definisi 2**. Karena $e_\oplus \in G$, maka kita bisa menyatakan $e_\oplus$ sebagai $e_\oplus = 2p + q(1 + \sqrt{19})$ untuk suatu $p, q \in \mathbb{Z}$

Selanjutnya, kita ambil sebarang $x \in G$. Dengan demikian, kita bisa menyatakan x sebagai $x = 2a + b(1 + \sqrt{19})$ untuk suatu $a, b \in \mathbb{Z}$.

Jika $x \oplus e_{\oplus}$ dijabarkan, maka hasilnya akan seperti ini.

$$\begin{aligned} x \oplus e_{\oplus} &= \Big(2a + b(1 + \sqrt{19})\Big) \ + \ \Big(2p + q(1 + \sqrt{19})\Big) \\ &= 2a + b + b\sqrt{19} \ + \ 2p + q + q\sqrt{19} \end{aligned}$$

Lanjut! Jika $e_{\oplus} \oplus x$ dijabarkan, maka hasilnya akan seperti ini.

$$\begin{aligned} e_{\oplus} \oplus x &= \Big(2p + q(1 + \sqrt{19})\Big) \ + \ \Big(2a + b(1 + \sqrt{19})\Big) \\ &= 2p + q + q\sqrt{19} \ + \ 2a + b + b\sqrt{19} \end{aligned}$$

Perhatikan!

$2a + b + b\sqrt{19} \ + \ 2p + q + q\sqrt{19}$ dan $2p + q + q\sqrt{19} \ + \ 2a + b + b\sqrt{19}$ adalah penjumlahan bilangan-bilangan real. Ya toh?

Nah, dengan memanfaatkan sifat komutatif dan asosiatif pada operasi penjumlahan bilangan real, maka penjumlahan $2a + b + b\sqrt{19} \ + \ 2p + q + q\sqrt{19}$ dapat kita "susun ulang" letak suku-sukunya menjadi $2p + q + q\sqrt{19} \ + \ 2a + b + b\sqrt{19}$. Ya toh?

Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa $x \oplus e_{\oplus} = e_{\oplus} \oplus x$.

Nah ini! Selanjutnya, kita akan menyelidiki apakah berlaku persamaan $x \oplus e_{\oplus} = x$. Jika persamaan ini berlaku, maka pengandaian bahwa $e_{\oplus} \in G$ memang benar-benar terjadi.

Oke! Mari kita mulai dengan melanjutkan penjabaran $x \oplus e_{\oplus}$ di atas untuk beberapa langkah.

$$\begin{aligned} x \oplus e_{\oplus} &= \Big(2a + b(1 + \sqrt{19})\Big) \ + \ \Big(2p + q(1 + \sqrt{19})\Big) \\ &= 2a + b + b\sqrt{19} \ + \ 2p + q + q\sqrt{19} \\ &= 2a + 2p \ + \ b + q \ + b\sqrt{19} + q\sqrt{19} \\ &= 2a + 2p \ + \ b + q \ + (b + q)\sqrt{19} \\ &= 2(a + p) \ + \ (b + q)(1 + \sqrt{19}) \end{aligned}$$

Nah, jika berlaku persamaan $x \oplus e_{\oplus} = x$, maka akan berlaku pula persamaan berikut.

$$2(a+p) \ + \ (b+q)(1+\sqrt{19}) \ = \ 2a \ + \ b(1+\sqrt{19})$$

Perhatikan! Persamaan di atas dapat berlaku benar **jika dan hanya jika** $p = 0$ dan $q = 0$. (Ingat! Karena elemen x diambil secara sebarang, maka kita tidak bisa menentukan bilangan a dan b).

Nah, karena $p = 0$ dan $q = 0$, maka kita dapat menyatakan $e_{\oplus}$ sebagai berikut.

$$e_{\oplus} \ = \ 2p \ + \ q(1+\sqrt{19}) \ = \ 2\cdot 0 \ + \ 0\cdot(1+\sqrt{19}) \ = \ 0+0 \ = \ 0$$

Naaah! Apakah 0 termuat di G?

Oh ya jelas dong! Kan di bagian awal pengerjaan soal ini sudah ditunjukkan bahwa 0 termuat di G. Coba, buka lagi halaman kedua pengerjaan soal ini.

Jadi, berdasarkan uraian panjang di atas dan juga **Definisi Elemen Identitas**, kita dapat menyimpulkan bahwa G memuat elemen identitas, yaitu 0, sedemikian sehingga untuk sebarang $x \in G$ akan berlaku $x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$.

•• Langkah-4:
Menunjukkan bahwa setiap elemen di himpunan G memiliki invers terhadap operasi $\oplus$.

Jika setiap elemen di G memiliki invers terhadap operasi $\oplus$, maka untuk sebarang elemen $x \in G$, akan terdapat suatu elemen $y \in G$ sedemikian sehingga berlaku $x \oplus y = y \oplus x = 0$. Ingat! Di **bagian (3)** kita sudah menunjukkan bahwa 0 adalah elemen identitas di G terhadap operasi $\oplus$.

Oke! Kita ambil sebarang $x \in G$. Dengan demikian, kita bisa menyatakan x sebagai $x = 2c + d(1+\sqrt{19})$ untuk suatu $c, d \in \mathbb{Z}$.

Nah, kita akan **mengandaikan** bahwa G memuat invers untuk elemen x. Sebut saja elemen invers ini sebagai elemen y sedemikian sehingga akan berlaku $x \oplus y = y \oplus x = 0$.

Oh iya! Karena $y \in G$, maka kita bisa menyatakan y sebagai $y = 2a + b(1+\sqrt{19})$ untuk suatu $a, b \in \mathbb{Z}$.

Nah, selanjutnya ayo kita operasikan $x \oplus y$.

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \left(2c + d(1+\sqrt{19})\right) \ + \ \left(2a + b(1+\sqrt{19})\right) \\ &= 2c + d + d\sqrt{19} \ + \ 2a + b + b\sqrt{19} \\ &= 2c + 2a \ + \ d + b \ + d\sqrt{19} + b\sqrt{19} \\ &= 2(c+a) \ + \ (d+b)(1+\sqrt{19}) \end{aligned}$$

Selanjutnya, kita lanjut mengoperasikan $y \oplus x$.

$$\begin{aligned} y \oplus x &= \Big(2a + b(1+\sqrt{19})\Big) \ + \ \Big(2c + d(1+\sqrt{19})\Big) \\ &= 2a + b + b\sqrt{19} \ + \ 2c + d + d\sqrt{19} \\ &= 2a + 2c \ + \ b + d \ + b\sqrt{19} + d\sqrt{19} \\ &= 2(a+c) \ + \ (b+d)(1+\sqrt{19}) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa a, b, c, dan d adalah bilangan-bilangan bulat! Dengan demikian, berdasarkan sifat komutatif penjumlahan bilangan bulat, akan berlaku persamaan $c + a = a + c$ dan $d + b = b + d$. Jadi, kita bisa menyimpulkan bahwa $x \oplus y = y \oplus x$ untuk sebarang $x, y \in G$.

Nah, permasalahannya apakah untuk setiap $x \in G$ kita selalu dapat menemukan $y \in G$ sedemikian sehingga berlaku $x \oplus y = y \oplus x = 0$?

Kita jabarkan saja bentuk $x \oplus y = 0$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x \oplus y = 0 \iff & \Big(2a + b(1+\sqrt{19})\Big) \ + \ \Big(2c + d(1+\sqrt{19})\Big) = 0 \\ \iff & 2(a+c) \ + \ (b+d)(1+\sqrt{19}) = 0 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa persamaan $2(a+c) \ + \ (b+d)(1+\sqrt{19}) = 0$ dapat berlaku jika dan hanya jika $2(a+c) = 0$ dan $b+d = 0$. Dengan kata lain, persamaan ini dapat berlaku jika dan hanya jika $a = -c$ dan $b = -d$.

Jadi, jika kita ambil sebarang $x \in G$, maka kita bisa menyatakan x sebagai $x = 2c + d(1+\sqrt{19})$ untuk suatu $c, d \in \mathbb{Z}$. Nah, elemen invers untuk elemen x tersebut (kita sebut sebagai elemen $y \in G$) akan selalu dapat ditemukan dengan bentuk $y = 2(-c) \ + \ (-d)(1+\sqrt{19})$ sedemikian sehingga akan berlaku $x \oplus y = y \oplus x = 0$.

•• Kesimpulan

Nah, berdasarkan langkah-langkah di atas, karena kita sudah menunjukkan bahwa:

1. Operasi $\oplus$ adalah operasi biner yang tertutup di himpunan G.
2. Operasi $\oplus$ bersifat asosiatif terhadap elemen-elemen di himpunan G.
3. Himpunan G memuat elemen identitas terhadap operasi $\oplus$, yaitu 0.
4. Setiap elemen di himpunan G memiliki invers terhadap operasi $\oplus$. Jika $2c + d(1+\sqrt{19})$ adalah sebarang elemen di G (dengan $c, d \in \mathbb{Z}$), maka invers elemen tersebut terhadap operasi $\oplus$ adalah $2(-c) \ + \ (-d)(1+\sqrt{19})$.

maka kita dapat menyatakan bahwa himpunan G:

$$G \ = \ \mathbb{Z} \cdot 2 \ + \ \mathbb{Z}(1+\sqrt{19}) \ = \ \{2a + b(1+\sqrt{19}) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

terhadap operasi penjumlahan $\oplus$ adalah grup.

- **Subsoal Poin (b)**

Oke. ***FIRST THING FIRST!***

Kita harus memastikan bahwa himpunan $G - \{0\}$ **tidak kosong**!

Berdasarkan pengerjaan **Subsoal Poin (a)** di atas, diketahui bahwa himpunan G tidak kosong. Walaupun 0 termuat di G, akan tetapi $G - \{0\}$ tetap bukan himpunan kosong karena $G - \{0\}$ (setidaknya) masih memuat $1 + \sqrt{19}$ dan 4.

Sebagaimana yang sudah disinggung di pengerjaan **Subsoal Poin (a)**, jika mau menyelidiki "lebih dalam", kita juga bisa menyatakan bahwa himpunan $\mathbb{Z} \cdot 2$ dan $\mathbb{Z}(1 + \sqrt{19})$ termuat di himpunan G. Dengan demikian himpunan G memiliki tak berhingga banyak elemen, sehingga himpunan $G - \{0\}$ tetap memiliki tak berhingga banyak elemen.

Oke. Pada intinya ya baik G dan $G - \{0\}$ itu bukan himpunan kosong.

***

Kita bisa menggunakan langkah-langkah yang serupa di pengerjaan **Subsoal Poin (a)** untuk menyelidiki apakah $G - \{0\}$ merupakan grup terhadap operasi perkalian. Walaupun ya... "bau-baunya" $G - \{0\}$ bukan merupakan grup terhadap operasi perkalian sih.

Eh, apa benar begitu ya?

Oke, sebelumnya, mari kita definisikan dulu operasi perkalian yang dimaksud ini. Karena soal tidak memberi informasi lebih detil, maka asumsikan saja operasi perkalian yang dimaksud adalah operasi perkalian bilangan real.

Weee! Kenapa pakainya operasi perkalian bilangan real?

Perhatikan! Elemen-elemen himpunan $\mathbb{Z} \cdot 2$ adalah bilangan bulat. Lebih tepatnya, bilangan bulat yang merupakan kelipatan 2.

Di lain sisi, elemen-elemen himpunan $\mathbb{Z}(1 + \sqrt{19})$ adalah bilangan real. Lebih tepatnya, elemen-elemen tersebut berbentuk $x(1 + \sqrt{19})$ dengan x adalah bilangan bulat.

Oleh sebab itu, supaya kita bisa mengalikan antara bilangan bulat dengan bilangan real, maka kita akan menggunakan operasi perkalian bilangan real. Kita memandang bilangan bulat sebagai bilangan real. Paham toh?

Nah, supaya tidak membuat ambigu, kita notasikan operasi perkalian bilangan real untuk elemen-elemen di himpunan $G - \{0\}$ dengan simbol $\otimes$. Definisinya sebagai berikut.

$$x \otimes y \stackrel{\text{def}}{=} (2a + b(1 + \sqrt{19})) \cdot (2c + d(1 + \sqrt{19})),$$

untuk setiap $x, y \in G - \{0\}$ dengan $x = 2a + b(1 + \sqrt{19})$ dan $y = 2c + d(1 + \sqrt{19})$, dengan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Untuk menyelidiki bahwa $(G - \{0\}, \otimes)$ adalah grup, kita akan melakukan empat langkah berikut secara berurutan.

1. **Langkah 1:** Kita akan menyelidiki apakah benar bahwa operasi $\otimes$ adalah operasi biner yang tertutup di himpunan $G - \{0\}$.
2. **Langkah 2:** Kita akan menyelidiki apakah benar bahwa operasi $\otimes$ bersifat asosiatif di himpunan $G - \{0\}$.
3. **Langkah 3:** Kita akan menyelidiki apakah benar bahwa himpunan $G - \{0\}$ memuat elemen identitas terhadap operasi $\otimes$.
4. **Langkah 4:** Kita akan menyelidiki apakah benar bahwa setiap elemen di himpunan $G - \{0\}$ memiliki invers terhadap operasi $\otimes$.

Oke! Ayo kita mulai!

•• Langkah-1:
Menyelidiki apakah benar bahwa operasi $\otimes$ adalah operasi biner yang tertutup di himpunan $G - \{0\}$.

Kita akan menunjukkan bahwa $\otimes$ adalah operasi biner yang tertutup di himpunan $G - \{0\}$ dengan cara menunjukkan bahwa kedua pernyataan berikut berlaku benar.

1. Untuk sebarang $x, y \in G - \{0\}$, akan berlaku $x \otimes y \in G - \{0\}$.
2. Untuk sebarang $x, y \in G - \{0\}$, jika $x \otimes y = r_1$ dan $x \otimes y = r_2$ untuk suatu $r_1, r_2 \in G - \{0\}$, maka akan berlaku $r_1 = r_2$.

Ayo, kita ambil sebarang $x, y \in G - \{0\}$. Dengan demikian, $x = 2a + b(1 + \sqrt{19})$ dan $y = 2c + d(1 + \sqrt{19})$ untuk suatu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Berdasarkan definisi operasi $\otimes$ di atas, kita akan mendapatkan hasil berikut.

$$x \otimes y = (2a + b(1 + \sqrt{19})) \cdot (2c + d(1 + \sqrt{19}))$$

Perhatikan! Simbol $\cdot$ yang muncul pada ruas sebelah kanan adalah simbol perkalian bilangan real sebagaimana yang sudah kita ketahui. Selain itu, perhatikan juga bahwa kita dapat memandang a, b, c, dan d sebagai bilangan real. Dengan demikian, "sepertinya" $x \otimes y$ ini adalah operasi yang terdefinisi dengan baik.

Hmmm, supaya lebih yakin, ayo kita jabarkan saja $x \otimes y$!

$$
\begin{aligned}
x \otimes y &= \left(2a + b(1+\sqrt{19})\right) \cdot \left(2c + d(1+\sqrt{19})\right) \\
&= 4ac + 2ad(1+\sqrt{19}) + 2bc(1+\sqrt{19}) + bd\left(1+\sqrt{19}\right)^2 \\
&= 4ac + 2ad(1+\sqrt{19}) + 2bc(1+\sqrt{19}) + bd(20+2\sqrt{19}) \\
&= 4ac + 2ad + 2ad\sqrt{19} + 2bc + 2bc\sqrt{19} + 20bd + 2bd\sqrt{19} \\
&= 4ac + 20bd + 2ad + 2bc + 2ad\sqrt{19} + 2bc\sqrt{19} + 2bd\sqrt{19} \\
&= 4ac + 18bd + 2bd + 2ad + 2bc + 2ad\sqrt{19} + 2bc\sqrt{19} + 2bd\sqrt{19} \\
&= 4ac + 18bd + 2ad + 2bc + 2bd + 2ad\sqrt{19} + 2bc\sqrt{19} + 2bd\sqrt{19} \\
&= (2 \cdot 2ac) + (2 \cdot 9bd) + \left(2ad + 2bc + 2bd\right) + \left(2ad + 2bc + 2bd\right)\sqrt{19} \\
&= 2 \cdot (2ac + 9bd) + \left(2ad + 2bc + 2bd\right)\left(1+\sqrt{19}\right)
\end{aligned}
$$

Karena a, b, c, dan d adalah bilangan-bilangan bulat, maka $2ac + 9bd$ dan $2ad + 2bc + 2bd$ juga adalah bilangan bulat. Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa:

$$x \otimes y = 2 \cdot (2ac + 9bd) + \left(2ad + 2bc + 2bd\right)\left(1+\sqrt{19}\right) \in G$$

Selanjutnya perhatikan! Kita tahu bahwa $0 \in G$, akan tetapi $0 \notin G - \{0\}$. Perhatikan juga bahwasanya G adalah himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ (dengan kata lain, $G \subset \mathbb{R}$. Oleh sebab itu, kita bisa memandang elemen-elemen di dalam himpunan G sebagai bilangan real.

Sifat Bilangan Real 3

Untuk sebarang $a, b \in \mathbb{R}$ berlaku:

$$a \cdot b = 0 \quad \text{jika dan hanya jika} \quad a = 0 \text{ atau } b = 0$$

Berdasarkan **Sifat Bilangan Real 3** di atas, karena $0 \notin G - \{0\}$, maka untuk setiap $x, y \in G - \{0\}$ akan berlaku $x \otimes y \neq 0$. Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa untuk sebarang $x, y \in G - \{0\}$ akan berlaku $x \otimes y \in G - \{0\}$.

Kemudian, berdasarkan **Sifat Bilangan Real 1**, untuk setiap $x, y \in G - \{0\}$ dengan $x \otimes y = r_1$ dan $x \otimes y = r_2$ untuk suatu $r_1, r_2 \in G - \{0\}$, maka akan berlaku $r_1 = r_2$.

Jadi, kita bisa menyatakan bahwa operasi $\otimes$ adalah operasi biner yang tertutup di himpunan $G - \{0\}$.

•• Langkah-2:
Menyelidiki apakah benar operasi $\otimes$ bersifat asosiatif di himpunan $G - \{0\}$.

Perhatikan sifat bilangan real berikut!

Sifat Bilangan Real 5

Untuk sebarang $a, b, c \in \mathbb{R}$ berlaku:

$$(a \cdot b) \cdot c \;=\; a \cdot (b \cdot c)$$

Karena $G - \{0\}$ adalah himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ dan operasi $\otimes$ adalah operasi biner yang tertutup di $G - \{0\}$, maka kita bisa menyatakan bahwa operasi $\otimes$ bersifat asosiatif terhadap elemen-elemen himpunan $G - \{0\}$.

•• Langkah-3:
Menyelidiki apakah benar bahwa himpunan $G - \{0\}$ memuat elemen identitas terhadap operasi $\otimes$.

Kita tahu bahwa $\mathbb{R} - \{0\}$ adalah grup terhadap operasi perkalian bilangan real. Dengan demikian, berdasarkan definisi operasi $\otimes$, kita bisa menyatakan bahwa $\Big(\mathbb{R} - \{0\},\ \otimes\Big)$ adalah grup.

Sifat Elemen Identitas di Subgrup

Diketahui $(H,\ \star)$ adalah subgrup dari $(G,\ \star)$. Jika e_G adalah elemen identitas di grup $(G,\ \star)$, maka e_G juga merupakan elemen identitas di grup $(H,\ \star)$.

Nah, kita tahu bahwa 1 adalah elemen identitas di grup $\Big(\mathbb{R} - \{0\},\ \otimes\Big)$, yaitu $r \otimes 1 = 1 \otimes r = r$ untuk sebarang $r \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Karena $G - \{0\}$ adalah himpunan bagian dari $\mathbb{R} - \{0\}$, maka $(G - \{0\},\ \otimes)$ adalah grup jika dan hanya jika $(G - \{0\},\ \otimes)$ adalah subgrup dari $\Big(\mathbb{R} - \{0\},\ \otimes\Big)$. Akibatnya, jika $(G - \{0\},\ \otimes)$ adalah grup, maka bilangan 1 **harus** termuat di dalam himpunan $G - \{0\}$.

Pertanyannya, *"Apakah 1 termuat di dalam himpunan $G - \{0\}$?"*

Jika 1 termuat di dalam himpunan $G - \{0\}$, maka berdasarkan syarat keanggotaan himpunan $G - \{0\}$, kita dapat menyatakan 1 sebagai:

$$1 \;=\; 2a + b(1 + \sqrt{19})$$

untuk suatu $a, b \in \mathbb{Z}$.

Nah, supaya persamaan $1 \;=\; 2a + b(1 + \sqrt{19})$ dapat berlaku dengan $a, b \in \mathbb{Z}$, maka nilai b **harus 0**! Kenapa? Karena jika $b \neq 0$, maka $b(1+\sqrt{19})$ akan memuat suku $b\sqrt{19}$ yang mana itu bukan bilangan bulat. Ingat bahwa 1 itu adalah bilangan bulat serta a dan b juga harus merupakan bilangan bulat.

Naah, jika $b = 0$, maka persamaan di atas akan menjadi $1 \;=\; 2a$ dengan a adalah bilangan bulat. Lagi-lagi, persamaan $1 \;=\; 2a$ hanya akan dipenuhi oleh $a = 1/2$ yang mana itu bukan bilangan bulat, melainkan bilangan rasional.

Dengan demikian, kita dapat menyatakan bahwa tidak ada bilangan bulat a dan b yang memenuhi persamaan $1 \;=\; 2a + b(1 + \sqrt{19})$. Akibatnya, bilangan 1 **tidak termuat** di dalam himpunan $G - \{0\}$. Karena itu, $(G - \{0\},\ \otimes)$ tidak akan menjadi subgrup dari $\Big(\mathbb{R} - \{0\},\ \otimes\Big)$.

•• Kesimpulan

Karena himpunan $G - \{0\}$ tidak memuat elemen identitas terhadap operasi $\otimes$, maka $(G - \{0\},\ \otimes)$ bukan subgrup.

■

4

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 2

Soal

(a) Show that the following are equivalent for a group G!

   i. for every $a, b, c \in G$ satisfying $ab = ca$, we have $b = c$; and

   ii. G is commutative

(b) Suppose that G is a group in which every element has order 1 or 2. Show that G must be commutative!

Dikerjakan

Pertama-tama, kita perjelas dulu ya hal-hal yang kita ketahui pada soal supaya Pembaca yang baru belajar Pengantar Struktur Aljabar nggak kebingungan. Oke?

Nah, pada soal, diketahui bahwa G adalah grup. Dengan demikian, kita dapat menyatakan bahwa G adalah suatu himpunan yang dilengkapi dengan suatu operasi biner. Dalam pengerjaan soal ini, kita akan menotasikan operasi biner ini dengan $\star$. Dengan demikian, untuk $a, b \in G$, jika dinotasikan ab itu berarti $a \star b$.

Selanjutnya, jika kita memandang G sebagai himpunan, maka kita akan menyebutnya sebagai himpunan G. Jika kita memandang G sebagai grup, maka kita akan menyebutnya sebagai grup $(G, \star)$.

Karena ini bukan ujian, kita kerjakan pakai bahasa Indonesia saja ya. 😀

- **Subsoal Poin (a)**

Terjemahan Soal dalam Bahasa Indonesia

Tunjukkan pernyataan berikut ekuivalen untuk suatu grup $(G, \star)$!

i. Untuk setiap $a, b, c \in G$ yang memenuhi $a \star b = c \star a$, akan diperoleh $b = c$; dan

ii. $(G, \star)$ adalah grup komutatif

Definisi Grup Komutatif

Diketahui $(G, \star)$ adalah grup.

$(G, \star)$ disebut sebagai grup komutatif jika dan hanya jika untuk sebarang $x, y \in G$ akan berlaku $x \star y = y \star x$.

Oke!

Untuk mengerjakan **Terjemahan Soal dalam Bahasa Indonesia** di atas, kita akan menunjukkan bahwa **Pernyataan A** dan **Pernyataan B** di bawah ini berlaku benar.

1. **Pernyataan A**
   Jika untuk setiap $a, b, c \in G$ yang memenuhi $a \star b = c \star a$, akan berlaku $b = c$, maka $(G, \star)$ adalah grup komutatif.

2. **Pernyataan B**
   Jika $(G, \star)$ adalah grup komutatif, maka untuk setiap $a, b, c \in G$ yang memenuhi $a \star b = c \star a$, akan berlaku $b = c$.

•• Menunjukkan Kebenaran Pernyataan A

Kita akan menunjukkan bahwa jika untuk setiap $a, b, c \in G$ yang memenuhi $a \star b = c \star a$, akan berlaku $b = c$, maka $(G, \star)$ adalah grup komutatif.

Okelah kalau begitu!

Kita ambil sebarang elemen $x, y \in G$ dan akan ditunjukkan bahwa berlaku persamaan $x \star y = y \star x$.

Perhatikan! Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka $x \star y$ akan merupakan elemen himpunan G (dengan kata lain, $x \star y \in G$). Demikian pula dengan $y \star x$, $x \star x$, $y \star y$, $x \star x \star y$, dan lain sejenisnya juga merupakan elemen himpunan G.

Sekarang perhatikan bentuk $x \star y \star x$! Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka operasi biner $\star$ bersifat asosiatif. Dengan demikian, kita akan memperoleh persamaan $x \star (y \star x) = (x \star y) \star x$. Ya kan?

Nah, kalau kita notasikan:

$$\underbrace{x}_{a} \star \underbrace{(y \star x)}_{b} = \underbrace{(x \star y)}_{c} \star \underbrace{x}_{a}$$

maka, sesuai anteseden, kita akan memperoleh $b = c$, yaitu $y \star x = x \star y$.

Ingat! Elemen x dan y tadi di awal kita pilih sebagai sebarang elemen di himpunan G. Jadi, kita bisa menyatakan bahwa $(G, \star)$ adalah grup komutatif.

•• Menunjukkan Kebenaran Pernyataan B

Kita akan menunjukkan bahwa jika $(G, \star)$ adalah grup komutatif, maka untuk setiap $a, b, c \in G$ yang memenuhi $a \star b = c \star a$, akan berlaku $b = c$.

Okelah kalau begitu!

Kita ambil sebarang elemen $a, b, c \in G$ yang memenuhi persamaan $a \star b = c \star a$ dan akan kita tunjukkan bahwa elemen b dan c ini juga memenuhi persamaan $b = c$.

Perhatikan! Karena $(G, \star)$ adalah grup komutatif, maka akan berlaku persamaan $a \star b = b \star a$. Dengan demikian, persamaan $a \star b = c \star a$ akan ekuivalen dengan $b \star a = c \star a$. Ya kan?

Nah, karena a adalah elemen di grup $(G, \star)$, maka a jelas punya invers terhadap operasi biner $\star$. Ya kan? Kita sebut elemen invers dari a ini sebagai a^{-1} sedemikian sehingga berlaku $a \star a^{-1} = e$ dengan e adalah elemen identitas di grup $(G, \star)$. Ingat! Elemen a^{-1} merupakan elemen di himpunan G (dengan kata lain, $a^{-1} \in G$).

Nah, jika kita operasikan a^{-1} dari kanan pada persamaan $b \star a = c \star a$, maka kita akan mendapatkan hasil berupa persamaan $(b \star a) \star a^{-1} = (c \star a) \star a^{-1}$.

Menggunakan sifat asosiatif operasi biner $\star$, maka persamaaan $(b \star a) \star a^{-1} = (c \star a) \star a^{-1}$ akan ekuivalen dengan persamaan $b \star (a \star a^{-1}) = c \star (a \star a^{-1})$.

Karena $a \star a^{-1} = e$, maka persamaan $b \star (a \star a^{-1}) = c \star (a \star a^{-1})$ akan ekuivalen dengan persamaan $b \star e = c \star e$. Persamaan ini akan ekuivalen dengan persamaan $b = c$.

•• Kesimpulan

Berdasarkan penjabaran-penjabaran di atas, karena kita sudah menunjukkan bahwa **Pernyataan A** dan **Pernyataan B** berlaku benar, maka kita bisa menyatakan bahwa pernyataan i dan ii di bawah ini:

i. Untuk setiap $a, b, c \in G$ yang memenuhi $a \star b = c \star a$, akan diperoleh $b = c$; dan

ii. $(G, \star)$ adalah grup komutatif

adalah pernyataan-pernyataan yang ekuivalen.

- **Subsoal Poin (b)**

Terjemahan Soal dalam Bahasa Indonesia

Misalkan $(G, \star)$ adalah grup dengan setiap elemennya memiliki order 1 atau 2. Tunjukkan bahwa $(G, \star)$ adalah grup komutatif!

Definisi Order Suatu Elemen

Diketahui $(G, \star)$ adalah grup dengan e_G sebagai elemen identitasnya.
Diketahui juga elemen $a \in G$.

Order dari elemen a adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga berlaku $a^k = e_G$ dengan $a^k = \underbrace{a \star a \star \ldots \star a}_{\text{sebanyak } k \text{ kali}}$.

Oke! Karena pada soal sudah disebutkan bahwa $(G, \star)$ adalah grup, maka kita bisa menyatakan bahwa himpunan G itu bukan himpunan kosong ya!

Nah, berdasarkan soal, jika x adalah sebarang elemen di grup $(G, \star)$, maka order x kalau nggak 1 ya 2. Jika order x adalah 1, maka akan berlaku $x^1 = x = e_G$. Sedangkan jika order x adalah 2, maka akan berlaku $x^2 = x \star x = e_G$. Paham ya?

Oh iya! Elemen e_G ini adalah elemen identitas untuk grup $(G, \star)$.

Nah, sekarang kita ambil sebarang dua elemen $x, y \in G$ yang memiliki order 2 dengan $x \neq y$. Dengan demikian, akan berlaku $x \star x = e_G$ dan $y \star y = e_G$. Akibatnya, akan diperoleh persamaan $x = x^{-1}$ dan $y = y^{-1}$ dengan x^{-1} dan y^{-1} masing-masing adalah invers atas x dan y.

Perhatikan! Kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$x \star y \;=\; x^{-1} \star y^{-1} \;=\; (y \star x)^{-1}$$

Nah, ini!

Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka jelas bahwa $x \star y$ juga merupakan elemen di himpunan G toh? (dengan kata lain, $x \star y \in G$)

Iya nggak?

Naaah... oleh sebab itu, berdasarkan soal, order dari elemen $x \star y$ ya... kalau nggak 1 ya 2!

Karena **setiap elemen hanya bisa memiliki 1 order**, maka ayo kita selidiki, apa sesungguhnya order elemen $x \star y$ ini!

•• Bagaimana jika order dari elemen $x \star y$ adalah 1?

Jika order dari elemen $x \star y$ adalah 1, maka kita akan punya persamaan $x \star y = e_G$. Iya kan?

Eh, tapi ingat! Di paragraf atas kan kita punya persamaan $x \star x = e_G$. Dengan demikian akan berlaku persamaan $x \star y = x \star x$. Nah, dengan menggunakan sifat kanselasi kita bisa menyimpulkan bahwa $x = y$. Iya kan?

Eeeeh... tapi hal ini tidak boleh terjadi! **Persamaan $x = y$ tidak boleh terjadi!**

Lho kenapa?

Ya, kan di awal kita memilih sebarang dua elemen $x, y \in G$ yang memiliki order 2 dengan $x \neq y$. Iya kan?

Jadi, kita bisa menyatakan bahwa order dari elemen $x \star y$ **bukan** 1!

•• Bagaimana jika order dari elemen $x \star y$ adalah 2?

Ya, mau bagaimana lagi?

Karena order dari elemen $x \star y$ **bukan** 1 dan order elemen-elemen di himpunan G kalau tidak 1 ya 2, maka kita bisa menyatakan bahwa:

order dari elemen $x \star y$ adalah 2.

Ya toh?

Nah, karena order elemen $x \star y$ adalah 2, maka akan berlaku persamaan $(x \star y) \star (x \star y) = e_G$. Iya kan?

Naaah, persamaan $(x \star y) \star (x \star y) = e$ itu kan ekuivalen dengan $(x \star y) = (x \star y)^{-1}$.

Ingat! Di paragraf atas kan kita punya persamaan $x \star y = (y \star x)^{-1}$. Dengan demikian, kita akan mendapatkan persamaan $(y \star x)^{-1} = (x \star y)^{-1}$.

Kemudian, menggunakan sifat ketunggalan elemen invers, kita akan mendapatkan persamaan $y \star x = x \star y$. Operasi $\star$ bersifat komutatif kan ini?

Oke! Jadi, operasi $\star$ bersifat komutatif untuk sebarang dua elemen beroder 2 di grup $(G, \star)$.

Eh, tapi tunggu dulu!

Bagaimana dengan elemen-elemen di grup $(G, \star)$ yang berorder 1?

Oke. Begini ya. Misalkan elemen $x \in G$ memiliki order 1. Itu artinya kan $x^1 = x = e_G$. Berdasarkan sifat ketunggalan elemen identitas, elemen di grup $(G, \star)$ yang berorder 1 ya... hanya e_G itu sendiri. Ya kan?

Dengan demikian, jika elemen $y \in G$ memiliki order 2, jelas berdasarkan karakteristik elemen identitas akan berlaku persamaan $y \star e_G = e_G \star y$. Operasi $\star$ ini antara elemen y dan e_G bersifat komutatif juga kan?

Jadi, ya bisa disimpulkan bahwa jika $(G, \star)$ adalah grup dengan setiap elemennya memiliki order 1 atau 2, maka $(G, \star)$ adalah grup komutatif.

$\blacksquare$

5

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 3

Soal

Diberikan grup komutatif G dan bilangan asli k. Misalkan e_G, adalah elemen identitas di G dan dibentuk himpunan H dan K dengan definisi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} H &= \{a \in G \mid a^k = e_G\} \\ K &= \{a^k \in G \mid a \in G\} \end{aligned}$$

Tunjukkan bahwa H dan K keduanya merupakan subgrup dari G!

Dikerjakan

Sebelum dikerjakan, kita notasikan dulu ya operasi biner yang berlaku di himpunan G sebagai $\oplus$. Ini semata-mata supaya Pembaca yang baru belajar Pengantar Struktur Aljabar nggak kebingungan. Dengan demikian, untuk $a, b \in G$, jika dinotasikan $a \oplus b$, maka itu berarti elemen a dioperasikan dengan elemen b terhadap operasi biner $\oplus$.

Dengan demikian, jika kita menunjukkan bahwa H adalah subgrup dari G, maka operasi biner yang berlaku di H adalah $\oplus$. Demikian juga, jika kita menunjukkan bahwa K adalah subgrup dari G, maka operasi biner yang berlaku di K adalah $\oplus$.

• Menunjukkan bahwa H adalah subgrup dari $(G,\ \oplus)$

Sesuai isi soal, didefinisikan himpunan H sebagai berikut.

$$H \ = \ \{a \in G \mid a^k = e_G\}$$

Sekedar informasi, yang dimaksud dengan notasi $(e_G)^k$ adalah seperti di bawah ini.

$$(e_G)^k = \underbrace{e_G \oplus e_G \oplus e_G \oplus ... \oplus e_G}_{\text{sebanyak } k \text{ kali}}$$

Kita akan menunjukkan bahwa H adalah subgrup dari $(G,\ \oplus)$ dengan langkah-langkah sebagai berikut.

•• Langkah-1: Menunjukkan bahwa H bukan himpunan kosong

Pertama-tama, kita harus menunjukkan dulu bahwa himpunan H **tidak kosong!**

Ingat, karena e_G, adalah elemen identitas di $(G,\ \oplus)$, maka untuk setiap $x \in G$ akan berlaku $e_G \oplus x = x \oplus e_G = x$. Selanjutnya, perhatikan sifat umum grup berikut.

> **Sifat Umum Grup**
>
> Diketahui grup $(G,\ \oplus)$ dan e_G, adalah elemen identitasnya. Untuk setiap bilangan asli k, akan berlaku $(e_G)^k = e_G$.

Nah, berdasarkan sifat umum di atas, kita bisa menyatakan bahwa $e_G \in H$. Dengan demikian, kita dapat menyatakan bahwa H bukan himpunan kosong, sebab paling tidak e_G termuat di H.

●● Langkah-2: Menggunakan teorema subgrup

Selanjutnya, kita akan menunjukkan bahwa $(H, \oplus)$ adalah subgrup dari $(G, \oplus)$ dengan membuktikan kebenaran teorema subgrup berikut.

> **Teorema Subgrup**
>
> Diketahui grup $(G, \oplus)$ dan H adalah himpunan bagian tidak kosong dari himpunan G.
>
> Grup $(H, \oplus)$ adalah subgrup dari $(G, \oplus)$ jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in H$ berlaku $x \oplus y^{-1} \in H$.

Oke! Kita ambil sebarang elemen $x, y \in H$. Karena $x, y \in H$, maka berdasarkan syarat keanggotaan himpunan H akan terdapat suatu bilangan asli k_1 dan k_2 sedemikian sehingga berlaku $x^{k_1} = y^{k_2} = e_G$.

Ingat bahwa: $(x)^{k_1} = \underbrace{x \oplus x \oplus x \oplus \ldots \oplus x}_{\text{sebanyak } k_1 \text{ kali}}$ dan $(y)^{k_2} = \underbrace{y \oplus y \oplus y \oplus \ldots \oplus y}_{\text{sebanyak } k_2 \text{ kali}}$

Perhatikan! Karena y adalah elemen dari himpunan H dan H adalah himpunan bagian dari G, maka y adalah elemen dari grup $(G, \oplus)$. Dengan demikian, elemen y memiliki invers terhadap operasi biner $\oplus$, yaitu y^{-1}, sedemikian sehingga berlaku: $y \oplus y^{-1} = y^{-1} \oplus y = e_G$. Ingat! Elemen y^{-1} ini juga elemen di G.

Selanjutnya, dengan menggunakan sifat asosiatif di grup G, perhatikan bahwa:

$$(y \oplus y) \oplus (y^{-1} \oplus y^{-1}) \;=\; y \oplus (y \oplus y^{-1}) \oplus y^{-1} \;=\; y \oplus e_G \oplus y^{-1} \;=\; y \oplus y^{-1} \;=\; e_G$$

demikian pula:

$$(y^{-1} \oplus y^{-1}) \oplus (y \oplus y) \;=\; y^{-1} \oplus (y^{-1} \oplus y) \oplus y \;=\; y^{-1} \oplus e_G \oplus y \;=\; y^{-1} \oplus y \;=\; e_G.$$

Nah, berdasarkan analogi di atas, kita bisa menarik kesimpulan bahwa:

$$\Bigg(\underbrace{y \oplus y \oplus \ldots \oplus y}_{\text{sebanyak } k_2 \text{ kali}}\Bigg) \oplus \Bigg(\underbrace{y^{-1} \oplus y^{-1} \oplus \ldots \oplus y^{-1}}_{\text{sebanyak } k_2 \text{ kali}}\Bigg) = \Bigg(\underbrace{y^{-1} \oplus y^{-1} \oplus \ldots \oplus y^{-1}}_{\text{sebanyak } k_2 \text{ kali}}\Bigg) \oplus \Bigg(\underbrace{y \oplus y \oplus \ldots \oplus y}_{\text{sebanyak } k_2 \text{ kali}}\Bigg) = e_G$$

Dengan demikian kita bisa menyimpulkan bahwa invers dari elemen y^{k_2} adalah $(y^{-1})^{k_2}$.

Selanjutnya, ingat bahwa di awal tadi, karena $x, y \in H$, maka berdasarkan syarat keanggotaan himpunan H akan terdapat suatu bilangan asli k_1 dan k_2 sedemikian sehingga berlaku $x^{k_1} = y^{k_2} = e_G$.

Nah, jika kita bentuk bilangan asli k_3 sebagai hasil perkalian k_1 dengan k_2 (dengan kata lain, $k_3 = k_1 \cdot k_2$), maka akan berlaku pula $x^{k_3} = y^{k_3} = e_G$ karena:

$$x^{k_3} = x^{k_1 \cdot k_2} = (x^{k_1})^{k_2} = (e_G)^{k_2} = e_G \text{ dan } y^{k_3} = y^{k_1 \cdot k_2} = y^{k_2 \cdot k_1} = (y^{k_2})^{k_1} = (e_G)^{k_1} = e_G.$$

Nah, kira-kira, jika kita bentuk $(x \oplus y^{-1})^{k_3}$ akan menghasilkan apa ya?

Ingat bahwa $(x \oplus y^{-1})^{k_3} = \underbrace{(x \oplus y^{-1}) \oplus (x \oplus y^{-1}) \oplus (x \oplus y^{-1}) \oplus ... \oplus (x \oplus y^{-1})}_{\text{sebanyak } k_3 \text{ kali}}$

Nah, karena $(G, \oplus)$ adalah grup komutatif, maka untuk sebarang $g_1, g_2 \in G$ akan berlaku $g_1 \oplus g_2 = g_2 \oplus g_1$. Dengan demikian, kita dapat "mengatur posisi" elemen x dan y^{-1} pada persamaan di atas sedemikian sehingga akan menghasilkan persamaan berikut.

$$\begin{aligned}
(x \oplus y^{-1})^{k_3} &= \underbrace{(x \oplus y^{-1}) \oplus (x \oplus y^{-1}) \oplus ... \oplus (x \oplus y^{-1})}_{\text{sebanyak } k_3 \text{ kali}} \\
&= \left(\underbrace{x \oplus x \oplus ... \oplus x}_{\text{sebanyak } k_3 \text{ kali}} \right) \oplus \left(\underbrace{y^{-1} \oplus y^{-1} \oplus ... \oplus y^{-1}}_{\text{sebanyak } k_3 \text{ kali}} \right)
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
\underbrace{x \oplus x \oplus ... \oplus x}_{\text{sebanyak } k_3 \text{ kali}} &= \underbrace{x \oplus x \oplus ... \oplus x}_{\text{sebanyak } k_1 \cdot k_2 \text{ kali}} \\
&= \underbrace{\left(\underbrace{x \oplus ... \oplus x}_{\text{sebanyak } k_1 \text{ kali}} \right) \oplus ... \oplus \left(\underbrace{x \oplus ... \oplus x}_{\text{sebanyak } k_1 \text{ kali}} \right)}_{\text{sebanyak } k_2 \text{ kali}} \\
&= \underbrace{e_G \oplus ... \oplus e_G}_{\text{sebanyak } k_2 \text{ kali}} \\
&= e_G
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\underbrace{y^{-1} \oplus y^{-1} \oplus \ldots \oplus y^{-1}}_{\text{sebanyak } k_3 \text{ kali}} &= \underbrace{y^{-1} \oplus y^{-1} \oplus \ldots \oplus y^{-1}}_{\text{sebanyak } k_2 \cdot k_1 \text{ kali}} \\
&= \underbrace{\left(\underbrace{y^{-1} \oplus \ldots \oplus y^{-1}}_{\text{sebanyak } k_2 \text{ kali}}\right) \oplus \ldots \oplus \left(\underbrace{y^{-1} \oplus \ldots \oplus y^{-1}}_{\text{sebanyak } k_2 \text{ kali}}\right)}_{\text{sebanyak } k_1 \text{ kali}} \\
&= \underbrace{e_G \oplus \ldots \oplus e_G}_{\text{sebanyak } k_1 \text{ kali}} \\
&= e_G
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, terlihat bahwa $\underbrace{x \oplus x \oplus \ldots \oplus x}_{\text{sebanyak } k_3 \text{ kali}} = \underbrace{y^{-1} \oplus y^{-1} \oplus \ldots \oplus y^{-1}}_{\text{sebanyak } k_3 \text{ kali}} = e_G$.

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
(x \oplus y^{-1})^{k_3} &= \underbrace{(x \oplus y^{-1}) \oplus (x \oplus y^{-1}) \oplus \ldots \oplus (x \oplus y^{-1})}_{\text{sebanyak } k_3 \text{ kali}} \\
&= \left(\underbrace{x \oplus x \oplus \ldots \oplus x}_{\text{sebanyak } k_3 \text{ kali}}\right) \oplus \left(\underbrace{y^{-1} \oplus y^{-1} \oplus \ldots \oplus y^{-1}}_{\text{sebanyak } k_3 \text{ kali}}\right) \\
&= e_G \ \oplus \ e_G \\
&= e_G.
\end{aligned}$$

Dengan kata lain, berdasarkan syarat keanggotaan himpunan H kita dapat menyatakan bahwa $x \oplus y^{-1} \in H$. Ingat! Di awal tadi kita memilih elemen x dan y sebagai sebarang elemen di himpunan H.

Jadi, berdasarkan **Teorema Subgrup** di atas, kita bisa menyimpulkan bahwa $(H, \oplus)$ adalah subgrup dari $(G, \oplus)$.

• Menunjukkan bahwa K adalah subgrup dari G

Sesuai isi soal, didefinisikan himpunan K sebagai berikut (untuk suatu bilangan asli k).

$$K = \{a^k \in G \mid a \in G\}$$

Sekedar informasi, yang dimaksud dengan notasi a^k adalah seperti di bawah ini.

$$a^k = \underbrace{a \oplus a \oplus a \oplus \ldots \oplus a}_{\text{sebanyak } k \text{ kali}}$$

Sebelum mulai pembuktian, kita perjelas dulu himpunan K ini ya! Siapa tahu, ada Pembaca yang berbeda pandangan mengenai definisi himpunan K ini.

Perhatikan bahwa bilangan asli itu (disimbolkan $\mathbb{N}$) adalah himpunan $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\}$. Dengan demikian, untuk sebarang elemen $a \in G$, himpunan K tidak memuat semacam a^0, a^{-1}, a^{-2}, dst.

Kemudian, kita sudah diberikan suatu bilangan asli k sejak awal. Sebagai contoh, jika $k = 2$, maka elemen-elemen di dalam himpunan K dapat dinyatakan sebagai a^2 untuk suatu $a \in G$.

Sebetulnya, supaya tidak ambigu, seharusnya himpunan K itu dinotasikan sebagai $K_{(k)}$. Dengan demikian, kita akan bisa mendefinisikan tanpa ambigu himpunan-himpunan $K_{(1)}$, $K_{(2)}$, $K_{(3)}$, $K_{(4)}$, $K_{(5)}$, dst sebagai:

$$\begin{aligned} K_{(1)} &= \{a^1 \in G \mid a \in G\} \\ K_{(2)} &= \{a^2 \in G \mid a \in G\} \\ K_{(3)} &= \{a^3 \in G \mid a \in G\} \\ &\text{dst.} \end{aligned}$$

Nah, maka dari itu, selanjutnya aku akan mengganti notasi himpunan K dengan $K_{(k)}$, semata-mata untuk menghindari hal yang ambigu. Oke?

•• Langkah-1: Menunjukkan bahwa $K_{(k)}$ bukan himpunan kosong

Pertama-tama, kita harus menunjukkan dulu bahwa himpunan $K_{(k)}$ **tidak kosong!**

Perhatikan! Kita tahu bahwa e_G adalah elemen identitas untuk grup $(G, \oplus)$. Selain itu, perhatikan juga bahwa $(e_G)^k = e_G$ untuk sebarang bilangan asli k. Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa elemen e_G akan selalu termuat di sebarang himpunan $K_{(k)}$, yang berarti $K_{(k)}$ bukan himpunan kosong.

•• Langkah-2: Menggunakan teorema subgrup

Selanjutnya, kita akan menunjukkan bahwa $(K_{(k)},\ \oplus)$ adalah subgrup dari $(G,\ \oplus)$ dengan membuktikan kebenaran teorema subgrup berikut.

Teorema Subgrup

Diketahui grup $(G,\ \oplus)$ dan $K_{(k)}$ adalah himpunan bagian tidak kosong dari himpunan G.

Grup $(K_{(k)},\ \oplus)$ adalah subgrup dari $(G,\ \oplus)$ jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in K_{(k)}$ berlaku $x \oplus y^{-1} \in K_{(k)}$.

Oke! Kita ambil sebarang elemen $x, y \in K_{(k)}$. Karena $x, y \in K_{(k)}$, maka berdasarkan syarat keanggotaan himpunan $K_{(k)}$, kita bisa menyatakan x dan y sebagai $x = a_1^k$ dan $y = a_2^k$ untuk suatu $a_1, a_2 \in G$ dan bilangan asli k.

Nah, karena $a_1, a_2 \in G$ dan $(G,\ \oplus)$ adalah grup, maka elemen a_1 dan a_2 memiliki invers. Sebut saja a_1^{-1} adalah invers untuk elemen a_1 dan a_2^{-1} adalah invers untuk elemen a_2, sedemikian sehingga berlaku persamaan berikut.

$$a_1^{-1} \oplus a_1 = a_1 \oplus a_1^{-1} = e_G = a_2^{-1} \oplus a_2 = a_2 \oplus a_2^{-1}$$

Ingat! Elemen a_1^{-1} dan a_2^{-1} ini juga merupakan elemen-elemen di dalam grup $(G,\ \oplus)$. Dengan demikian, himpunan $K_{(k)}$ akan memuat elemen $(a_1^{-1})^k$ dan juga $(a_2^{-1})^k$.

Sebagaimana yang sudah disinggung saat kita **menunjukkan bahwa H adalah subgrup dari** $(G,\ \oplus)$, invers dari elemen a_2^k adalah $(a_2^{-1})^k$. Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa $y^{-1} = (a_2^{-1})^k$.

Nah! Pertanyannya, *"Apakah berlaku $x \oplus y^{-1} \in K_{(k)}$?"*

Ayo kita selidiki melalui penjabaran berikut.

$$\begin{aligned}
x \oplus y^{-1} &= (a_1)^k \oplus (a_2^{-1})^k \\
&= \left(\underbrace{a_1 \oplus a_1 \oplus \ldots \oplus a_1}_{\text{sebanyak } k \text{ kali}}\right) \oplus \left(\underbrace{a_2^{-1} \oplus a_2^{-1} \oplus \ldots \oplus a_2^{-1}}_{\text{sebanyak } k \text{ kali}}\right) \\
&= \underbrace{(a_1 \oplus a_2^{-1}) \ \oplus \ (a_1 \oplus a_2^{-1}) \ \oplus \ \ldots \ \oplus \ (a_1 \oplus a_2^{-1})}_{\text{sebanyak } k \text{ kali}} \\
&= (a_1 \oplus a_2^{-1})^k
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita memperoleh persamaan $x \oplus y^{-1} = (a_1 \oplus a_2^{-1})^k$. Karena a_1 dan a_2^{-1} adalah elemen-elemen grup $(G, \oplus)$, maka akan berlaku $a_1 \oplus a_2^{-1} \in G$. Oleh sebab itu, berdasarkan syarat keanggotaan himpunan $K_{(k)}$ akan berlaku $(a_1 \oplus a_2^{-1})^k \in K_{(k)}$ atau dengan kata lain $x \oplus y^{-1} \in K_{(k)}$.

Jadi, berdasarkan **Teorema Subgrup** di atas, kita bisa menyimpulkan bahwa $(K_{(k)},\ \oplus)$ adalah subgrup dari $(G,\ \oplus)$.

■

6

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 4

Soal

Diberikan grup G yang memuat subgrup H dengan order 28 dan subgrup K dengan order 65. Tunjukkan bahwa $H \cap K = \{e_G\}$!

Dikerjakan

Soal ini terlihat mudah, padahal sebetulnya agak *tricky*.

- Diketahui H adalah subgrup dari G dan order dari H adalah 28.
  Dengan demikian, subgrup H memuat 28 elemen.
  Dengan demikian pula, untuk sebarang elemen $h \in H$ akan berlaku $h^{28} = e_G$.
  Dengan demikian pula, jika $n \neq 28$ adalah bilangan bulat positif dan terdapat elemen $h' \in H$ sedemikian sehingga $(h')^n = e_G$, maka n pasti adalah faktor dari 28 (n membagi habis 28).
  Sebagaimana yang kita tahu, semua bilangan bulat positif yang membagi habis 28 adalah: $1, 2, 4, 7, 14$, dan 28. Dalam hal ini, n adalah salah satu dari $1, 2, 4, 7$, atau 14. Ya nggak?

- Diketahui K adalah subgrup dari G dan order dari K adalah 65.
  Dengan demikian, subgrup K memuat 65 elemen.
  Dengan demikian pula, untuk sebarang elemen $k \in K$ akan berlaku $k^{65} = e_G$.
  Dengan demikian pula, jika $m \neq 65$ adalah bilangan bulat positif dan terdapat elemen $k' \in K$ sedemikian sehingga $(k')^m = e_G$, maka m pasti adalah faktor dari 65 (m membagi habis 65).

Sebagaimana yang kita tahu, semua bilangan bulat positif yang membagi habis 65 adalah: $1, 5, 13$, dan 65. Dalam hal ini, m adalah salah satu dari $1, 5$, atau 13. Ya nggak?

Oke! Selanjutnya, kita bentuk irisan subgrup H dan K, yaitu $H \cap K$.

Ingat! Karena subgrup H dan K memuat elemen identitas (dan elemen identitas keduanya adalah sama sebagaimana elemen identitas di G, yaitu e_G), maka $H \cap K$ pasti tidak kosong karena $H \cap K$ paling tidak memuat elemen e_G.

Nah, andaikan terdapat elemen $x \in H \cap K$ dengan $x \neq e_G$.

Karena $x \in H \cap K$, maka jelas akan berlaku $x \in H$ dan $x \in K$. Ya toh?

Nah, misalkan nih ya, terdapat bilangan bulat positif r dengan $r \neq 28$ dan $r \neq 65$ sedemikian sehingga berlaku $x^r = e_G$.

Karena $x \in H$, maka akan berlaku $x^{28} = e_G$. Oleh sebab itu, r pasti membagi habis 28.
Karena $x \in K$, maka akan berlaku $x^{65} = e_G$. Oleh sebab itu, r pasti membagi habis 65.

Ingat bahwa bilangan bulat positif yang < 28 dan membagi habis 28 adalah $1, 2, 4, 7$, dan 14. Kita himpun semua bilangan ini ke himpunan $\{1, 2, 4, 7, 14\}$.
Ingat juga bahwa bilangan bulat positif yang < 65 dan membagi habis 65 adalah $1, 5$, dan 13. Kita himpun semua bilangan ini ke himpunan $\{1, 5, 13\}$

Nah, dari himpunan $\{1, 2, 4, 7, 14\}$ dan $\{1, 5, 13\}$ di atas, hanya bilangan 1 yang termuat di dalam kedua himpunan tersebut. Dengan demikian, bilangan bulat positif r yang < 28 dan yang < 65 dan juga membagi habis 28 dan 65 hanyalah bilangan 1. Jadi, $r = 1$.

Karena $r = 1$, maka $x^r = e_G$ akan menjadi $x = e_G$. Dengan demikian pengandaian kita salah, yaitu tidak benar bahwa himpunan $H \cap K$ memuat elemen lain selain e_G.

Jadi, yang benar adalah $H \cap K = \{e_G\}$.

■

7

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 1

Soal

Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3\}$.

Diketahui

$$S_3 = \Big\{ f : A \to A \;\mid\; f = \text{ pemetaan bijektif} \Big\}$$

merupakan grup terhadap operasi komposisi fungsi.

Diketahui juga bahwa himpunan $\mathbb{Z}_5^* = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}_5 \mid \bar{x} \neq \bar{0}\}$ merupakan grup terhadap operasi perkalian modulo di $\mathbb{Z}_5$.

Jika dibentuk pengaitan

$$\psi : S_3 \to \mathbb{Z}_5^*$$

dengan definisi

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\alpha(1)}$$

untuk setiap $\alpha \in S_3$, selidiki apakah pengaitan ψ merupakan homomorfisma grup atau bukan! Jelaskan jawaban Saudara!

Dikerjakan

Ayo kita kerjakan dengan langkah demi langkah supaya lebih mudah dimengerti.

- **Langkah-1**

Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3\}$. Himpunan A ini disebut sebagai himpunan objek.

Sebetulnya, supaya tidak membingungkan, "seharusnya" himpunan objek A ini dinyatakan sebagai $A = \{O_1, O_2, O_3\}$. Dengan demikian, terlihat jelas bahwa himpunan A memuat tiga objek, yaitu O_1, O_2, O_3.

Nah, jika himpunan objek A didefinisikan sebagai $A = \{1, 2, 3\}$, nanti malah rawan membingungkan. Apakah 1,2, dan 3 itu dipandang sebagai objek ataukah sebagai angka. Ya toh?

Selanjutnya, ingat bahwa permutasi adalah suatu pemetaan/fungsi bijektif dari himpunan objek A ke himpunan A itu sendiri. Untuk mempersingkat istilah, kita menyebut permutasi sebagai pemetaan bijektif dari-ke A.

Definisi Permutasi

Diketahui himpunan objek X.

τ adalah permutasi atas X jika dan hanya jika τ adalah pemetaan bijektif dari-ke X.

Jadi, ingat! Permutasi itu adalah pemetaan/fungsi bijektif. Dengan demikian, jika τ_1 dan τ_2 adalah sebarang permutasi atas A, maka kita bisa melakukan komposisi pemetaan, $\tau_1 \circ \tau_2$ ataupun $\tau_2 \circ \tau_1$.

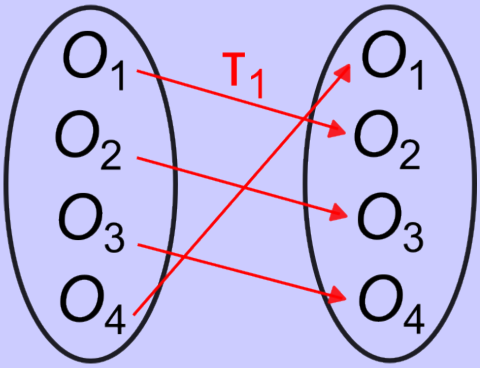
Contoh-1

Misalkan diketahui himpunan objek $X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ O_4\}$.

Nah, salah satu contoh permutasi atas X adalah τ_1 dengan definisi sebagai berikut.

$$\tau_1(O_1) = O_2,\ \tau_1(O_2) = O_3,\ \tau_1(O_3) = O_4,\ \tau_1(O_4) = O_1$$

Permutasi τ_1 bisa divisualisasikan sebagai ini.



Permutasi τ_1 juga bisa dinyatakan dalam notasi matriks seperti ini.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} O_1 & O_2 & O_3 & O_4 \\ O_2 & O_3 & O_4 & O_1 \end{pmatrix}$$

Notasi matriks untuk permutasi τ_1 di atas seringnya diringkas menjadi seperti ini.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Contoh-2

Misalkan diketahui himpunan objek $X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ O_4\}$.

Misalkan juga diketahui permutasi τ_1 dan τ_2 atas X dengan definisi sebagai berikut.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian kita akan punya definisi pemetaan sebagai berikut.

- $\tau_1(O_1) = O_2,\ \tau_1(O_2) = O_3,\ \tau_1(O_3) = O_4,\ \tau_1(O_4) = O_1$
- $\tau_2(O_1) = O_4,\ \tau_2(O_2) = O_1,\ \tau_2(O_3) = O_2,\ \tau_2(O_4) = O_3$

Dengan demikian hasil dari permutasi $\tau_1 \circ \tau_2$ atas X adalah sebagai berikut.

$$\begin{array}{rcrcrcl} (\tau_1 \circ \tau_2)(O_1) & = & \tau_1(\tau_2(O_1)) & = & \tau_1(O_4) & = & O_1 \\ (\tau_1 \circ \tau_2)(O_2) & = & \tau_1(\tau_2(O_2)) & = & \tau_1(O_1) & = & O_2 \\ (\tau_1 \circ \tau_2)(O_3) & = & \tau_1(\tau_2(O_3)) & = & \tau_1(O_2) & = & O_3 \\ (\tau_1 \circ \tau_2)(O_4) & = & \tau_1(\tau_2(O_4)) & = & \tau_1(O_3) & = & O_4 \end{array}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, permutasi $\tau_1 \circ \tau_2$ bisa dinyatakan dalam notasi matriks seperti ini.

$$\tau_1 \circ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Definisi Permutasi Identitas

Diketahui bilangan asli n dan himpunan objek $X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ ...\ O_n\}$.

Permutasi identitas τ_0 atas X didefinisikan sebagai:

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & (n-1) & n \\ 1 & 2 & 3 & ... & (n-1) & n \end{pmatrix}$$

- **Langkah-2**

Selanjutnya, diketahui himpunan:

$$S_3 = \Big\{ f : A \rightarrow A \ \mid \ f = \text{ pemetaan bijektif} \Big\}$$

Definisi Himpunan Semua Permutasi atas X

Diketahui himpunan objek X.

Himpunan semua permutasi atas X dinotasikan sebagai S_X dengan definisi sebagai berikut.

$$S_X \ = \ \{\tau \ : \ \tau \text{ adalah permutasi atas } X\}$$

Jika banyaknya anggota himpunan X diketahui, yaitu diketahui akan adanya suatu bilangan asli n sedemikian sehingga $X = \{O_1, \ O_2, \ O_3, \ \ldots \ O_n\}$, maka himpunan S_X akan lebih sering disebut sebagai S_n.

Sebagai contoh, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$, akan tetapi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \notin S_4$

Berdasarkan syarat keanggotaan himpunan S_3, jelas sekali bahwa himpunan ini adalah **himpunan semua permutasi atas** A!

Karena himpunan objek $A = \{O_1, O_2, O_3\}$ memiliki 3 elemen, maka jumlah semua permutasi atas A adalah sebanyak $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ permutasi.

Apa saja 6 permutasi itu? Nih!

$$S_3 = \{\sigma_1, \ \sigma_2, \ \sigma_3, \ \sigma_4, \ \sigma_5, \ \sigma_6\} \text{ dengan:}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Seperti yang diketahui, $(S_3, \circ)$ adalah grup dengan $\circ$ sebagai notasi operasi komposisi fungsi.

- **Langkah-3**

Oke! Selanjutnya, diketahui juga bahwa himpunan $\mathbb{Z}_5^* = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}_5 \mid \bar{x} \neq \bar{0}\}$ merupakan grup terhadap operasi perkalian modulo di $\mathbb{Z}_5$.

Ayo, kita jabarkan elemen di $\mathbb{Z}_5^*$ supaya tidak bingung! Karena $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3},\ \bar{4}\}$, maka $\mathbb{Z}_5^* = \{\bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3},\ \bar{4}\}$.

Seperti yang diketahui, $(\mathbb{Z}_5^*, \otimes)$ adalah grup dengan $\otimes$ sebagai notasi operasi perkalian modulo di $\mathbb{Z}_5$. Sebagai contoh, $\bar{3} \otimes \bar{4} = \bar{2}$, karena $\bar{3} \otimes \bar{4} = \bar{12}$ dan $12 \bmod 5 = 2$.

- **Langkah-4**

Selanjutnya, ayo kita bahas pengaitan $\psi : S_3 \to \mathbb{Z}_5^*$!

Diketahui pengaitan $\psi : S_3 \to \mathbb{Z}_5^*$ dengan definisi:

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\alpha(1)}.$$

Definisi pengaitan ψ ini mungkin sedikit membingungkan 😀. Akan tetapi, karena namanya pengaitan, jadi kita dapat membuat pasangan $\left(\sigma_i, \bar{j}\right)$ dengan $\sigma_i \in S_3$ dan $\bar{j} \in \mathbb{Z}_5^*$ yang memenuhi $\bar{j} = \overline{\sigma_i(1)}$.

Yah, supaya tidak bikin bingung, ayo kita beri contoh! Kita ambil $\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Dengan demikian, akan diperoleh persamaan $\sigma_6(1) = 2$. Akibatnya, $\overline{\sigma_6(1)} = \bar{2} \in \mathbb{Z}_5^*$.

Dengan cara yang serupa, kita akan mendapatkan persamaan-persamaan berikut.

$$\psi(\sigma_1) = \bar{1}$$

$$\psi(\sigma_2) = \bar{2}$$

$$\psi(\sigma_3) = \bar{3}$$

$$\psi(\sigma_4) = \bar{1}$$

$$\psi(\sigma_5) = \bar{3}$$

$$\psi(\sigma_6) = \bar{2}$$

- **Langkah-5**

Hmmm....

Dari akhir **Langkah-2** sudah "tercium bau busuk" nih.

Perhatikan! Tidak ada satu pun elemen di S_3 yang dipetakan ke elemen $\bar{4}$ di $\mathbb{Z}^*$!
Nah! Ini nih "bau busuk"-nya!

Menggunakan "bau busuk" ini, kita bisa menunjukkan bahwa ψ **bukan homomorfisma**.

Bagaimana caranya?

Kita pilih $\sigma_2, \sigma_5 \in S_3$ sebagaimana yang didefinisikan di **Langkah-3**. Jika kita komposisikan σ_2 dengan σ_5 akan diperoleh persamaan berikut.

$$\sigma_2 \circ \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \sigma_6$$

Karena $\sigma_2 \circ \sigma_5 = \sigma_6$, maka kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$\psi(\sigma_2 \circ \sigma_5) = \psi(\sigma_6) = \bar{2}$$

Akan tetapi,

$$\psi(\sigma_2) \otimes \psi(\sigma_5) = \bar{2} \otimes \bar{3} = \bar{1}$$

Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa berlaku pertidaksamaan $\psi(\sigma_i \circ \sigma_j) \neq \psi(\sigma_i) \otimes \psi(\sigma_j)$.

Padahal jika ψ adalah homomorfisma, maka untuk sebarang $\sigma_i, \sigma_j \in S_3$ haruslah berlaku persamaan $\psi(\sigma_i \circ \sigma_j) = \psi(\sigma_i) \otimes \psi(\sigma_j)$.

- **Kesimpulan**

Karena terdapat $\sigma_2, \sigma_5 \in S_3$ sedemikian sehingga berlaku $\psi(\sigma_2 \circ \sigma_5) \neq \psi(\sigma_2) \otimes \psi(\sigma_5)$, maka kita bisa menyatakan bahwa ψ bukan homomorfisma.

■

8

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 2

Soal

Suppose $V_4 = \{e, a, b, ab\}$ is a group with the following multiplication table.

$\star$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

Investigate whether $V_4 \cong \mathbb{Z}_4$ or not!

Dikerjakan

Berikut ini adalah tabel multiplikasi untuk $Z_4 = \{\bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3}\}$. Ingat bahwa Z_4 adalah grup terhadap operasi penjumlahan modulo 4 (kita notasikan $+$). Dengan demikian, multiplikasi yang dimaksud untuk Z_4 adalah operasi penjumlahan modulo 4.

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Sepintas tabel multiplikasi V_4 dan Z_4 memiliki ukuran yang sama. Akan tetapi, karena kita ingin menyelidiki apakah berlaku $V_4 \cong Z_4$, maka kita bisa menggunakan langkah-langkah berikut.

- **Langkah-1**

Kita akan **mengandaikan** bahwa benar berlaku $V_4 \cong Z_4$. Dengan demikian, akan terdapat homomorfisma bijektif $\phi : V_4 \to Z_4$.

- **Langkah-2**

Berdasarkan tabel multiplikasi di atas, kita tahu bahwa e adalah elemen identitas di grup V_4 dan $\bar{0}$ adalah elemen identitas di grup Z_4.

Karena ϕ adalah homomorfisma, maka berdasarkan sifat homomorfisma akan berlaku $\phi(e) = \bar{0}$. Oleh sebab itu, kita akan warnai *cell* pada tabel yang memuat elemen e dan $\bar{0}$ dengan warna yang sama, yaitu kuning.

$\star$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Berdasarkan *cell-cell* kuning pada dua tabel di atas, terlihat bahwa letak *cell-cell* kuning tersebut tidak sama, yaitu *cell-cell* kuning yang berada di daerah kanan bawah.

Kita akan menyelidiki *cell-cell* kuning tersebut pada langkah selanjutnya.

- **Langkah-3**

Perhatikan *cell-cell* kuning yang berada di daerah kanan bawah pada dua tabel di atas!

Pada tabel multiplikasi V_4 kita mendapatkan persamaan:

- $a \star a = e$,
- $b \star b = e$, dan
- $ab \star ab = e$,

sedangkan pada tabel multiplikasi Z_4 kita mendapatkan persamaan:

- $\bar{1} + \bar{3} = \bar{0}$,
- $\bar{2} + \bar{2} = \bar{0}$, dan
- $\bar{3} + \bar{1} = \bar{0}$.

- **Langkah-4**

Karena ϕ adalah homomorfisma, maka untuk setiap $x, y \in V_4$ akan berlaku $\phi(x \star y) = \phi(x) + \phi(y)$.

Pada tabel multiplikasi V_4 kita mendapatkan persamaan $a \star a = e$. Dengan demikian, akan berlaku persamaan:

$$\begin{aligned} a \star a = e &\iff \phi(a \star a) = \phi(e) \\ &\iff \phi(a) + \phi(a) = \bar{0} \\ &\iff \phi(a)^2 = \bar{0} \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, untuk persamaan $a \star a = e$, kita akan mendapatkan persamaan:

$$\phi(a)^2 = \bar{0}.$$

Dengan penjabaran yang serupa, untuk persamaan $b \star b = e$ dan $ab \star ab = e$, kita akan mendapatkan persamaan:

$$\phi(b)^2 = \bar{0} \quad \text{dan} \quad \phi(ab)^2 = \bar{0}$$

Nah ini!

Pada tabel multiplikasi Z_4, satu-satunya $g \in Z_4$ sedemikian sehingga $g^2 = \bar{0}$ hanyalah $g = \bar{2}$.

Karena pada soal didefinisikan $V_4 = \{e,\ a,\ b,\ ab\}$, maka jelas bahwa $a \neq b \neq ab$. Akan tetapi, $\phi(a)^2 = \phi(b)^2 = \phi(ab)^2$.

Karena ϕ adalah homomorfisma bijektif, maka:

- Berdasarkan persamaan $\phi(a)^2 = \bar{0}$, akan diperoleh $\phi(a) = \bar{2}$.
- Berdasarkan persamaan $\phi(b)^2 = \bar{0}$, akan diperoleh $\phi(b) = \bar{2}$.
- Berdasarkan persamaan $\phi(ab)^2 = \bar{0}$, akan diperoleh $\phi(ab) = \bar{2}$.

Berdasarkan penjabaran di atas, diperoleh persamaan $\phi(a) = \phi(b) = \phi(ab) = \bar{2}$ sedangkan $a \neq b \neq ab$.

...

KONTRADIKSI! INI JELAS TIDAK MUNGKIN BISA TERJADI!

Kenapa? Karena ϕ adalah homomorfisma bijektif, seharusnya jika $a \neq b \neq ab$, maka akan berlaku $\phi(a) \neq \phi(b) \neq \phi(ab)$.

- **Kesimpulan**

Karena pada **Langkah-4** muncul **kontradiksi**, maka **pengandaian** bahwa benar berlaku $V_4 \cong Z_4$ adalah **salah besar**!

Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa **sama sekali tidak ada homomorfisma bijektif** dari V_4 ke Z_4 (dan juga sebaliknya).

Jadi, kita bisa menyimpulkan bahwa $V_4 \ncong Z_4$.

■

9

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 3

Soal

Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Diketahui

$$S_6 = \{f : A \to A \ \mid \ f \text{ pemetaan bijektif}\}$$

merupakan grup terhadap operasi komposisi fungsi.

Jika $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, maka:

(a) Sajikan f sebagai perkalian dari sikel-sikel saling asing!

(b) Sajikan f sebagai perkalian dari transposisi-transposisi!

(c) Tentukan order dari f!

(d) Tentukan $f^{2.022}$ dimana $f^{2.022} = f \circ f \circ f \circ ... \circ f \circ f$(sebanyak 2.022 kali)!

Dikerjakan

Ayo kita kerjakan dengan langkah demi langkah supaya lebih mudah dimengerti.

• Langkah-1

Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Himpunan A ini disebut sebagai himpunan objek.

Menurutku ya, "seharusnya" himpunan objek A ini dinyatakan sebagai $A = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$ supaya nggak bikin bingung! Dengan demikian, terlihat jelas bahwa himpunan A memuat enam objek, yaitu O_1 hingga O_6.

Nah, jika himpunan objek A didefinisikan sebagai $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, nanti malah bisa membuat bingung. Apakah 1,2,3,4,5,6 itu dipandang sebagai objek atau angka? Ya toh?

Jadi, pada pengerjaan ini, kita akan "mengganti" definisi himpunan A sebagai $A = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$.

Selanjutnya, ingat bahwa permutasi adalah suatu pemetaan/fungsi bijektif dari himpunan objek A ke himpunan A itu sendiri. Untuk mempersingkat istilah, kita menyebut permutasi sebagai pemetaan bijektif dari-ke A.

Definisi Permutasi

Diketahui himpunan objek X.

τ adalah permutasi atas X jika dan hanya jika τ adalah pemetaan bijektif dari-ke X.

Jadi, ingat! Permutasi itu adalah pemetaan/fungsi bijektif. Dengan demikian, jika τ_1 dan τ_2 adalah sebarang permutasi atas A, maka kita bisa melakukan komposisi pemetaan, $\tau_1 \circ \tau_2$ ataupun $\tau_2 \circ \tau_1$.

Eh iya! Operasi komposisi permutasi ini sering juga disebut sebagai operasi perkalian permutasi. Walaupun ya, menurutku, lebih cocok disebut sebagai komposisi karena permutasi kan pemetaan.

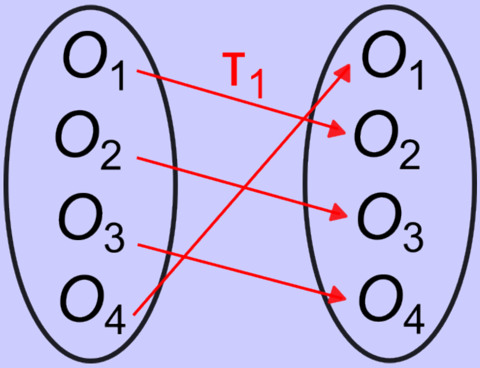
Contoh-1

Misalkan diketahui himpunan objek $X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ O_4\}$.

Nah, salah satu contoh permutasi atas X adalah τ_1 dengan definisi sebagai berikut.

$$\tau_1(O_1) = O_2,\ \tau_1(O_2) = O_3,\ \tau_1(O_3) = O_4,\ \tau_1(O_4) = O_1$$

Permutasi τ_1 bisa divisualisasikan sebagai ini.



Permutasi τ_1 juga bisa dinyatakan dalam notasi matriks seperti ini.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} O_1 & O_2 & O_3 & O_4 \\ O_2 & O_3 & O_4 & O_1 \end{pmatrix}$$

Notasi matriks untuk permutasi τ_1 di atas seringnya diringkas menjadi seperti ini.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Contoh-2

Misalkan diketahui himpunan objek $X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ O_4\}$.

Misalkan juga diketahui permutasi τ_1 dan τ_2 atas X dengan definisi sebagai berikut.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian kita akan punya definisi pemetaan sebagai berikut.

- $\tau_1(O_1) = O_2,\ \tau_1(O_2) = O_3,\ \tau_1(O_3) = O_4,\ \tau_1(O_4) = O_1$
- $\tau_2(O_1) = O_4,\ \tau_2(O_2) = O_1,\ \tau_2(O_3) = O_2,\ \tau_2(O_4) = O_3$

Dengan demikian hasil dari permutasi $\tau_1 \circ \tau_2$ atas X adalah sebagai berikut.

$$\begin{array}{rclclcl} (\tau_1 \circ \tau_2)(O_1) & = & \tau_1(\tau_2(O_1)) & = & \tau_1(O_4) & = & O_1 \\ (\tau_1 \circ \tau_2)(O_2) & = & \tau_1(\tau_2(O_2)) & = & \tau_1(O_1) & = & O_2 \\ (\tau_1 \circ \tau_2)(O_3) & = & \tau_1(\tau_2(O_3)) & = & \tau_1(O_2) & = & O_3 \\ (\tau_1 \circ \tau_2)(O_4) & = & \tau_1(\tau_2(O_4)) & = & \tau_1(O_3) & = & O_4 \end{array}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, permutasi $\tau_1 \circ \tau_2$ bisa dinyatakan dalam notasi matriks seperti ini.

$$\tau_1 \circ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Definisi Permutasi Identitas

Diketahui bilangan asli n dan himpunan objek $X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ ...\ O_n\}$.

Permutasi identitas τ_0 atas X didefinisikan sebagai:

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & (n-1) & n \\ 1 & 2 & 3 & ... & (n-1) & n \end{pmatrix}$$

• **Langkah-2**

Selanjutnya, diketahui himpunan:

$$S_6 = \Big\{ f : A \to A \ \mid \ f = \text{ pemetaan bijektif} \Big\}$$

Definisi Himpunan Semua Permutasi atas X

Diketahui himpunan objek X.

Himpunan semua permutasi atas X dinotasikan sebagai S_X dengan definisi sebagai berikut.

$$S_X \ = \ \{\tau \ : \ \tau \text{ adalah permutasi atas } X\}$$

Jika banyaknya anggota himpunan X diketahui, yaitu diketahui akan adanya suatu bilangan asli n sedemikian sehingga $X = \{O_1, \ O_2, \ O_3, \ ... \ O_n\}$, maka himpunan S_X akan lebih sering disebut sebagai S_n.

Sebagai contoh, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$, akan tetapi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \notin S_4$

Berdasarkan syarat keanggotaan himpunan S_6, jelas sekali bahwa himpunan ini adalah **himpunan semua permutasi atas A!**

Karena himpunan objek $A = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$ memiliki 6 elemen, maka jumlah semua permutasi atas A adalah sebanyak $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ permutasi.

Beberapa contoh permutasi yang termuat di S_6 adalah $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Seperti yang diketahui, $(S_6, \circ)$ adalah grup dengan $\circ$ sebagai notasi operasi komposisi fungsi.

- **Langkah-3**

Kemudian, setiap permutasi di S_6 memiliki **order**.

Definisi Order dari Suatu Permutasi

Diketahui grup semua permutasi $(S_n, \circ)$ dan permutasi $\tau \in S_n$.

Order dari permutasi τ adalah bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga berlaku $\tau^n = \tau_0$ dengan τ_0 adalah permutasi identitas di S_n.

Order dari suatu permutasi τ dinotasikan sebagai $o(\tau)$.

Karena kita sedang bekerja dengan grup permutasi $(S_6, \circ)$, maka definisi order dari suatu permutasi akan menjadi seperti ini.

Definisi Order dari Suatu Permutasi di S_6

Diketahui grup semua permutasi $(S_6, \circ)$ dan permutasi $\tau \in S_6$.

Order dari permutasi τ adalah bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga berlaku persamaan:

$$\tau^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Contoh-3

Diketahui grup semua permutasi $(S_6, \circ)$. Diketahui juga permutasi $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in S_6$.

Order dari permutasi ρ adalah 5, karena:

$$\rho^1 = \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rho^2 = \rho \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^3 = \rho^2 \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rho^4 = \rho^3 \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rho^5 = \rho^4 \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Langkah-4**

Sebagaimana yang sudah kita pelajari di mata kuliah **Pengantar Logika Matematika dan Himpunan**, jika kita mendefinisikan suatu **relasi ekuivalensi** pada suatu himpunan, maka kita akan mendapatkan **kelas-kelas ekuivalensi** yang akan mempartisi himpunan tersebut. Wujud dari kelas-kelas ekuivalensi ini tidak lain ya adalah himpunan.

Kemudian, perhatikan! Kita sekarang sedang bekerja dengan himpunan objek $A = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$. Himpunan A ini tidak lain adalah himpunan berhingga.

Dengan demikian, jika suatu relasi ekuivalensi didefinisikan pada himpunan objek A, maka jumlah kelas-kelas ekuivalensi yang akan terbentuk adalah berhingga.

Contoh-4

Katakanlah kita mendefinisikan suatu relasi ekuivalensi $\sim_1$ dan $\sim_2$ pada himpunan objek $A = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$.

Relasi ekuivalensi $\sim_1$ akan mempartisi himpunan objek A menjadi tiga kelas ekuivalensi; P_1, P_2, dan P_3, dengan:

$$P_1 = \{O_1, O_4\},\ P_2 = \{O_2, O_5\},\ \text{dan}\ P_3 = \{O_3, O_6\},$$

sementara relasi ekuivalensi $\sim_2$ akan mempartisi himpunan objek A menjadi dua kelas ekuivalensi; K_1 dan K_2, dengan:

$$K_1 = \{O_1, O_3, O_6\}\ \text{dan}\ K_2 = \{O_2, O_4, O_6\}.$$

Perhatikan! Untuk relasi ekuivalensi $\sim_1$, kelas-kelas ekuivalensi P_1, P_2, dan P_3 adalah himpunan-himpunan yang saling asing. Setiap objek pada himpunan objek A akan termuat di tepat salah satu kelas ekuivalensi P_i. Hasil dari $P_1 \cup P_2 \cup P_3$ tidak lain adalah himpunan objek A itu sendiri.

Sama seperti relasi ekuivalensi $\sim_1$, kelas-kelas ekuivalensi K_1 dan K_2 yang terbentuk oleh relasi ekuivalensi $\sim_2$ adalah himpunan-himpunan yang saling asing. Setiap objek pada himpunan objek A akan termuat di tepat salah satu kelas ekuivalensi K_i. Hasil dari $K_1 \cup K_2$ tidak lain adalah himpunan objek A itu sendiri.

Perhatikan! Kita dapat mendefinisikan **berbagai macam** relasi ekuivalensi pada suatu himpunan sedemikian sehingga kita akan mendapatkan berbagai macam kelas-kelas ekuivalensi yang berbeda-beda tergantung dari relasi ekuivalensi yang didefinisikan.

Nah! Dalam topik permutasi dikenal juga istilah **orbit**, yaitu **kelas ekuivalensi** antar objek terhadap suatu permutasi.

Definisi Orbit atas Suatu Permutasi

Diketahui himpunan objek $X = \{O_1, O_2, O_3, ..., O_n\}$. Diketahui juga grup semua permutasi $(S_n, \circ)$.

Jika kita memilih suatu permutasi $\tau \in S_n$, maka kita bisa membuat suatu relasi ekuivalensi $\sim_\tau$ yang didefinisikan sebagai:

$$O_a \sim_\tau O_b \quad \text{jika dan hanya jika} \quad O_a = \tau^n(O_b)\ \text{untuk suatu}\ n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{berlaku untuk setiap}\ O_a, O_b \in A.$$

Orbit adalah kelas-kelas ekuivalensi yang terbentuk dikarenakan relasi ekuivalensi $\sim_\tau$.

Contoh-5

Diketahui himpunan objek $A = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$. Diketahui juga grup semua permutasi $(S_6, \circ)$.

Jika kita memilih permutasi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut.

1. $O_1 \sim_\tau O_6$ karena $O_1 = \tau^1(O_6)$.
   Berdasarkan sifat simetris relasi ekuivalensi, akan berlaku juga $O_6 \sim_\tau O_1$.
2. $O_2 \sim_\tau O_2$ karena $O_2 = \tau^1(O_2)$.
3. $O_3 \sim_\tau O_5$ karena $O_3 = \tau^1(O_5)$.
   $O_5 \sim_\tau O_4$ karena $O_5 = \tau^1(O_4)$.
   Berdasarkan sifat transitif relasi ekuivalensi, akan berlaku juga $O_3 \sim_\tau O_4$.

Berdasarkan penjabaran di atas, relasi ekuivalensi $\sim_\tau$ akan mempartisi himpunan objek A menjadi 3 kelas ekuivalensi; P_1, P_2, dan P_3, dengan:

$$P_1 = \{O_1, O_6\},\ P_2 = \{O_2\}, \text{ dan } P_3 = \{O_3, O_4, O_5\}.$$

Orbit dari relasi ekuivalensi $\sim_\tau$ yang didefinisikan untuk himpunan objek A adalah P_1, P_2, dan P_3.

Dalam bentuk penulisan yang lain, biasanya orbit juga dinyatakan sebagai ini.

$$\text{Orbit dari permutasi } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_6 \text{ adalah } P_1,\ P_2, \text{ dan } P_3.$$

Selanjutnya, perhatikan!

Karena himpunan objek $A = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$ memuat 6 objek, maka suatu relasi ekuivalensi yang didefinisikan pada himpunan A akan menghasilkan **paling banyak** 6 orbit dan **paling sedikit** menghasilkan 1 orbit.

- **Langkah-5**

Sekarang kita akan mengerjakan subsoal poin (a), yaitu:

Subsoal yang akan Dikerjakan 1

Sajikan f sebagai perkalian dari sikel-sikel saling asing!

Kita harus mengetahui istilah *cycle* untuk menjawab subsoal ini. Sikel itu ya *cycle* dalam bahasa Indonesia. 😀

Definisi *Cycle* atas Suatu Permutasi

Diketahui himpunan objek $X = \{O_1, O_2, O_3, ..., O_n\}$. Diketahui juga grup semua permutasi $(S_n, \circ)$.

Jika kita memilih suatu permutasi $\tau \in S_n$, maka kita akan mendapatkan orbit-orbit K_1, K_2, K_3, hingga K_m dengan $1 \leq m \leq n$.

Cycle adalah representasi orbit dalam bentuk permutasi. Dengan demikian:

- *Cycle* adalah permutasi.
- *Cycle* adalah permutasi yang termuat di dalam himpunan S_n.
- Jika orbit K memuat r objek dan ρ adalah *cycle* bersesuaian dengan orbit K, maka order dari *cycle* ρ adalah r.
- Suatu orbit K dapat bersesuaian dengan banyak *cycle*.

Cara Membuat *Cycle* dari Orbit

Diketahui himpunan objek $X = \{O_1, O_2, O_3, ..., O_n\}$. Diketahui juga grup semua permutasi $(S_n, \circ)$.

Jika kita memilih suatu permutasi $\tau \in S_n$, maka kita akan mendapatkan orbit-orbit K_1, K_2, K_3, hingga K_m dengan $1 \leq m \leq n$ yang bersesuaian dengan permutasi τ.

Untuk suatu orbit K yang memuat r objek, maka kita dapat membentuk suatu *cycle* $\rho \in S_n$ sedemikian sehingga order *cycle* ρ adalah r (yaitu, $\rho^r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix}$) dengan cara seperti ini.

- Untuk setiap $O_x \in X$ dengan $O_x \notin K$, didefinisikan $\rho(O_x) = O_x$.
- Untuk setiap $O_x \in X$ dengan $O_x \notin K$ dan $K = \{O_{i_1}, O_{i_2}, ..., O_{i_m}\}$, didefinisikan: $\rho(O_{i_1}) = O_{i_2}$, $\rho(O_{i_2}) = O_{i_3}$, ... , $\rho(O_{i_{m-1}}) = O_{i_m}$, $\rho(O_{i_m}) = O_{i_1}$.

Contoh-6

Diketahui himpunan objek $A = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$. Diketahui juga grup semua permutasi $(S_6, \circ)$.

Jika kita memilih permutasi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$, maka akan diperoleh dua orbit; K_1 dan K_2 sebagai berikut.

$$K_1 = \{O_1, O_6\} \text{ dan } K_2 = \{O_2, O_3, O_4, O_5\}$$

Menggunakan **Cara Membuat *Cycle* dari Orbit**, kita dapat membentuk *cycle* ρ_1 yang bersesuaian dengan orbit K_1 dengan definisi:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

dan juga *cycle* ρ_2 yang bersesuaian dengan orbit K_2 dengan definisi:

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Perhatikan! Selain ρ_2, *cycle* ρ_3 dan ρ_4 berikut juga bersesuaian dengan orbit K_2.

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \rho_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, kita akan menyinggung teorema yang lumayan penting.

Teorema Dekomposisi *Cycle*

Diketahui himpunan objek $X = \{O_1, O_2, O_3, ..., O_n\}$. Diketahui juga grup semua permutasi $(S_n, \circ)$.

Jika kita memilih suatu permutasi $\tau \in S_n$, maka kita akan mendapatkan orbit-orbit K_1, K_2, K_3, hingga K_m dengan $1 \leq m \leq n$ yang bersesuaian dengan permutasi τ.

Jika ρ_1, ρ_2, ρ_3, hingga ρ_m secara berurutan adalah *cycle-cycle* yang bersesuaian dengan orbit-orbit K_1, K_2, K_3, hingga K_m, maka akan berlaku persamaan berikut.

$$\tau \; = \; \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3 \circ ... \circ \rho_m$$

Lebih lanjut, jika permutasi τ memiliki order s dan r_1, r_2, r_3, hingga r_m secara berurutan adalah order-order yang bersesuaian dengan *cycle-cycle* ρ_1, ρ_2, ρ_3, hingga ρ_m, maka akan berlaku persamaan berikut.

$$s \; = \; \text{Kelipatan Persekutuan Terkecil dari } \{r_1, r_2, r_3, ..., r_m\}$$

Oke! Kembali ke **Subsoal yang akan Dikerjakan 1**!

Diketahui permutasi $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$.

Berdasarkan definisi permutasi f tersebut, diperoleh:

$f^1(O_1) = f(O_1) = O_6$, dan
$f^2(O_1) = f(f(O_1)) = f(O_6) = O_1$.

Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa objek O_1 dan O_6 saling berelasi. Akibatnya, objek-objek tersebut termuat di dalam orbit yang sama, yaitu $P_1 = \{O_1, O_6\}$.

Selain itu, berdasarkan definisi permutasi f tersebut, diperoleh juga:

$f^1(O_2) = f(O_2) = O_4$,
$f^2(O_2) = f(f(O_2)) = f(O_4) = O_5$, dan
$f^3(O_2) = f(f^2(O_2)) = f(O_5) = O_2$.

Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa objek O_2, O_4, dan O_5 saling berelesai. Akibatnya, objek-objek tersebut termuat di dalam orbit yang sama, yaitu $P_2 = \{O_2, O_4, O_5\}$.

Terakhir, kita akan punya orbit $P_3 = \{O_3\}$ karena himpunan A memuat 6 objek dan objek O_3 tidak termuat di dalam kelas ekuivalensi P_1 dan P_2.

Dengan demikian, permutasi f akan menghasilkan 3 orbit pada himpunan objek $A = \{O_1, O_2, O_3, ..., O_6\}$ yaitu P_1, P_2, dan P_3, dengan definisi:

$$P_1 = \{O_1, O_6\} \qquad P_2 = \{O_2, O_4, O_5\} \qquad P_3 = \{O_3\}$$

Berdasarkan orbit-orbit P_1, P_2, dan P_3 tersebut kita dapat membuat *cycle-cycle* ρ_1, ρ_2, dan ρ_3 sebagai berikut.

- Permutasi ρ_1 adalah *cycle* yang bersesuaian dengan orbit P_1 dan tetap mempertahankan definisi pemetaan f, yaitu $\rho_1(O_1) = O_6$ dan $\rho_1^2(O_1) = O_1$.

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

- Permutasi ρ_2 adalah *cycle* yang bersesuaian dengan orbit P_2 dan tetap mempertahankan definisi pemetaan f, yaitu $\rho_2(O_2) = O_4$, $\rho_2^2(O_2) = O_5$ dan $\rho_2^3(O_2) = O_2$.

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

- Permutasi ρ_3 adalah *cycle* yang bersesuaian dengan orbit P_3 dan tetap mempertahankan definisi pemetaan f, yaitu $\rho_3(O_3) = O_3$.

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Nah, karena ρ_3 tidak lain adalah permutasi identitas di S_6, maka kita bisa mengabaikan *cycle* ini.

Dengan demikian, berdasarkan **Teorema Dekomposisi *Cycle*** kita akan memiliki persamaan berikut:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{f} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}}_{\rho_1} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}}_{\rho_2}$$

yang merupakan penyajian permutasi f sebagai perkalian dari *cycle-cycle* saling asing.

- **Langkah-6**

Sekarang kita akan mengerjakan subsoal poin (b), yaitu:

Subsoal yang akan Dikerjakan 2

Sajikan f sebagai perkalian dari transposisi-transposisi!

Kita harus mengetahui istilah transposisi untuk menjawab subsoal ini.

Definisi Transposisi

Transposisi adalah *cycle* yang bersesuaian dengan suatu orbit yang memuat tepat dua objek.

Dengan demikian, transposisi adalah suatu permutasi yang bersesuaian dengan orbit $P = \{O_x,\ O_y\}$ untuk suatu $O_x, O_y \in X$ dengan X adalah himpunan objek.

Contoh-7

Perhatikan lagi **Contoh-6**!

Cycle $\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ yang bersesuaian dengan orbit $K_1 = \{O_1, O_6\}$ adalah transposisi karena orbit K_1 memuat tepat 2 objek, yaitu O_1 dan O_6.

Sementara itu, *cycle* $\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ yang bersesuaian dengan orbit $K_2 = \{O_2, O_3, O_4, O_5\}$ bukan tranposisi karena orbit K_2 tidak memuat tepat 2 objek.

Teorema Dekomposisi Transposisi

Setiap *cycle* dapat disajikan sebagai perkalian transposisi-transposisi.

Misalkan ρ adalah *cycle* yang bersesuaian dengan orbit $K = \{O'_1,\ O'_2,\ ...,\ O'_m\}$ yang memuat m objek sedemikian sehingga $\rho(O'_1) = O'_2$, $\rho^2(O'_1) = O'_3$, $\rho^3(O'_1) = O'_4$, ..., dan $\rho^m(O'_1) = O'_1$.

Perhatikan bahwa kita dapat menyajikan orbit K sebagai union dari himpunan-himpunan K'_i yang memuat tepat 2 elemen, yaitu:

$$K \ = \ \underbrace{\{O'_1,\ O'_2\}}_{K'_1} \cup \underbrace{\{O'_2,\ O'_3\}}_{K'_2} \cup \underbrace{\{O'_3,\ O'_4\}}_{K'_3} \cup ... \cup \underbrace{\{O'_{m-1},\ O'_m\}}_{K'_{m-1}}$$

Jika kita memandang himpunan K'_i sebagai orbit dan γ_i adalah *cycle* yang bersesuaian dengan orbit K'_i, maka akan diperoleh persamaan:

$$\rho \ = \ \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3 \circ ... \circ \gamma_{m-1}$$

Oke! Kembali ke **Subsoal yang akan Dikerjakan 2**!

Berdasarkan penyelesaian **Subsoal yang akan Dikerjakan 1** alias hasil akhir **Langkah 5**, kita mendapatkan persamaan:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{f} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}}_{\rho_1} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}}_{\rho_2}$$

dengan ρ_1 dan ρ_2 adalah *cycle-cycle* yang saling asing.

Nah, ingat bahwa ρ_1 adalah *cycle* yang bersesuaian dengan orbit $P_1 = \{O_1, O_6\}$. Karena orbit P_1 tepat memuat 2 objek, maka ρ_1 adalah transposisi.

Sementara itu, ρ_2 adalah *cycle* yang bersesuaian dengan orbit $P_2 = \{O_2, O_4, O_5\}$. Karena orbit P_2 memuat lebih dari 2 objek, maka ρ_2 bukan tranposisi. Oleh sebab itu, kita akan menggunakan **Teorema Dekomposisi Transposisi** untuk menyajikan ρ_2 sebagai perkalian transposisi-transposisi.

Perhatikan bahwa $\rho_2(O_2) = O_4$ dan $\rho_2^2(O_2) = O_5$. Dengan demikian, kita dapat membentuk himpunan K'_1 dan K'_2 sedemikian sehingga berlaku persamaan berikut.

$$\underbrace{\{O_2, O_4, O_5\}}_{P_2} \ = \ \underbrace{\{O_2, O_4\}}_{K'_1} \cup \underbrace{\{O_4, O_5\}}_{K'_2}$$

Jika kita memandang himpunan K_1' dan K_2' sebagai orbit serta γ_1 dan γ_2 secara berturut-turut adalah *cycle-cycle* yang bersesuaian dengan orbit K_1' dan K_2', maka akan diperoleh persamaan berikut.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}}_{\rho_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{\gamma_1} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}}_{\gamma_2}$$

Dengan demikian, kita akan memperoleh hasil akhir sebagai berikut:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{f} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}}_{\rho_1} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{\gamma_1} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}}_{\gamma_2}$$

yang merupakan penyajian f sebagai perkalian dari transposisi-transposisi.

- **Langkah-7**

Sekarang kita akan mengerjakan subsoal poin (c), yaitu:

Subsoal yang akan Dikerjakan 3

Tentukan order dari f!

Kita akan menggunakan **Teorema Dekomposisi *Cycle*** untuk menentukan order dari permutasi f. Berdasarkan penyelesaian **Subsoal yang akan Dikerjakan 1** alias hasil akhir **Langkah 5**, kita mendapatkan persamaan:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{f} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}}_{\rho_1} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}}_{\rho_2}$$

dengan ρ_1 dan ρ_2 adalah *cycle-cycle* yang saling asing.

Nah, karena *cycle* ρ_1 bersesuaian dengan orbit P_1 yang beranggotakan 2 objek, maka order *cycle* ρ_1 adalah 2. Dengan penalaran yang serupa, order dari *cycle* ρ_2 adalah 3.

Nah, menurut **Teorema Dekomposisi *Cycle*** akan diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\text{Order dari } f = \text{Kelipatan Persekutuan Terkecil dari } \{2, 3\}$$

Karena kelipatan persekutuan terkecil dari 2 dan 3 adalah 6, maka kita bisa menyatakan bahwa order permutasi f adalah 6. Akibatnya, kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$f^6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Langkah-8**

Sekarang kita akan mengerjakan subsoal poin (d), yaitu:

Subsoal yang akan Dikerjakan 4

Tentukan $f^{2.022}$ dimana $f^{2.022} = f \circ f \circ f \circ ... \circ f \circ f$(sebanyak 2.022 kali)!

Kita akan menggunakan penyelesaian **Subsoal yang akan Dikerjakan 3** alias hasil akhir **Langkah 7**, yaitu persamaan:

$$f^6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

untuk menghitung $f^{2.022}$.

Perhatikan! Karena $2.022 = 6 + 2.016$, maka kita akan mendapatkan persamaan berikut.

$$f^{2.022} = f^{(6+2.016)} = f^6 \circ f^{2.016} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \circ f^{2.016} = f^{2.016}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita bisa mengulangi penalaran di atas sedemikian sehingga akan menghasilkan persamaan $f^{2.022} = f^r$ dengan r adalah suatu bilangan bulat positif yang memenuhi pertidaksamaan $0 \leq r < 6$.

Singkatnya, karena $2.022 = 336 \cdot 6 + 0$, maka kita akan mendapatkan persamaan:

$$f^{2.022} = f^0$$

Wow! Karena f^0 tidak lain adalah $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, maka kita dapat menyatakan bahwa:

$$f^{2.022} = f^0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

■

10

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 4 (a)

Soal

Diketahui $(G, \star)$ merupakan grup komutatif dan H, K masing-masing merupakan subgrup dari G. Diperhatikan bahwa $H \times K$ merupakan grup terhadap operasi biner $\oplus$ dengan definisi $(h_1, k_1) \oplus (h_2, k_2) = (h_1 \star h_2, k_1 \star k_2)$ untuk setiap $(h1, k1), (h2, k2) \in H \times K$. (tidak perlu dibuktikan).

Selanjutnya, misalkan:

$$N = \{(x, x^{-1}) \mid x \in H \cap K\}$$

Buktikan bahwa N merupakan subgrup normal dari $H \times K$!

Dikerjakan

Kita akan menunjukkan kebenaran **Misi Utama** berikut untuk menunjukkan bahwa N adalah subgrup normal dari $H \times K$.

Misi Utama

Kita akan menunjukkan secara berurutan kebenaran dua pernyataan di bawah ini.

1. N adalah subgrup dari $H \times K$.
2. Untuk setiap $(h, k) \in H \times K$, akan berlaku $(h, k) \oplus N = N \oplus (h, k)$.

Sebelumnya, ingat bahwa yang dimaksud dengan $H \times K$ itu adalah himpunan seperti definisi berikut.

$$H \times K = \{\ (h, k) \mid h \in H, k \in K\}$$

Tunggu apa lagi!? Ayo kita segera mulai!

- **Menunjukkan Kebenaran Pernyataan-1**

Kita akan menggunakan teorema berikut untuk menunjukkan bahwa N adalah subgrup dari $H \times K$.

Teorema Subgrup

Diketahui $(H \times K, \oplus)$ adalah grup dan N adalah himpunan bagian dari $H \times K$.

N merupakan subgrup dari $H \times K$ jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in N$ berlaku $a \oplus b^{-1} \in N$.

Oke! Kita ambil sebarang $a, b \in N$. Kita akan menunjukkan bahwa $a \oplus b^{-1} \in N$.

Perhatikan! Karena $a, b \in N$, maka:

- $a = (x_1, x_1^{-1})$, untuk suatu $x_1 \in H \cap K$.
- $b = (x_2, x_2^{-1})$, untuk suatu $x_2 \in H \cap K$.

Lebih lanjut lagi, perhatikan baik-baik dua poin berikut ini!

- Karena $x_1 \in H \cap K$, maka x_1 merupakan elemen di H dan juga elemen di K. Dengan kata lain, karena $x_1 \in H \cap K$, maka $x_1 \in H$ dan $x_1 \in K$. Demikian pula, berlaku $x_1^{-1} \in H$ dan $x_1^{-1} \in K$.
- Karena $x_2 \in H \cap K$, maka x_2 merupakan elemen di H dan juga elemen di K. Dengan kata lain, karena $x_2 \in H \cap K$, maka $x_2 \in H$ dan $x_2 \in K$. Demikian pula, berlaku $x_2^{-1} \in H$ dan $x_2^{-1} \in K$.

Berdasarkan dua poin di atas, akan berlaku:

- $a = (x_1, x_1^{-1}) \in H \times K$, akibatnya $a \in H \times K$, dan
- $b = (x_2, x_2^{-1}) \in H \times K$, akibatnya $b \in H \times K$.

Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa $N \subseteq (H \times K)$.

Selanjutnya, perhatikan $b = (x_2, x_2^{-1}) \in N$! Perhatikan bahwa b^{-1} tidak lain adalah (x_2^{-1}, x_2) karena berlaku persamaan-persamaan berikut.

$$\begin{aligned} b \oplus b^{-1} &= (x_2, x_2^{-1}) \oplus (x_2^{-1}, x_2) = (x_2 \star x_2^{-1}, x_2^{-1} \star x_2) = (e, e) \\ b^{-1} \oplus b &= (x_2^{-1}, x_2) \oplus (x_2, x_2^{-1}) = (x_2^{-1} \star x_2, x_2 \star x_2^{-1}) = (e, e) \end{aligned}$$

Nah! Karena H dan K merupakan subgrup dari G, maka elemen identitas di H, K, dan G adalah sama, yaitu e. Selanjutnya, jika dibentuk $a \oplus b^{-1}$, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut.

$$a \oplus b^{-1} = (x_1, x_1^{-1}) \oplus (x_2^{-1}, x_2) = (x_1 \star x_2^{-1}, x_1^{-1} \star x_2)$$

Karena:

- H dan K adalah grup,
- $h_1 \in H \cap K$, dan
- $x_2^{-1} \in H \cap K$,

maka akan berlaku $x_1 \star x_2^{-1} \in H \cap K$. Dengan penalaran yang serupa akan berlaku juga $x_1^{-1} \star x_2 \in H \cap K$.

Dengan demikian, berdasarkan syarat keanggotaan himpunan N, kita bisa menyatakan bahwa:

$$a \oplus b^{-1} = (x_1 \star x_2^{-1}, x_1^{-1} \star x_2) \in N$$

Jadi, berdasarkan **Teorema Subgrup** di atas, kita dapat menyatakan bahwa N adalah subgrup dari $H \times K$.

- **Menunjukkan Kebenaran Pernyataan-2**

Pada bagian ini kita akan menunjukkan bahwa untuk setiap untuk setiap $(h, k) \in H \times K$, akan berlaku $(h, k) \oplus N = N \oplus (h, k)$. Karena pada **Poin (1)** kita sudah menunjukkan bahwa N adalah subgrup dari $H \times K$, maka pada bagian ini kita akan memandang N sebagai subgrup dari $H \times K$.

Kita awali bagian ini dengan menjabarkan definisi himpunan $(h, k) \oplus N$ dan $N \star N \oplus (h, k)$ sebagaimana berikut.

- $(h, k) \oplus N = \{(h, k) \oplus n \ : \ n \in N\}$, dan
- $N \oplus (h, k) = \{n \oplus (h, k) \ : \ n \in N\}$.

Kita akan lebih rinci menyelidiki himpunan $(h, k) \oplus N$ dan $N \star N \oplus (h, k)$ pada paragraf-paragraf selanjutnya.

Perhatikan! Karena kita ingin menunjukkan kebenaran persamaan $(h, k) \oplus N = N \oplus (h, k)$, maka kita harus menggunakan definisi kesamaan dua himpunan. Dengan demikian, kita akan menunjukkan kebenaran **Submisi 2** berikut.

Definisi Kesamaan Dua Himpunan

Diketahui himpunan A dan B.

$A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Submisi 2

Kita harus menunjukkan kebenaran dua pernyataan berikut.

1. Untuk menunjukkan bahwa berlaku $(h, k) \oplus N \subseteq N \oplus (h, k)$, maka kita akan menunjukkan bahwa untuk sebarang $x \in (h, k) \oplus N$ akan berlaku $x \in N \oplus (h, k)$.
2. Untuk menunjukkan bahwa berlaku $N \oplus (h, k) \subseteq (h, k) \oplus N$, maka kita akan menunjukkan bahwa untuk sebarang $x \in N \oplus (h, k)$ akan berlaku $x \in (h, k) \oplus N$.

Jika kebenaran dua pernyataan di atas sudah ditunjukkan, maka kita bisa menyatakan bahwa benar berlaku $(h, k) \oplus N = N \oplus (h, k)$.

•• (2.1) Menunjukkan Kebenaran Pernyataan-1

Oke! Kita akan menunjukkan bahwa berlaku $(h,k) \oplus N \subseteq N \oplus (h,k)$. Kita akan ambil sebarang $x \in (h,k) \oplus N$ dan akan kita tunjukkan bahwa berlaku $x \in N \oplus (h,k)$.

Nah! Kita akan menjabarkan secara lebih rinci syarat keanggotaan himpunan $(h,k) \oplus N$ dan $N \oplus (h,k)$ sebagaimana di bawah ini.

$$\begin{aligned}(h,k) \oplus N &= \{\, (h,k) \oplus n \mid n \in N\} \\ &= \Big\{\, (h,k) \oplus (x, x^{-1}) \mid x \in H \cap K\Big\} \\ &= \Big\{\, (h \star x,\ k \star x^{-1}) \mid x \in H \cap K\Big\}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}N \oplus (h,k) &= \{\, n \oplus (h,k) \mid n \in N\} \\ &= \Big\{\, (x, x^{-1}) \oplus (h,k) \mid x \in H \cap K\Big\} \\ &= \Big\{\, (x \star h,\ x^{-1} \star k) \mid x \in H \cap K\Big\}.\end{aligned}$$

Berdasarkan definisi syarat keanggotaan di atas, jika diambil sebarang $\alpha \in (h,k) \oplus N$, maka akan berlaku $\alpha = (h \star x_0,\ k \star x_0^{-1})$ untuk suatu $x_0 \in H \cap K$.

Perhatikan! Pada soal diketahui bahwa $(G, \star)$ adalah grup komutatif. Artinya, untuk sebarang $x, y \in G$ akan berlaku $x \star y = y \star x$.

Karena H dan K adalah subgrup dari G dan $x_0 \in H \cap K$, maka akan berlaku persamaan $h \star x_0 = x_0 \star h$ dan $k \star x_0^{-1} = x_0^{-1} \star k$.

Dengan demikian,

$$\alpha = (h \star x_0,\ k \star x_0^{-1}) = (x_0 \star h,\ x_0^{-1} \star k).$$

Dengan kata lain, $\alpha \in N \oplus (h,k)$.

Jadi, karena untuk sebarang $\alpha \in (h,k) \oplus N$ akan berlaku $\alpha \in N \oplus (h,k)$, maka kita dapat menyimpulkan bahwa $(h,k) \oplus N \subseteq N \oplus (h,k)$.

•• (2.2) Menunjukkan Kebenaran Pernyataan-2

Langkah-langkah untuk menunjukkan bahwa $N \oplus (h,k) \subseteq (h,k) \oplus N$ mirip dengan langkah-langkah untuk menunjukkan bahwa $(h,k) \oplus N \subseteq N \oplus (h,k)$ yang sudah dipaparkan di poin **(2.1)** di atas.

Demi menghemat waktu dan tenaga, langkah-langkah untuk menunjukkan bahwa $N \oplus (h,k) \subseteq (h,k) \oplus N$ tidak aku tulis. 😀

•• (2.3) Kesimpulan

Berdasarkan penjabaran-penjabaran di atas, karena kita bisa menyatakan bahwa $(h, k) \oplus N \subseteq N \oplus (h, k)$ dan $N \oplus (h, k) \subseteq (h, k) \oplus N$, maka kita dapat menyatakan bahwa **Submisi 2** benar berlaku. Dengan kata lain, untuk setiap $(h, k) \in H \times K$, akan berlaku $(h, k) \oplus N = N \oplus (h, k)$.

• Kesimpulan

Berdasarkan penjabaran-penjabaran di atas, karena kita bisa menunjukkan kebenaran Pernyataan-1 dan Pernyataan-2 pada **Misi Utama**, maka kita bisa menyatakan bahwa N adalah subgrup normal dari $H \times K$.

■

11

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 4 (b)

Soal

Diketahui $(G, \star)$ merupakan grup komutatif dan H, K masing-masing merupakan subgrup dari G. Diperhatikan bahwa $H \times K$ merupakan grup terhadap operasi biner $\oplus$ dengan definisi $(h_1, k_1) \oplus (h_2, k_2) = (h_1 \star h_2, k_1 \star k_2)$ untuk setiap $(h1, k1), (h2, k2) \in H \times K$. (tidak perlu dibuktikan).

Selanjutnya, misalkan:

$$N = \{(x, x^{-1}) \mid x \in H \cap K\}$$

Buktikan bahwa $(H \times K)/N \simeq HK$!

Dikerjakan

Sebelum memulai pembahasan, ayo kenali beberapa istilah berikut!

- $H \times K = \{\ (h, k)\ \mid h \in H, k \in K\}$.
- $HK = \{\ h \star k\ \mid h \in H, k \in K\}$.
- $G/H = \{\ gH \mid g \in G\} = \{g_1 H,\ g_2 H,\ g_3 H,\ ...\}$.
- $gH = \{\ g \star h \mid h \in H\} = \{g \star h_1,\ g \star h_2,\ g \star h_3,\ ...\}$.

Kita akan menggunakan **Teorema Fundamental Homomorfisma 1** untuk menunjukkan bahwa $(H \times K)/N \simeq HK$.

Teorema Fundamental Homomorfisma 1

Diketahui $(G, \star)$ dan $(H, \circ)$ adalah grup. Diketahui pula homomorfisma $\phi : G \to H$.

Jika ϕ adalah homomorfisma surjektif, maka akan terdapat suatu isomorfisma $\psi : G/Kernel(\phi) \to H$.

Dengan kata lain.

Jika ϕ adalah homomorfisma surjektif, maka akan berlaku $G/Kernel(\phi) \simeq H$.

Ingat! Yang dimaksud dengan $X \simeq Y$ adalah terdapat isomorfisma antara grup X dan grup Y. Isomorfisma itu adalah homomorfisma yang bijektif.

Nah! Selanjutnya, ayo kita telaah apa-apa yang diketahui pada soal.

1. Dalam soal diketahui bahwa $(G,\ \star)$ adalah grup komutatif. Diketahui juga bahwa $(H,\ \star)$ dan $(K,\ \star)$ adalah subgrup-subgrup dari $(G,\ \star)$.

2. Dalam soal disebutkan adanya keterlibatan himpunan HK (pada notasi $(H \times K)/N \simeq HK$). **Seharusnya**, kita sudah tahu bahwa $(HK,\ \star)$ adalah subgrup dari G. Mungkin hal ini sudah pernah dijadikan bahan latihan atau tugas kuliah. Dengan demikian, dalam pengerjaan ini tidak akan menyertakan pembuktian bahwa $(HK,\ \star)$ adalah subgrup dari G.

3. Dalam soal diketahui adanya grup $(H \times K,\ \otimes)$ terhadap operasi biner $\oplus$ dengan definisi $(h_1, k_1) \oplus (h_2, k_2) = (h_1 \star h_2, k_1 \star k_2)$ untuk setiap $(h1, k1), (h2, k2) \in H \times K$.

4. Dalam soal diketahui adanya himpunan N yang didefinisikan sebagai: $N = \{(x, x^{-1}) \mid x \in H \cap K\}$. Kita sudah menunjukkan bahwa N adalah subgrup dari $(H \times K,\ \otimes)$ pada **Pengerjaan Soal Ujian Akhir Nomor 4 (a)**.

5. Soal tidak menyatakan adanya suatu homomorfisma. Dengan demikian, kita harus membuat suatu homomorfisma ϕ yang memenuhi syarat berlakunya **Teorema Fundamental Homomorfisma 1**.

Perhatikan isi **Teorema Fundamental Homomorfisma 1** dalam kotak kuning di atas! Jika kita mensubstitusi grup $(G, \star)$ dengan grup $(H \times K,\ \oplus)$ dan juga mensubstitusi grup $(H, \circ)$ dengan grup $(HK,\ \star)$, maka kita akan mendapatkan "modifikasi" dari **Teorema Fundamental Homomorfisma 1** sebagai berikut.

Teorema Fundamental Homomorfisma 1 (Modifikasi)

Diketahui $(H \times K,\ \oplus)$ dan $(HK,\ \star)$ adalah grup. Diketahui pula homomorfisma $\phi : H \times K \to HK$.

Dinotasikan $N = Kernel(\phi)$.

Jika ϕ adalah homomorfisma surjektif,
maka akan terdapat suatu isomorfisma $\psi : (H \times K)/N \to HK$.

Dengan kata lain.

Jika ϕ adalah homomorfisma surjektif, maka akan berlaku $(H \times K)/N \simeq HK$.

Nah, berdasarkan segala macam uraian di atas, kita akan melakukan serangkaian langkah-langkah berikut secara berurutan untuk menunjukkan bahwa berlaku $(H \times K)/N \simeq HK$.

1. Kita akan membuat suatu pengaitan $\phi : H \times K \to HK$ dengan definisi $\phi\left((h,k)\right) = h \star k$ untuk setiap $(h,k) \in H \times K$.
2. Kita akan menunjukkan bahwa pengaitan ϕ yang kita buat tersebut adalah pemetaan yang terdefinisi dengan baik.
3. Kita akan menunjukkan bahwa pengaitan ϕ yang kita buat tersebut adalah pemetaan surjektif.
4. Kita akan menunjukkan bahwa pengaitan ϕ yang kita buat tersebut adalah suatu homomorfisma.
5. Kita akan menunjukkan bahwa pengaitan ϕ yang kita buat tersebut adalah suatu homomorfisma dengan $Kernel(\phi) = N = \left\{(x, x^{-1}) \mid x \in H \cap K\right\}$.

Terlihat bahwa soal ini menguji kemampuan kita untuk membuat suatu homomorfisma yang memenuhi syarat **Teorema Fundamental Homomorfisma 1**.

Oke! Ayo kita mulai pembahasan soal!

- **Langkah-1**

Kita akan membuat suatu pengaitan $\phi : H \times K \to HK$ dengan definisi $\phi((h,k)) = h \star k$ untuk setiap $(h,k) \in H \times K$.

Terus terang. Mungkin bagian ini yang akan membuat Pembaca yang baru mempelajari Pengantar Struktur Aljabar kesulitan. 😀

Mungkin ada Pembaca yang bertanya-tanya:

*Bagaimana caranya membuat pengaitan ϕ sedemikian sehingga ϕ adalah homomorfisma yang memenuhi **Teorema Fundamental Homomorfisma 1 (Modifikasi)**?*

Kenapa bisa tiba-tiba langsung bikin defisini pengaitan ϕ sebagai $\phi((h,k)) = h \star k$? Kenapa tidak $\phi((h,k)) = h \star k^{-1}$ atau $\phi((h,k)) = h^2 \star k$ dan sebagainya? Bagaimana "rumus"-nya bisa bikin pengaitan ϕ seperti itu?

Jawaban singkatnya, **ya karena pengalaman**, hehehe. 😀

You know lah. *Been there, done that, many-many times.* 😀

Menurutku sih, kalau sering "bergumul" dengan *fotocopy*-an buku *A First Course in Abstract Algebra*, nanti ya lama-lama "insting membuat homomorfisma" bakal terasah. Sedangkan kalau hanya mengandalkan catatan kuliah dari apa yang dijelaskan oleh bapak/ibu/mas/mbak dosen di kelas ya kurang melatih insting.

Sebetulnya, pengaitan ϕ yang memenuhi **Teorema Fundamental Homomorfisma 1 (Modifikasi)** itu dibuat berdasarkan petunjuk-petunjuk yang diketahui. Kan kita ingin supaya pengaitan yang dibuat itu adalah homomorfisma dengan kernel N toh? Nah, setiap elemen di kernel itu kan bakal dipetakan ke elemen identitas di kodomain toh? Karena kodomain si homomorfisma ini adalah HK dan elemen identitas di HK adalah e_G, jadi ya "dikira-kira" saja, "rumus" pengaitan apa yang bakal memetakan $(x, x^{-1}) \in N$ ke e_G. Selain itu, kita juga harus mempertimbangkan bahwa ϕ adalah pemetaan surjektif.

Singkat saran ya **banyak-banyak latihan** saja lah! 😀

- **Langkah-2**

Kita akan menunjukkan bahwa pengaitan ϕ adalah pemetaan yang terdefinisi dengan baik. Caranya, kita akan menunjukkan bahwa untuk sebarang $x, y \in H \times K$ dengan $x = y$, akan berlaku $\phi(x) = \phi(y)$.

Ayo, kita ambil sebarang $x, y \in H \times K$. Dengan demikian kita akan memperoleh:

- $x = (h_1, k_1)$, untuk suatu $h_1 \in H$ dan $k_1 \in K$, dan
- $y = (h_2, k_2)$, untuk suatu $h_2 \in H$ dan $k_2 \in K$.

Sesuai definisi ϕ, akan diperoleh persamaan berikut.

$$\phi(x) = \phi((h_1, k_1)) = h_1 \star k_1 \in HK$$

Karena $x = y$, maka akan berlaku $(h_1, k_1) = (h_2, k_2)$. Dengan kata lain, karena $x = y$, maka akan berlaku $h_1 = h_2$ dan $k_1 = k_2$.

Dengan demikian, kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$h_1 \star k_1 = h_2 \star k_2 = \phi((h_2, k_2)) = \phi(y).$$

Dengan demikian, kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$\phi(x) = \phi((h_1, k_1)) = \phi((h_2, k_2)) = \phi(y).$$

Jadi, karena untuk sebarang $x, y \in H \times K$ dengan $x = y$ akan berlaku $\phi(x) = \phi(y)$, maka kita bisa menyimpulkan bahwa ϕ merupakan pemetaan yang terdefinisi dengan baik.

Pada langkah-langkah selanjutnya, kita akan menyebut ϕ sebagai pemetaan.

- **Langkah-3**

Kita akan menunjukkan bahwa ϕ merupakan pemetaan surjektif. Caranya, kita akan menunjukkan bahwa untuk sebarang $y \in HK$ akan terdapat $x \in H \times K$, sedemikian sehingga berlaku $\phi(x) = y$.

Oke! Kita ambil sebarang $y \in HK$. Sesuai definisi himpunan HK, maka $y = h_1 \star k_1$ untuk suatu $h_1 \in H$ dan $k_1 \in K$.

Selanjutnya, jika kita tetapkan $x = (h_1, k_1)$, maka x akan merupakan elemen di $H \times K$ dan berlaku $\phi(x) = \phi((h_1, k_1)) = h_1 \star k_1 = y$.

Jadi, karena untuk sebarang $y \in HK$, kita dapat menemukan $x \in H \times K$ sedemikian sehingga $\phi(x) = y$, maka kita dapat menyatakan bahwa ϕ merupakan pemetaan surjektif.

- **Langkah-4**

Kita akan menunjukkan bahwa ϕ merupakan homomorfisma. Caranya ya dengan menunjukkan bahwa untuk sebarang $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \times K$ akan berlaku persamaan berikut.

$$\phi\Big(\ (h_1, k_1) \oplus (h_2, k_2)\ \Big) = \phi((h_1, k_1)) \star \phi((h_2, k_2))$$

Oke! Kita ambil sebarang $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \times K$. Berdasarkan definisi operasi biner $\oplus$ akan diperoleh persamaan berikut.

$$(h_1, k_1) \oplus (h_2, k_2) \ = \ (h_1 \star h_2,\ k_1 \star k_2)$$

Dengan demikian, hasil dari $\phi\Big(\ (h_1, k_1) \oplus (h_2, k_2)\ \Big)$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\phi\Big(\ (h_1, k_1) \oplus (h_2, k_2)\ \Big) &= \phi\Big((h_1 \star h_2,\ k_1 \star k_2)\Big) \\
&= (h_1 \star h_2)\ \star\ (k_1 \star k_2) \\
&= h_1 \star\ (h_2 \star k_1)\ \star k_2 \\
&= h_1 \star\ (k_1 \star h_2)\ \star k_2 && \rightarrow \text{sifat komutatif grup } G \\
&= (h_1 \star k_1)\ \star\ (h_2 \star k_2) \\
&= \phi((h_1, k_1))\ \star\ \phi((h_2, k_2))
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, diperoleh hasil berupa persamaan $\phi\Big(\ (h_1, k_1) \oplus (h_2, k_2)\ \Big) = \phi((h_1, k_1)) \star \phi((h_2, k_2))$. Jadi, kita dapat menyatakan bahwa ϕ merupakan homomorfisma.

• Langkah-5

Kita akan menunjukkan bahwa $Kernel(\phi) = N = \{(x, x^{-1}) \mid x \in H \cap K\}$ dengan menggunakan definisi kesamaan dua himpunan.

Definisi Kesamaan Dua Himpunan

Diketahui himpunan A dan B.

$A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Submisi 1

Kita harus menunjukkan kebenaran dua pernyataan berikut.

1. Untuk menunjukkan bahwa berlaku $Kernel(\phi) \subseteq N$, maka kita akan menunjukkan bahwa untuk sebarang $x \in Kernel(\phi)$ akan berlaku $x \in N$.
2. Untuk menunjukkan bahwa berlaku $N \subseteq Kernel(\phi)$, maka kita akan menunjukkan bahwa untuk sebarang $x \in N$ akan berlaku $x \in Kernel(\phi)$.

Jika kebenaran dua pernyataan di atas sudah ditunjukkan, maka kita bisa menyatakan bahwa benar berlaku $Kernel(\phi) = N = \{(x, x^{-1}) \mid x \in H \cap K\}$.

•• (5.1) Menunjukkan Kebenaran Pernyataan-1

Kita ambil sebarang $x \in Kernel(\phi)$. Dengan demikian $x = (h_1, k_1)$ untuk suatu $h_1 \in H$ dan $k_1 \in K$.

Eh iya! Karena $x \in Kernel(\phi)$, maka akan berlaku persamaan berikut.

$$\phi(x) \;=\; \phi\Big((h_1, k_1)\Big) \;=\; e_G$$

Berdasarkan definisi pemetaan ϕ, akan diperoleh persamaan berikut.

$$\phi(x) = \phi(\ (h_1, k_1)\ ) = h_1 \star k_1 = e_G.$$

Perhatikan bahwa $h_1 \star k_1 = e_G$ jika dan hanya jika $h_1 = (k_1)^{-1}$ atau $k_1 = (h_1)^{-1}$.

Perhatikan!

- Karena $h_1 = (k_1)^{-1}$, itu berarti $h_1 \in K$.
- Karena $h_1 = (k_1)^{-1}$, maka akan berlaku $k_1 = (h_1)^{-1}$ dan itu berarti $k_1 \in H$.

Berdasarkan dua poin di atas, kita dapat menyatakan bahwa:

- h_1 dan k_1 termuat di dalam himpunan H sekaligus di dalam himpunan K. Dengan kata lain, $h_1, k_1 \in H \cap K$.
- h_1 dan k_1 saling invers. Dengan demikian, kita bisa menyatakan pasangan $(h_1,\ k_1)$ sebagai (a, a^{-1}) atau (a^{-1}, a) untuk suatu $a \in H \cap K$.

Berdasarkan penjabaran di atas, kita dapat menyatakan bahwa $x \in N$. Dengan demikian, akan berlaku $Kernel(\phi) \subseteq N$.

•• (5.2) Menunjukkan Kebenaran Pernyataan-2

Kita ambil sebarang $x \in N$. Dengan demikian $x = (a, a^{-1})$ untuk suatu $a \in H \cap K$.

Berdasarkan definisi pemetaan ϕ akan diperoleh persamaan berikut.

$$\phi(x) = \phi(\ (a, a^{-1})\ ) = a \star a^{-1} = e_G.$$

Dengan demikian $x \in Kernel(\phi)$. Dengan kata lain, $N \subseteq Kernel(\phi)$.

•• (5.3) Kesimpulan

Berdasarkan penjabaran-penjabaran di atas, karena kita bisa menyatakan bahwa $Kernel(\phi) \subseteq N$ dan $N \subseteq Kernel(\phi)$, maka kita dapat menyatakan bahwa **Submisi 1** benar berlaku. Dengan kata lain, berlaku benar $Kernel(\phi) = N = \{(x, x^{-1}) \mid x \in H \cap K\}$.

• Kesimpulan

Berdasarkan **Langkah-1** hingga **Langkah-5** di atas, maka menurut **Teorema Fundamental Homomorfisma 1 (Modifikasi)** akan berlaku $(H \times K)/N \simeq HK$.

■