Aku Mau Coba
Mengerjakan & Membahas
Ujian Tengah Semester & Ujian Akhir Semester

Pengantar Struktur Aljabar 1

Semester Genap 2020/2021

Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Gadjah Mada

Mawi Wijna

Yogyakarta, 2022

Daftar Isi

Siapa Aku?

Halo!

Kenalin, nama aku Wijna.
Sering juga dipanggil Wisna.
Jarang-jarang dipanggil Mawi.

Aku dulu pernah jadi mahasiswa matematika UGM. Maksudnya, aku dulu itu pernah kuliah di Program Studi Matematika FMIPA UGM. Masuk September 2004. Lulus Februari 2009. Info lebih lanjut, *googling* saja namaku di Google.

Oh ya, kenapa aku kurang kerjaan bikin tulisan ini?

Sekadar pemberitahuan. Tulisan ini aku buat dalam rangka **mengisi waktu luang**. Berhubung si *bocil* kalau makan sukanya diemut, jadi ya iseng-iseng aku mengerjakan soal ujian sambil menunggu rongga mulutnya kosong lagi. Itu pun kalau aku sedang bosan membuka *manga online*, *marketplace*, *Instagram*, dan kawan-kawannya.

Jadi ya, sebetulnya tulisan ini hanyalah sebatas alih digital dari hasil *orat-oret* di sebarang kertas kosong di tengah proses menyuapi makan seorang *bocil*. Pengalihan ke format LaTeXaku lakukan sembari menunggu azan subuh berkumandang atau ketika *weekend* hanya di rumah saja. Sebagian besar *orat-oret* ini tercipta semasa Covid-19 masih mewabah.

Eh, sebelumnya, aku mohon maaf jikalau tulisan ini lebih banyak memuat hal-hal yang salah daripada hal-hal yang benarnya. Maklum, namanya juga sudah belasan tahun yang lalu jadi mahasiswa matematika. Jadi ya, mohon maaf kalau lupa-lupa ingat. Walaupun aku tetap berhati-hati dalam menulis supaya tidak terjadi cacat logika.

Terus terang, hampir sebagian besar isi tulisan ini aku sadur dari berbagai macam sumber di internet seperti math.stackexchange.com, Quora, dan Reddit. Jadi, aku bukan orang pintar nan jenius yang bisa mengerjakan semua soal ujian dengan lancar. Seperti, yang aku bilang tadi, aku cuma iseng mengerjakan soal ujian, mengalihkan *orat-oret* di kertas ke format LaTeX, kemudian meng-*upload*-nya ke jagat maya.

Ya, sudahlah. Bagian pengantar ini nggak usah panjang-panjang. Semoga ada yang bisa dipelajari dari tulisan ini. Semoga tulisan ini bisa menjadi bahan pelajaran buat aku, jika di waktu tuaku nanti aku mulai lupa dengan apa-apa yang aku pelajari semasa kuliah.

Oh yes! Last but not least, *matur nuwun* kepada teman-teman di HIMATIKA FMIPA UGM yang sudah menyediakan sumber soal-soal ujian yang bisa diakses secara cuma-cuma di *website* mereka, himatika.fmipa.ugm.ac.id.

Ah... somehow I felt nostalgic....

Diketik sambil diiringi OST-nya Octopath Traveler.

Pengantar Struktur Aljabar 1 Buat Aku

Pas zamanku kuliah (tahun 2004-2009 silam), Pengantar Struktur Aljabar 1 itu mata kuliah wajib berbobot 3 SKS yang diselenggarakan pada Semester 2 Program Studi Matematika FMIPA UGM. Jadi ya, Struktur Aljabar 1 itu adalah salah satu mata kuliah yang menjadi "santapannya" para mahasiswa baru.

Aku bisa berbangga hati karena Pengantar Struktur Aljabar 1 itu adalah mata kuliah pertamaku yang "murni" matematika yang nilai akhirnya adalah A! Hahaha. 😀

Walaupun ya, sebetulnya ya dapatnya nilai akhirnya itu A- sih. 😀

Ya, seenggaknya dapat nilai A lah! Pencapaian ini kan kemudian bikin aku berpikir bahwasanya ~~kuliah di prodi matematika itu ternyata nggak susah-susah amat~~ aku "kemungkinan" bisa lulus dari prodi matematika dengan IPK tiga koma. 😀

Ya pokoknya setelah semester 2 ini dan mendapatkan nilai akhir A untuk mata kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1, aku mulai memantapkan hati bahwasanya **aljabar adalah jalan ninjaku**.

Well, ketika kamu lebih sering menghabiskan waktu *ngendog* sambil membaca buku *A First Course in Abstract Algebra*, aku yakin nilai akhir mata kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1-mu minimal dapat B asal tidak membuat kesalahan fatal.

Pas semester 2 dulu, aku diajar mata kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1 oleh Bu Diah Junia Eksi Palupi a.k.a Bu Diah. Sayangnya, seumur-umur aku kuliah, beliau hanya mengajar mata kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1 dan Kriptologi (mata kuliah pilihan). Konon katanya, beliau lebih sering mengajar di prodi sebelah. Sedih....

Oke deh! Sebagai penutup, semoga tulisan ini membawa manfaat. Walaupun aku yakin kalau tulisan ini lebih banyak salahnya daripada benarnya, hehehe. Maklum, kan sudah belasan tahun yang lalu jadi mahasiswa matematika. Jadi ya, mohon maaf kalau lupa-lupa ingat.

Aku nggak tahu apakah benar-benar ada orang yang membaca tulisan ini. Semisal Anda yang membaca tulisan ini adalah mahasiswa, aku doakan semoga Anda mendapat pencerahan dan sukses berkuliah. Semisal Anda yang membaca tulisan ini penasaran dengan soal-soal ujian kuliah matematika, aku harap Anda tidak *shock* dan bisa memahami tulisan ini dengan baik. Semisal Anda yang membaca tulisan ini hanya sekadar mengisi waktu luang, aku sarankan untuk membaca tulisan ini sebagai kawan *ngendog* di toilet.

Semoga tulisan ini bermanfaat bagi mahasiswa matematika semester awal. Khususnya yang kesulitan dan kebingungan memahami mata kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1 dan sungkan bertanya ke dosen atau kakak tingkat. Tulisan ini bisa diunduh secara cuma-cuma dan diam-diam. Silakan *googling* namaku untuk menemukan lebih banyak tulisan sejenis ini untuk beragam mata kuliah lain.

Akhir kata, selamat menikmati tulisan ini!

Yogyakarta, 2022
Wihikan "Mawi" Wijna

1

Soal-Soal Ujian Tengah Semester

1. Misalkan G grup, $g \in G$, dan didefinisikan operasi perkalian baru pada G dengan rumus $ab = agb$ untuk semua $a, b \in G$. Buktikan bahwa G terhadap operasi perkalian ini adalah suatu grup!

2. Let G be a group and let $a, b \in G$ be elements such that $ab = ba$. Prove that $o(ab) \mid o(a)o(b)$. (Order ab divides order a times order b)

3. Misalkan G grup dan H_1, H_2 subgrup dari G. Buktikan $H_1 \cup H_2$ subgrup dari G jika dan hanya jika $H_1 \subseteq H_2$ atau $H_2 \subseteq H_1$.

4. Jika G grup berorder $2n$, tunjukkan bahwa banyaknya elemen dari G yang berorder 2 adalah ganjil.

2

Soal-Soal Ujian Akhir Semester

1. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3\}$.
   Diketahui
   $$S_3 = \Big\{f : A \to A \;\mid\; f = \text{ pemetaan bijektif}\Big\}$$
   merupakan grup terhadap operasi komposisi fungsi.

   Diketahui juga bahwa himpunan $\mathbb{Z}_5^* = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}_5 \mid \bar{x} \neq \bar{0}\}$ merupakan grup terhadap operasi perkalian modulo di $\mathbb{Z}_5$.

   Jika dibentuk pengaitan
   $$\psi : S_3 \to \mathbb{Z}_5^*$$
   dengan definisi
   $$\psi \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\alpha(1)}$$
   untuk setiap $\alpha \in S_3$, selidiki apakah pengaitan ψ merupakan homomorfisma grup atau bukan! Jelaskan jawaban Saudara!

2. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
   Diketahui

$$S_6 = \Big\{ f : A \to A \ \mid \ f = \text{ pemetaan bijektif} \Big\}$$

   merupakan grup terhadap operasi komposisi fungsi.

   (a) Apakah ada $f \in S_6$ yang memenuhi $o(f) = 4$? Jelaskan jawaban saudara!
   (b) Apakah ada $f \in S_6$ yang memenuhi $o(f) = 7$? Jelaskan jawaban saudara!
   (c) Jika $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, tentukan $f^{2.021}$!
   Sebagai catatan $f^{2.021} = \underbrace{f \circ f \circ f \circ f \circ ... \circ f}_{\text{sebanyak } 2.021}$.

3. Let $(G, \star)$ and $(H, \otimes)$ be groups. Suppose that the functions $\phi : G \to H$ and $\psi : G \to H$ are homomorphisms.

   If H is commutative, then show that

$$N = \{g \in G \mid \phi(g) = \psi(g)\}$$

   is a normal subgroup of G.

4. Diketahui $(G, \star)$ merupakan grup komutatif dan H, K masing-masing merupakan subgrup dari G.
   Diperhatikan bahwa $H \times K$ merupakan grup terhadap operasi biner $\oplus$ dengan definisi $(h_1, k_1) \oplus (h_2, k_2) = (h_1 \star h_2, k_1 \star k_2)$ untuk setiap $(h1, k1), (h2, k2) \in H \times K$. (tidak perlu dibuktikan).

   Selanjutnya, misalkan:

$$N = \big\{(x, x^{-1}) \mid x \in H \cap K\big\}$$

   (a) Buktikan bahwa N merupakan subgrup normal dari $H \times K$!
   (b) Buktikan bahwa $(H \times K)/N \simeq HK$!

3

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 1

Soal

Misalkan G grup, $g \in G$, dan didefinisikan operasi perkalian baru pada G dengan rumus $ab = agb$ untuk semua $a, b \in G$. Buktikan bahwa G terhadap operasi perkalian ini adalah suatu grup!

Dikerjakan

Oke! Ayo kita perjelas apa yang diinginkan soal supaya tidak membingungkan pembaca yang baru mempelajari Pengantar Struktur Aljabar.

Berdasarkan soal, kita tahu bahwa G adalah grup dan g adalah suatu elemen di G.

Karena G adalah grup, maka jelas G adalah grup untuk **suatu operasi biner** kan? Untuk memudahkan, ayo kita simbolkan operasi biner ini dengan $\star$. Soal menyebut operasi biner $\star$ ini dengan nama **operasi perkalian**.

Selanjutnya, kita akan membuat suatu operasi perkalian baru pada G. Kita simbolkan operasi perkalian yang baru ini dengan $\otimes$. Definisi operasi perkalian $\otimes$ ini adalah sebagai berikut.

$$\forall a, b \in G, \quad a \otimes b \overset{\text{def}}{=} a \star g \star b.$$

Nah, soal ini memerintahkan kita untuk menunjukkan bahwa $(G, \otimes)$ adalah grup.

***

Kita akan melakukan 4 langkah berikut secara berurutan untuk menunjukkan bahwa $(G, \otimes)$ adalah grup.

1. Menunjukkan kebenaran bahwa operasi perkalian $\otimes$ terdefinisi dengan baik sekaligus tertutup di G.
2. Jika Poin (1) benar, maka kita akan menunjukkan kebenaran bahwa operasi perkalian $\otimes$ bersifat asosiatif di G.
3. Jika Poin (2) benar, maka kita akan menunjukkan kebenaran bahwa G memuat elemen identitas terhadap operasi perkalian $\otimes$.
4. Jika Poin (3) benar, maka kita akan menunjukkan kebenaran bahwa setiap elemen di G memiliki invers terhadap operasi perkalian $\otimes$.

Oke! Ayo kita mulai!

• Langkah 1

Kita akan menunjukkan kebenaran bahwa operasi perkalian $\otimes$ terdefinisi dengan baik sekaligus tertutup di G. Kenapa? Ya, karena jika operasi perkalian $\otimes$ tidak terdefinisi dengan baik atau tidak tertutup, maka operasi tersebut bukanlah operasi biner yang menjadi syarat mutlak suatu grup.

Ayo kita ambil sebarang $g_1, g_2 \in G$. Berdasarkan definisi operasi perkalian $\otimes$, kita akan mendapatkan persamaan berikut.

$$g_1 \otimes g_2 \;=\; g_1 \star g \star g_2$$

Perhatikan! Karena:

- g_1, g_2, dan g ketiganya merupakan elemen di G, serta
- $(G, \star)$ adalah grup,

maka $g_1 \star g \star g_2 \in G$. Dengan demikian, untuk sebarang $g_1, g_2 \in G$, kita dapat menyimpulkan bahwa $g_1 \otimes g_2 \in G$. Dengan kata lain, operasi perkalian $\otimes$ bersifat tertutup di G.

Selanjutnya, karena tidak ada syarat spesifik untuk kesamaan 2 elemen di G, maka jika terdapat $x_1, x_2 \in G$ dengan $g_1 = x_1$ dan $g_2 = x_2$, kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$g_1 \otimes g_2 \;=\; g_1 \star g \star g_2 \;=\; x_1 \star g \star x_2 \;=\; x_1 \otimes x_2$$

Dengan demikian, untuk sebarang $g_1, g_2 \in G$, kita dapat menyatakan bahwa $g_1 \otimes g_2$ terdefinisi dengan baik.

• Langkah 2

Kita akan menunjukkan kebenaran bahwa operasi perkalian $\otimes$ bersifat asosiatif di G. Supaya lebih mendetilkan sifat asosiatif, kita akan mendefisikan ulang operasi perkalian $\otimes$ dengan menambahkan tanda kurung sebagaimana berikut.

$$\forall a, b \in G, \quad a \otimes b \;=\; (a \star g) \star b$$

Tanpa berlama-lama, ayo kita ambil sebarang $g_1, g_2, g_3 \in G$ dan membentuk $(g_1 \otimes g_2) \otimes g_3$. Berdasarkan definisi baru operasi perkalian $\otimes$, kita akan memperoleh hasil sebagai berikut.

$$(g_1 \otimes g_2) \otimes g_3 \;=\; ((g_1 \star g) \star g_2) \otimes g_3$$

Melanjutkan operasi perkalian $\otimes$ dengan g_3 akan diperoleh hasil sebagai berikut.

$$((g_1 \star g) \star g_2) \otimes g_3 \;=\; (((g_1 \star g) \star g_2) \star g) \star g_3$$

Perhatikan $(g_1 \star g) \star g_2$! Supaya mencolok, ayo kita beri warna biru.

$$((\ (g_1 \star g) \star g_2\ ) \star g) \star g_3$$

Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka operasi $\star$ bersifat asosiatif. Dengan demikian $(g_1 \star g) \star g_2 \;=\; g_1 \star (g \star g_2)$ dan kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$((\ (g_1 \star g) \star g_2\ ) \star g) \star g_3 \;=\; ((\ g_1 \star (g \star g_2)\ ) \star g) \star g_3$$

Karena g dan g_2 adalah elemen di G, serta $(G, \star)$ adalah grup, maka jelas bahwa $g \star g_2 \in G$. Katakanlah $g \star g_2 \;=\; \alpha$ untuk suatu $\alpha \in G$. Dengan demikian kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$((\ g_1 \star (g \star g_2)\ ) \star g) \star g_3 \;=\; ((g_1 \star \alpha) \star g) \star g_3$$

Perhatikan $(g_1 \star \alpha) \star g$! Supaya mencolok, ayo kita beri warna merah.

$$((g_1 \star \alpha) \star g) \star g_3$$

Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka operasi $\star$ bersifat asosiatif. Dengan demikian $(g_1 \star \alpha) \star g \;=\; g_1 \star (\alpha \star g)$ dan kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$((g_1 \star \alpha) \star g) \star g_3 \;=\; (g_1 \star (\alpha \star g)) \star g_3$$

Karena α dan g adalah elemen di G, serta $(G, \star)$ adalah grup, maka jelas bahwa $\alpha \star g \in G$. Katakanlah $\alpha \star g \;=\; \beta$ untuk suatu $\beta \in G$. Dengan demikian kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$(g_1 \star (\alpha \star g)) \star g_3 \;=\; (g_1 \star \beta) \star g_3$$

Perhatikan $(g_1 \star \beta) \star g_3$! Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka operasi $\star$ bersifat asosiatif. Dengan demikian kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$(g_1 \star \beta) \star g_3 \;=\; g_1 \star (\beta \star g_3).$$

Ayo kita substitusikan kembali $\beta = \alpha \star g$. Hasilnya adalah sebagai berikut.

$$g_1 \star (\beta \star g_3) \;=\; g_1 \star ((\alpha \star g) \star g_3)$$

Perhatikan $(\alpha \star g) \star g_3$! Supaya mencolok, ayo kita beri warna biru.

$$g_1 \star (\; {\color{blue}(\alpha \star g) \star g_3} \;)$$

Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka operasi $\star$ bersifat asosiatif. Dengan demikian $(\alpha \star g) \star g_3 \;=\; \alpha \star (g \star g_3)$ dan kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$g_1 \star (\; {\color{blue}(\alpha \star g) \star g_3} \;) \;=\; g_1 \star (\; {\color{blue}\alpha \star (g \star g_3)} \;)$$

Ayo kita substitusikan kembali $\alpha = g \star g_2$. Hasilnya adalah sebagai berikut.

$$g_1 \star (\alpha \star (g \star g_3)) \;=\; g_1 \star (\; (g \star g_2) \; \star (g \star g_3))$$

Karena g dan g_3 adalah elemen di G, serta $(G, \star)$ adalah grup, maka jelas bahwa $g \star g_3 \in G$. Katakanlah $g \star g_3 = \delta$ untuk suatu $\delta \in G$ dan kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$g_1 \star (\; (g \star g_2) \; \star (g \star g_3)) \;=\; g_1 \star (\; (g \star g_2) \; \star \; \delta)$$

Perhatikan $(g \star g_2) \; \star \; \delta$! Supaya mencolok, ayo kita beri warna merah.

$$g_1 \star (\; {\color{red}(g \star g_2) \; \star \; \delta})$$

Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka operasi $\star$ bersifat asosiatif. Dengan demikian $(g \star g_2) \star \delta \;=\; g \star (g_2 \star \delta)$ dan kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$g_1 \star (\; {\color{red}(g \star g_2) \; \star \; \delta}) \;=\; g_1 \star (\; {\color{red}g \; \star \; (g_2 \star \delta)})$$

Karena g_2 dan δ adalah elemen di G, serta $(G, \star)$ adalah grup, maka jelas bahwa $g_2 \star \delta \in G$. Katakanlah $g_2 \star \delta = \epsilon$ untuk suatu $\epsilon \in G$. Dengan demikian kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$g_1 \star (\; g \; \star \; (g_2 \star \delta)) \;=\; g_1 \star (\; g \; \star \; \epsilon)$$

Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka operasi $\star$ bersifat asosiatif. Dengan demikian kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$g_1 \star (\; g \; \star \; \epsilon) \;=\; (g_1 \star g) \; \star \; \epsilon$$

Ayo kita substitusikan kembali $\epsilon = g_2 \star \delta$. Hasilnya adalah sebagai berikut.

$$(g_1 \star g) \ \star \ \epsilon \ = \ (g_1 \star g) \ \star \ (g_2 \star \delta)$$

Ayo kita substitusikan kembali $\delta = g \star g_3$. Hasilnya adalah sebagai berikut.

$$(g_1 \star g) \ \star \ (g_2 \star \delta) \ = \ (g_1 \star g) \ \star \ (g_2 \star (g \star g_3))$$

Perhatikan $g_2 \star (g \star g_3)$! Supaya mencolok, ayo kita beri warna biru.

$$(g_1 \star g) \ \star \ (g_2 \star (g \star g_3))$$

Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka operasi $\star$ bersifat asosiatif. Dengan demikian $g_2 \star (g \star g_3) \ = \ (g_2 \star g \star)\, g_3$ dan kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$(g_1 \star g) \ \star \ (g_2 \star (g \star g_3)) \ = \ (g_1 \star g) \ \star \ ((g_2 \star g) \star g_3)$$

Berdasarkan definisi operasi perkalian $\otimes$ kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$(g_2 \star g) \star g_3 \ = \ g_2 \otimes g_3.$$

Dengan demikian pula kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$(g_1 \star g) \ \star \ ((g_2 \star g) \star g_3) \ = \ (g_1 \star g) \ \star \ (g_2 \otimes g_3)$$

Berdasarkan definisi operasi perkalian $\otimes$ kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$(g_1 \star g) \ \star \ (g_2 \otimes g_3) \ = \ g_1 \otimes (g_2 \otimes g_3)$$

Dengan demikian, karena pada akhirnya (*fiuh!*) diperoleh persamaan:

$$(g_1 \otimes g_2) \otimes g_3 \ = \ g_1 \otimes (g_2 \otimes g_3)$$

untuk sebarang $g_1, g_2, g_3 \in G$, maka kita dapat menyatakan bahwa benar operasi perkalian $\otimes$ bersifat asosiatif di G.

- **Langkah 3**

Kita akan menunjukkan kebenaran bahwa G memuat elemen identitas terhadap operasi perkalian $\otimes$.

Misalkan $e_{\otimes} \in G$ adalah elemen identitas terhadap operasi perkalian $\otimes$. Dengan demikian, untuk sebarang $a \in G$ akan berlaku persamaan berikut.

$$a \otimes e_{\otimes} = e_{\otimes} \otimes a = a$$

Pertanyaannya, wujud $e_{\otimes}$ itu seperti apa?

Untuk menjawab pertanyaan tersebut ayo kita jabarkan $a \otimes e_{\otimes}$ dan $e_{\otimes} \otimes a$ sesuai definisi operasi perkalian $\otimes$.

- $a \otimes e_{\otimes} \;=\; (a \star g) \star e_{\otimes}$
- $e_{\otimes} \otimes a \;=\; (e_{\otimes} \star g) \star a$

Selanjutnya, karena $a \otimes e_{\otimes} = a$, maka akan diperoleh persamaan berikut.

$$(a \star g) \star e_{\otimes} = a$$

Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka operasi $\star$ bersifat asosiatif. Dengan demikian kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$(a \star g) \star e_{\otimes} = a \star (g \star e_{\otimes}) = a$$

Perhatikan! Elemen g dan $e_{\otimes}$ adalah elemen di G! Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka elemen g pasti memiliki invers terhadap operasi $\star$. Sebut elemen invers tersebut sebagai g^{-1}.

Nah, jika kita menetapkan $e_{\otimes} = g^{-1}$, maka kita akan mendapatkan hasil sebagai berikut.

- $a \otimes e_{\otimes} \;=\; a \otimes g^{-1} \;=\; (a \star g) \star g^{-1} \;=\; a \star (g \star g^{-1}) \;=\; a \star e \;=\; a.$
- $e_{\otimes} \otimes a \;=\; g^{-1} \otimes a \;=\; (g^{-1} \star g) \star a \;=\; e \star a \;=\; a.$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan bahwa benar G memuat elemen identitas terhadap operasi perkalian $\otimes$ yaitu g^{-1}.

• Langkah 4

Kita akan menunjukkan kebenaran bahwa setiap elemen di G memiliki invers terhadap operasi perkalian $\otimes$.

Jangan lupa! Pada poin sebelumnya, kita sudah menunjukkan bahwa G memiliki elemen identitas terhadap operasi perkalian $\otimes$ yaitu g^{-1}.

Nah, sekarang kita ambil sebarang $a \in G$. Misalkan $\alpha \in G$ adalah elemen invers untuk a. Dengan demikian akan berlaku persamaan berikut.

$$a \otimes \alpha = \alpha \otimes a = g^{-1}.$$

Pertanyaannya, *"Wujud elemen α itu seperti apa?"*

Untuk menjawab pertanyaan tersebut ayo kita jabarkan $a \otimes \alpha$ dan $\alpha \otimes a$ sesuai definisi operasi perkalian $\otimes$ sebagai berikut.

- $a \otimes \alpha \; = \; (a \star g) \star \alpha$
- $\alpha \otimes a \; = \; (\alpha \star g) \star a$

Karena $a \otimes \alpha = g^{-1}$, maka akan diperoleh persamaan berikut.

$$(a \star g) \star \alpha = g^{-1}$$

Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka elemen a memiliki invers, yaitu a^{-1}. Ayo kita operasikan kedua ruas pada persamaan di atas dengan a^{-1} dari kiri.

$$(a \star g) \star \alpha = g^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad a^{-1} \star (\ (a \star g) \star \alpha\ ) = a^{-1} \star g^{-1}$$

Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka operasi $\star$ bersifat asosiatif. Dengan demikian kita akan memperoleh hasil sebagai berikut.

$$\begin{aligned} a^{-1} \star (\ (a \star g) \star \alpha\ ) = a^{-1} \star g^{-1} &\Longleftrightarrow \Big(a^{-1} \star (a \star g)\Big) \star \alpha = a^{-1} \star g^{-1} \\ &\Longleftrightarrow \Big((a^{-1} \star a) \star g\Big) \star \alpha = a^{-1} \star g^{-1} \\ &\Longleftrightarrow (e \star g) \star \alpha = a^{-1} \star g^{-1} \\ &\Longleftrightarrow g \star \alpha = a^{-1} \star g^{-1} \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita akan memperoleh persamaan $g \star \alpha = a^{-1} \star g^{-1}$.

Oke! Ayo lanjut dengan mengoperasikan kedua ruas pada persamaan $g \star \alpha = a^{-1} \star g^{-1}$ dengan g^{-1}.

$$\begin{aligned} g \star \alpha = a^{-1} \star g^{-1} &\iff g^{-1} \star (g \star \alpha) = g^{-1} \star \left(a^{-1} \star g^{-1}\right) \\ &\iff \left(g^{-1} \star g\right) \star \alpha = g^{-1} \star \left(a^{-1} \star g^{-1}\right) \\ &\iff e \star \alpha = g^{-1} \star \left(a^{-1} \star g^{-1}\right) \\ &\iff \alpha = g^{-1} \star \left(a^{-1} \star g^{-1}\right) \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, diperoleh persamaan $\alpha = g^{-1} \star (a^{-1} \star g^{-1})$. Untuk memeriksanya, ayo kita jabarkan $a \otimes \alpha$ dan $\alpha \otimes a$. Kita mulai dengan menjabarkan $a \otimes \alpha$.

$$\begin{aligned} a \otimes \alpha &= a \otimes \left(g^{-1} \star \left(a^{-1} \star g^{-1}\right)\right) \\ &= (a \star g) \star \left(g^{-1} \star \left(a^{-1} \star g^{-1}\right)\right) \\ &= a \star \left(g \star \left(g^{-1} \star \left(a^{-1} \star g^{-1}\right)\right)\right) \\ &= a \star \left(\left(g \star g^{-1}\right) \star \left(a^{-1} \star g^{-1}\right)\right) \\ &= a \star \left(e \star \left(a^{-1} \star g^{-1}\right)\right) \\ &= a \star \left(a^{-1} \star g^{-1}\right) \\ &= \left(a \star a^{-1}\right) \star g^{-1} \\ &= e \star g^{-1} \\ &= g^{-1} \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita memperoleh hasil persamaan $a \otimes \alpha = g^{-1}$.

Selanjutnya, kita jabarkan $\alpha \otimes a$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\alpha \otimes a &= \left(g^{-1} \star \left(a^{-1} \star g^{-1}\right)\right) \otimes a \\
&= \left(\left(g^{-1} \star \left(a^{-1} \star g^{-1}\right)\right) \star g\right) \star a \\
&= \left(\left(\left(g^{-1} \star a^{-1}\right) \star g^{-1}\right) \star g\right) \star a \\
&= \left(\left(g^{-1} \star a^{-1}\right) \star \left(g^{-1} \star g\right)\right) \star a \\
&= \left(\left(g^{-1} \star a^{-1}\right) \star e\right) \star a \\
&= \left(g^{-1} \star a^{-1}\right) \star a \\
&= g^{-1} \star \left(a^{-1} \star a\right) \\
&= g^{-1} \star e \\
&= g^{-1}
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita memperoleh hasil persamaan $\alpha \otimes a = g^{-1}$.

Berdasarkan penjabaran panjang di atas (*fiuuh!*), kita dapat menyimpulkan bahwa benar setiap elemen di G memuat elemen identitas terhadap operasi perkalian $\otimes$. Jika a merupakan sebarang elemen di G, maka inversnya terhadap operasi perkalian $\otimes$ adalah $g^{-1} \star a^{-1} \star g^{-1}$.

• Kesimpulan

Jadi, karena kita sudah berhasil menunjukkan kebenaran pada keempat langkah-langkah di atas, maka kita dapat menyatakan bahwa $(G, \otimes)$ adalah grup.

■

4

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 2

Soal

Let G be a group and let $a, b \in G$ be elements such that $ab = ba$. Prove that $o(ab) \mid o(a)o(b)$. (Order ab divides order a times order b)

Dikerjakan

Oke! ayo kita bahas soal ini dengan bahasa Indonesia terlebih dahulu untuk memudahkan pembaca yang baru belajar Pengantar Struktur Aljabar. ayo kita perjelas apa yang diinginkan soal.

Dari soal, kita tahu bahwa G adalah grup. Dengan demikian, jelas bahwa G adalah grup untuk **suatu operasi biner** kan? Untuk memudahkan, ayo kita simbolkan operasi biner ini dengan $\star$.

Dari soal juga diketahui dua elemen di G, yaitu a dan b, yang memiliki sifat $a \star b = b \star a$. Ingat! Sifat ini **hanya** berlaku bagi elemen a dan b **saja**! Sifat ini **tidak berlaku umum** bagi sebarang elemen di G!

Selanjutnya, ayo kita berkenalan dengan **order**! Eh iya! Istilah order ini "agak rancu" karena bisa mengacu ke:

1. order dari grup, atau
2. order dari suatu elemen di grup.

Supaya tidak bingung, ayo kita jabarkan kedua definisi order tersebut!

Definisi Order dari Grup

Diketahui $(G, \star)$ adalah grup.

Order dari grup G adalah banyaknya elemen di G. Suatu grup G memiliki 2 kemungkinan order:

- Jika grup G memiliki jumlah elemen yang **tidak berhingga** (*infinite*), maka order dari G adalah tidak berhingga.
- Jika grup G memiliki jumlah elemen yang **berhingga** (*finite*), maka order dari grup G adalah n, dengan $n \in \mathbb{Z}^+$ adalah banyaknya elemen di G.

Order dari grup G dinotasikan $o(G)$.

Definisi Order Suatu Elemen di Grup

Diketahui $(G, \star)$ adalah grup dan e adalah elemen identitas di $(G, \star)$.

Diketahui pula g adalah elemen di grup G.

- Jika $o(G)$ tidak berhingga, maka order dari g bisa tidak berhingga atau bisa juga berhingga.
- Jika $o(G)$ berhingga, maka order dari g adalah berhingga.

Jika order dari g adalah berhingga, maka order dari g adalah m, dengan m merupakan bilangan bulat positif $(\mathbb{Z}^+)$ terkecil sedemikian sehingga berlaku $g^m = e$.

Ingat yang dimaksud dengan g^m adalah $\underbrace{g \star g \star g \star g \star \ldots \star g}_{\text{sebanyak } m \text{ kali}}$.

Order dari elemen g dinotasikan $o(g)$.

Berdasarkan dua definisi di atas, alangkah baiknya kita **mengasumsikan** bahwa $o(G)$ adalah berhingga. Dengan demikian, untuk sebarang $g \in G$, kita dapat menemukan $m \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $g^m = e$.

Kembali ke soal!

Kita diperintahkan soal untuk membuktikan bahwa $o(a \star b) \mid o(a) \cdot o(b)$.

Definisi Notasi |
Diketahui x dan y adalah bilangan-bilangan real. Jika berlaku $x|y$, maka akan terdapat bilangan real r sedemikian sehingga berlaku persamaan:

$$y = x \cdot r$$

Sebagai tambahan informasi, jika berlaku $x|y$, maka bilangan x disebut membagi habis bilangan y.

Karena himpunan bilangan bulat $(\mathbb{Z})$ juga termasuk bilangan real, maka definisi ini juga berlaku untuk elemen-elemen bilangan bulat.

Berdasarkan **Definisi Notasi** | di atas, kita diperintahkan soal untuk menunjukkan bahwa terdapat bilangan bulat positif r sedemikian sehingga berlaku persamaan berikut.

$$o(a) \cdot o(b) = r \cdot o(a \star b)$$

Ingat! $o(a \star b)$, $o(a)$, dan $o(b)$ ketiganya adalah bilangan bulat positif!

Tunggu apa lagi!? Ayo kita segera mulai pembuktiannya dengan langkah demi langkah supaya lebih mudah dimengerti.

- **Langkah-1**

Diketahui $(G, \star)$ adalah grup. Diketahui pula terdapat dua elemen di G, yaitu a dan b, yang memiliki sifat:

$$a \star b = b \star a.$$

Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka jelas bahwa $a \star b \in G$.

Ingat! Tidak semua elemen di grup $(G, \star)$ memiliki sifat seperti elemen a dan b!

- **Langkah-2**

Karena kita mengasumsikan bahwa $o(G)$ adalah berhingga, maka order dari elemen a, b, dan $a \star b$ adalah berhingga. Kita tetapkan:

- $m_a \in \mathbb{Z}^+$ adalah order dari elemen a,
- $m_b \in \mathbb{Z}^+$ adalah order dari elemen b, dan
- $m_{ab} \in \mathbb{Z}^+$ adalah order dari elemen $a \star b$.

Dengan demikian:

- $x = m_a$ adalah bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi persamaan $a^x = e$.
- $x = m_b$ adalah bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi persamaan $b^x = e$.
- $x = m_{ab}$ adalah bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi persamaan $(a \star b)^x = e$.

Berdasarkan penjabaran di atas, tentu kita jelas paham bahwasanya akan berlaku persamaan di bawah ini.

$$a^{m_a} = b^{m_b} \ = \ (a \star b)^{m_{ab}} \ = \ e$$

- **Langkah-3**

Kita diperintahkan untuk menunjukkan bahwa benar berlaku $o(ab) \mid o(a)o(b)$. Dengan kata lain, kita akan menunjukkan bahwa benar berlaku $m_{ab} \mid (m_a \cdot m_b)$.

Nah, kita akan menunjukkan hal tersebut dengan metode **Reductio ad Absurdum**. Pertama-tama, kita akan mengandaikan bahwa ingkaran dari $m_{ab} \mid (m_a \cdot m_b)$ berlaku benar. Dengan kata lain, kita akan mengandaikan bahwa yang berlaku benar adalah $m_{ab} \nmid (m_a \cdot m_b)$.

Kemudian, kita akan melakukan serangkaian penalaran logis (yang semoga 😃) pada akhirnya akan memunculkan suatu kontradiksi. Dengan demikian, pengandaian yang kita lakukan itu adalah sesuatu hal yang salah. Dengan demikian, yang berlaku benar adalah pernyataan yang tidak diandaikan, yaitu $m_{ab} \mid (m_a \cdot m_b)$.

Paham toh?

• Langkah-4

Oke! Kita mulai dengan mengandaikan bahwa yang berlaku benar adalah:

$$m_{ab} \nmid (m_a \cdot m_b).$$

Dengan demikian, m_{ab} tidak membagi habis $m_a \cdot m_b$. Dengan kata lain, akan berlaku persamaan:

$$m_a \cdot m_b = (m_{ab} \cdot r) + s$$

untuk suatu $r, s \in \mathbb{Z}^+$ dengan $1 \leq s < m_{ab}$.

• Langkah-5

Selanjutnya, perhatikan teorema berikut!

Teorema 2.1

Diketahui $(G, \star)$ grup dan $a, b \in G$ dengan sifat $a \star b = b \star a$.

Untuk sebarang $n \in \mathbb{Z}^+$ akan berlaku:

$$(a \star b)^n = a^n \star b^n$$

Pembuktian teorema ini ada di halaman berikutnya.

Berdasarkan **Teorema 2.1** di atas, kita akan memperoleh persamaan $(a \star b)^{m_a \cdot m_b} = e$. Penjabarannya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
(a \star b)^{m_a \cdot m_b} &= a^{m_a \cdot m_b} \star b^{m_a \cdot m_b} \\
&= a^{m_a \cdot m_b} \star b^{m_b \cdot m_a} \\
&= (a^{m_a})^{m_b} \star (b^{m_b})^{m_a} \\
&= e^{m_b} \star e^{m_a} \\
&= e \star e \\
&= e
\end{aligned}$$

Selain itu, karena pada **Langkah-4** berlaku persamaan:

$$m_a \cdot m_b = (m_{ab} \cdot r) + s$$

untuk suatu $r, s \in \mathbb{Z}^+$ dengan $1 \leq s < m_{ab}$, maka kita akan mendapatkan persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
(a \star b)^{m_a \cdot m_b} &= (a \star b)^{(m_{ab} \cdot r) + s} \\
&= (a \star b)^{m_{ab} \cdot r} \ \star \ (a \star b)^s \\
&= ((a \star b)^{m_{ab}})^r \ \star \ (a \star b)^s \\
&= e^r \ \star \ (a \star b)^s \\
&= e \ \star \ (a \star b)^s \\
&= (a \star b)^s
\end{aligned}$$

- **Langkah-6**

Berdasarkan hasil dua penjabaran pada **Langkah-5** di atas, kita akan memperoleh persamaan, yaitu:

1. $(a \star b)^{m_a \cdot m_b} \ = \ e$, dan
2. $(a \star b)^{m_a \cdot m_b} \ = \ (a \star b)^s$.

Muncul kontradiksi!

Lho, kenapa kok kontradiksi?

Karena m_{ab} adalah order dari $a \star b$, itu berarti m_{ab} adalah bilangan bulat positif **terkecil** yang memenuhi persamaan $(a \star b)^m = e$.

Sementara itu, karena adanya syarat $1 \leq s < m_{ab}$, ini menyebabkan s adalah bilangan positif yang **lebih kecil** dari m_{ab} yang memenuhi persamaan $(a \star b)^m = e$.

Kedua hal yang saling bertolak belakang ini tidak mungkin terjadi!

Kontradiksi dong ya!

- **Kesimpulan**

Karena pada **Langkah-6** muncul kontradiksi, maka pengandaian yang kita lakukan itu adalah sesuatu hal yang salah. Dengan kata lain, pengandaian bahwa yang benar berlaku adalah:

$$m_{ab} \nmid (m_a \cdot m_b)$$

adalah sesuatu yang **SALAH!**

Jadi, yang berlaku benar adalah pernyataan yang tidak diandaikan, yaitu $m_{ab} \mid (m_a \cdot m_b)$. Dengan kata lain, yang benar $o(ab) \mid o(a)o(b)$.

■

5

Ekstra!
Penjelasan Tambahan 1
Ujian Tengah Semester
Soal Nomor 2

Tentang

Diketahui $(G, \star)$ grup dan $a, b \in G$ dengan sifat $a \star b = b \star a$.

Untuk sebarang $n \in \mathbb{Z}^+$ akan berlaku:

$$(a \star b)^n = a^n \star b^n$$

Dikerjakan

Sesuai definisi:

$$(a \star b)^n \ = \ \underbrace{(a \star b) \star (a \star b) \star (a \star b) \star (a \star b) \star ... \star (a \star b)}_{\text{sebanyak } n \text{ kali}}.$$

Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka operasi $\star$ bersifat asosiatif. Dengan demikian, kita dapat memindah posisi tanda kurung menjadi seperti ini.

$$\underbrace{(a \star b) \star (a \star b) \star (a \star b) \star (a \star b) \star ... \star (a \star b)}_{\text{sebanyak } n \text{ kali}} \ = \ a \star (b \star a) \star (b \star a) \star (b \star a) \star ... \star (b \star a) \star b.$$

Berdasarkan sifat $a \star b = b \star a$, kita akan memperoleh persamaan ini.

$$a \star (b \star a) \star (b \star a) \star (b \star a) \star ... \star (b \star a) \star b \;=\; a \star (a \star b) \star (a \star b) \star (a \star b) \star ... \star (a \star b) \star b.$$

Menggunakan sifat asosiatif operasi $\star$, kita dapat memindah posisi tanda kurung menjadi seperti ini.

$$a \star (a \star b) \star (a \star b) \star (a \star b) \star ... \star (a \star b) \star b \;=\; (a \star a) \star (b \star a) \star (b \star a) \star ... \star (b \star a) \star (b \star b).$$

Dengan mengulangi langkah-langkah yang serupa, kita akan mendapatkan hasil serupa ini.

$$(a \star a \star a) \star (b \star a) \star ... \star (b \star a) \star (b \star b \star b)$$

$$(a \star a \star a \star a) \star (b \star a) \star ... \star (b \star a) \star (b \star b \star b \star b)$$

$$(a \star a \star a \star a \star a) \star (b \star a) \star ... \star (b \star a) \star (b \star b \star b \star b \star b)$$

...dst

Pada akhirnya, kita akan mendapatkan persamaan berikut.

$$\underbrace{(a \star b) \star (a \star b) \star (a \star b) \star (a \star b) \star ... \star (a \star b)}_{\text{sebanyak } n \text{ kali}} \;=\; \underbrace{a \star a \star a \star ... \star a}_{\text{sebanyak } n \text{ kali}} \star \underbrace{b \star b \star b \star ... \star b}_{\text{sebanyak } n \text{ kali}}.$$

Karena $\underbrace{a \star a \star a \star ... \star a}_{\text{sebanyak } n \text{ kali}} = a^n$ dan $\underbrace{b \star b \star b \star ... \star b}_{\text{sebanyak } n \text{ kali}} = b^n$, maka diperoleh hasil akhir berikut.

$$(a \star b)^n \;=\; \underbrace{(a \star b) \star (a \star b) \star (a \star b) \star (a \star b) \star ... \star (a \star b)}_{\text{sebanyak } n \text{ kali}} \;=\; a^n \;\star\; b^n.$$

■

6

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 3

Soal

Misalkan G grup dan H_1, H_2 subgrup dari G. Buktikan $H_1 \cup H_2$ subgrup dari G jika dan hanya jika $H_1 \subseteq H_2$ atau $H_2 \subseteq H_1$.

Dikerjakan

Oke! Ayo kita perjelas apa yang diinginkan soal supaya tidak membingungkan pembaca yang baru belajar Pengantar Struktur Aljabar.

Dari soal, kita tahu bahwa G adalah grup dan H_1 dan H_2 adalah suatu subrgup-subgrup dari G.

Karena diketahui G adalah grup, maka jelas G adalah grup untuk **suatu operasi biner** kan? Untuk memudahkan, mari kita simbolkan operasi biner ini dengan $\star$. Jadi, $(G, \star)$ adalah grup.

Kemudian, karena H_1 dan H_2 adalah suatu subgrup-subgrup dari G, maka kita dapat mengasumsikan bahwa $(H_1, \star)$ dan $(H_2, \star)$ juga adalah grup.

Perhatikan! Karena H_1 dan H_2 adalah suatu subgrup-subgrup dari G, maka jelas akan berlaku $H_1 \subseteq G$ dan $H_2 \subseteq G$.

Nah, misi utama kita sebetulnya adalah di bawah ini.

Misi Utama yang Harus Ditunjukkan Kebenarannya

Kita harus menunjukkan bahwa 2 pernyataan ini berlaku benar.

1. Jika $H_1 \cup H_2$ subgrup dari G, maka $H_1 \subseteq H_2$ atau $H_2 \subseteq H_1$.
2. Jika $H_1 \subseteq H_2$ atau $H_2 \subseteq H_1$, maka $H_1 \cup H_2$ subgrup dari G.

Jika dua pernyataan di atas berlaku benar, maka kita bisa menyatakan bahwa $H_1 \cup H_2$ subgrup dari G jika dan hanya jika $H_1 \subseteq H_2$ atau $H_2 \subseteq H_1$.

Tunggu apa lagi!? Ayo kita segera mulai pembuktiannya!

• (1) Menunjukkan kebenaran Pernyataan-1

Kita akan menunjukkan kebenaran pernyataan berikut:

Jika $H_1 \cup H_2$ subgrup dari G, maka $H_1 \subseteq H_2$ atau $H_2 \subseteq H_1$

dengan menggunakan metode **Reductio ad Absurdum**. Pertama-tama, kita akan mengandaikan bahwa ingkaran dari pernyataan di atas berlaku benar. Dengan kata lain, kita akan mengandaikan bahwa yang berlaku benar adalah pernyataan:

$H_1 \cup H_2$ subgrup dari G, akan tetapi $H_1 \nsubseteq H_2$ dan $H_2 \nsubseteq H_1$

Kemudian, kita akan melakukan serangkaian penalaran logis (yang semoga 😃) pada akhirnya akan memunculkan suatu kontradiksi. Dengan demikian, pengandaian yang kita lakukan itu adalah sesuatu hal yang salah. Dengan demikian, yang berlaku benar adalah pernyataan yang tidak diandaikan.

Oke! Kita akan mulai pembuktian untuk bagian (1) ini dengan langkah demi langkah supaya mudah untuk dipahami.

•• (1) Langkah-1

Seperti yang sudah disinggung di paragraf atas, kita akan mengandaikan bahwa pernyataan:

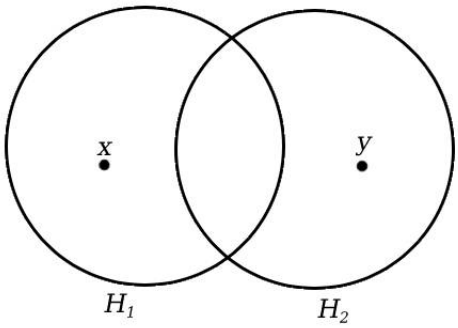
$$H_1 \cup H_2 \text{ subgrup dari } G, \text{ akan tetapi } H_1 \not\subseteq H_2 \text{ dan } H_2 \not\subseteq H_1$$

adalah pernyataan yang benar.

•• (1) Langkah-2

Karena $H_1 \cup H_2$ adalah subgrup dari G, maka kita dapat menyimpulkan bahwa $H_1 \cup H_2$ **bukan himpunan kosong**.

Karena $H_1 \not\subseteq H_2$, maka terdapat suatu elemen $x \in H_1$ akan tetapi $x \notin H_2$. Selain itu, Karena $H_2 \not\subseteq H_1$, maka terdapat suatu elemen $y \in H_2$ akan tetapi $y \notin H_1$. Dengan demikian $x, y \in H_1 \cup H_2$. Lebih enaknya, perhatikan ilustrasi berikut!



•• (1) Langkah-3

Karena $H_1 \cup H_2$ adalah subgrup dari G, maka $x \star y \in H_1 \cup H_2$. Dengan demikian, **salah satu** dari 2 kemungkinan di bawah **pasti terjadi**.

- $x \star y \in H_1$, atau
- $x \star y \in H_2$.

Ayo kita selidiki dua kemungkinan tersebut!

•• (1) Langkah-4

Jika yang terjadi adalah $x \star y \in H_1$, maka $x \star y = h_1$ untuk suatu $h_1 \in H_1$. Karena $x \in H_1$ dan $(H_1, \star)$ adalah grup, maka elemen x memiliki invers, yaitu $x^{-1} \in H_1$.

Apabila x^{-1} dioperasikan dari kiri pada persamaan $x \star y = h_1$, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x \star y = h_1 &\iff x^{-1} \star x \star y = x^{-1} \star h_1 \\ &\iff \left(x^{-1} \star x\right) \star y = x^{-1} \star h_1 \\ &\iff e \star y = x^{-1} \star h_1 \\ &\iff y = x^{-1} \star h_1 \end{aligned}$$

Karena $x^{-1}, h_1 \in H_1$, maka $x^{-1} \star h_1 \in H_1$. Karena $y = x^{-1} \star h_1$, maka $y \in H_1$.

Hal ini **tidak mungkin terjadi** karena pada **Langkah-2** elemen y memiliki sifat: $y \in H_2$, akan tetapi $y \notin H_1$. Dengan demikian, kemungkinan bahwa $x \star y \in H_1$ tidak mungkin terjadi.

•• (1) Langkah-5

Jika yang terjadi adalah $x \star y \in H_2$, maka $x \star y = h_2$ untuk suatu $h_2 \in H_2$. Karena $y \in H_2$ dan $(H_2, \star)$ adalah grup, maka elemen y memiliki invers, yaitu $y^{-1} \in H_2$.

Apabila y^{-1} dioperasikan dari kanan pada persamaan $x \star y = h_2$, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x \star y = h_2 &\iff x \star y \star y^{-1} = h_2 \star y^{-1} \\ &\iff x = h_2 \star y^{-1} \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita akan memperoleh $x = h_2 \star y^{-1}$.

Karena $y^{-1}, h_2 \in H_2$, maka $y^{-1} \star h_2 \in H_2$. Karena $x = y^{-1}, h_2 \in H_2$, maka $x \in H_2$.

Hal ini **tidak mungkin terjadi** karena pada **Langkah-2** elemen x memiliki sifat: $x \in H_1$ akan tetapi $x \notin H_2$. Dengan demikian, kemungkinan bahwa $x \star y \in H_2$ tidak mungkin terjadi.

•• (1) Langkah-6

Muncul kontradiksi!

Seharusnya, **salah satu** dari 2 kemungkinan di bawah **pasti terjadi**.

- $x \star y \in H_1$.
- $x \star y \in H_2$.

•• (1) Kesimpulan

Karena pada **Langkah-6** muncul kontradiksi, maka pengandaian yang kita lakukan itu adalah sesuatu hal yang salah. Dengan kata lain, pengandaian bahwa yang benar berlaku adalah:

$$H_1 \cup H_2 \text{ subgrup dari } G, \text{ akan tetapi } H_1 \nsubseteq H_2 \text{ dan } H_2 \nsubseteq H_1$$

adalah sesuatu yang **SALAH!**

Jadi, yang berlaku benar adalah pernyataan yang tidak diandaikan, yaitu:

$$\text{Jika } H_1 \cup H_2 \text{ subgrup dari } G, \text{ maka } H_1 \subseteq H_2 \text{ atau } H_2 \subseteq H_1$$

• (2) Menunjukkan kebenaran Pernyataan-2

Kita akan menunjukkan bahwa jika $H_1 \subseteq H_2$ atau $H_2 \subseteq H_1$, maka $H_1 \cup H_2$ subgrup dari G.

Eeeeeh....

Pernyataan ini sebetulnya jelas sekali ya kebenarannya.

Jika yang terjadi adalah $H_1 \subseteq H_2$, maka $H_1 \cup H_2 = H_2$. Jelas di soal diketahui bahwa H_2 adalah subgrup dari G.

Jika yang terjadi adalah $H_2 \subseteq H_1$, maka $H_1 \cup H_2 = H_1$. Jelas di soal diketahui bahwa H_1 adalah subgrup dari G.

Jadi, pernyataan bahwa jika $H_1 \subseteq H_2$ atau $H_2 \subseteq H_1$, maka $H_1 \cup H_2$ subgrup dari G adalah benar.

- **Kesimpulan**

Berdasarkan penjabaran di atas, karena **Misi Utama yang Harus Ditunjukkan Kebenarannya** sudah terbukti kebenarannya, maka kita dapat menyatakan bahwa pernyataan berikut adalah benar.

$$H_1 \cup H_2 \text{ subgrup dari } G \text{ jika dan hanya jika } H_1 \subseteq H_2 \text{ atau } H_2 \subseteq H_1$$

■

7

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 4

Soal

Jika G grup berorder $2n$, tunjukkan bahwa banyaknya elemen dari G yang berorder 2 adalah ganjil.

Dikerjakan

Pertama-tama, ayo kita berkenalan dengan **order**! Eh iya! Istilah order ini "agak rancu" karena bisa mengacu ke:

1. order dari grup, atau
2. order dari suatu elemen di grup.

Supaya tidak bingung, ayo kita jabarkan kedua definisi order tersebut!

Definisi Order dari Grup

Diketahui $(G, \star)$ adalah grup.

Order dari grup G adalah banyaknya elemen di G. Suatu grup G memiliki 2 kemungkinan order:

- Jika grup G memiliki jumlah elemen yang **tidak berhingga** (*infinite*), maka order dari G adalah tidak berhingga.
- Jika grup G memiliki jumlah elemen yang **berhingga** (*finite*), maka order dari grup G adalah n, dengan $n \in \mathbb{Z}^+$ adalah banyaknya elemen di G.

Order dari grup G dinotasikan $o(G)$.

Definisi Order Suatu Elemen di Grup

Diketahui $(G, \star)$ adalah grup dan e adalah elemen identitas di $(G, \star)$.

Diketahui pula g adalah elemen di grup G.

- Jika $o(G)$ tidak berhingga, maka order dari g bisa tidak berhingga atau bisa juga berhingga.
- Jika $o(G)$ berhingga, maka order dari g adalah berhingga.

Jika order dari g adalah berhingga, maka order dari g adalah m, dengan m merupakan bilangan bulat positif ($\mathbb{Z}^+$) terkecil sedemikian sehingga berlaku $g^m = e$.

Ingat yang dimaksud dengan g^m adalah $\underbrace{g \star g \star g \star g \star \ldots \star g}_{\text{sebanyak } m \text{ kali}}$.

Order dari elemen g dinotasikan $o(g)$.

Berdasarkan dua definisi di atas, alangkah baiknya kita **mengasumsikan** bahwa $o(G)$ adalah berhingga. Dengan demikian, untuk sebarang $g \in G$, kita dapat menemukan $m \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $g^m = e$.

***

Tunggu apa lagi!? Ayo kita segera mulai pembuktiannya dengan langkah demi langkah supaya lebih mudah dimengerti.

- **Langkah-1**

Kita punya grup G terhadap operasi biner $\star$. Jadi, $(G, \star)$ adalah grup.

Ingat! Jika G adalah grup, maka G **bukan himpunan kosong!**

Karena diketahui G adalah grup berorder $2n$, maka berdasarkan definisi order dari grup di atas, kita bisa menyatakan bahwa grup G memiliki sejumlah $2n$ elemen. Dengan demikian, banyaknya elemen G bisa 2 ($n = 1$), bisa 4 ($n = 2$), bisa 6 ($n = 3$), bahkan bisa juga 10 triliun lho! (duh)

Eh, *by the way*, $2n$ itu kan sama saja dengan bilangan genap kan ya? Jadi, kita bisa bilang bahwa G adalah grup yang beroder genap.

- **Langkah-2**

Perhatikan! Berapapun buaaanyaknya jumlah elemen G, pasti grup G ini **memuat elemen identitas**. Ya toh?

Seperti biasa, elemen identitas di grup G ini yang kita simbolkan dengan e. Dengan demikian, kita bisa menjabarkan elemen-elemen di G sebagai ini.

$$G = \Big\{e,\ \ g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ \cdots,\ g_{(2n-2)},\ g_{(2n-1)}\Big\}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, jelas ya bahwa $g_i \neq e$ dan juga $g_i \neq g_j$.

Nah, ini!

Berdasarkan penjabaran elemen-elemen grup G di atas itu kan terlihat bahwasanya jika elemen e **disingkirkan** dari grup G, maka elemen-elemen yang tersisa di grup G akan berjumlah $2n - 1$ alias berjumlah ganjil.

Bagaimana? Kira-kira sudah "tercium" belum "aroma *sangit*" pembuktian yang bakal kita lakukan? 😀

- **Langkah-3**

Lanjut!

Berdasarkan sifat grup siklik (eh, atau teori grup hingga ya? 😀), karena order dari grup G adalah berhingga, maka order setiap elemennya juga berhingga. Dengan demikian, untuk setiap $g \in G$ kita dapat menemukan $m \in \mathbb{Z}^+$ dengan nilai yang paling kecil sedemikian sehingga berlaku $g^m = e$.

Karena untuk sebarang $m \in \mathbb{Z}^+$ akan berlaku $e^m = e$, maka mari kita singkirkan elemen identitas dari fokus pengamatan. Marilah kita mengamati elemen $g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ \ldots$ hingga $g_{(2n-1)}$.

Ingat ya! Banyaknya elemen g_i yang kita amati itu adalah ganjil. Karena $2n$ itu genap, maka $2n - 1$ pasti ganjil toh?

- **Langkah-4**

Selanjutnya, kita akan mengamati **invers** dari elemen-elemen $g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ \ldots$ hingga $g_{(2n-1)}$ tersebut.

Jelas dong ya! Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka setiap elemennya pasti punya invers terhadap operasi $\star$. Ya kan?

Nah, sekarang mari kita segarkan ingatan dengan teorema ketunggalan invers berikut.

Teorema Ketunggalan Invers di Grup

Diketahui $(G, \star)$ adalah grup dan g adalah sebarang elemen di G.

Terdapat dengan tunggal invers untuk g.

Dengan kata lain:

Jika terdapat $g_1, g_2 \in G$ yang memenuhi persamaan:

$$g \star g_1 = g_1 \star g = e \quad \text{dan} \quad g \star g_2 = g_2 \star g = e$$

maka pastilah berlaku persamaan $g_1 = g_2$.

Berdasarkan teorema di atas, ingat ya bahwa **setiap elemen di grup memiliki invers yang tunggal!**

- **Langkah-5**

Aaah, mari kita beralih sejenak ke "alam lain" untuk mengamati invers elemen-elemen di $\mathbb{Z}_4$. Sebagaimana yang kita tahu, $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3}\}$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan modulo 4. Elemen identitas di $\mathbb{Z}_4$ jelas adalah $\bar{0}$.

Nah, perhatikan bahwa:

- Invers untuk $\bar{1}$ adalah $\bar{3}$,
- Invers untuk $\bar{2}$ adalah $\bar{2}$ itu sendiri, dan
- Invers untuk $\bar{3}$ adalah $\bar{1}$.

Berdasarkan 3 poin di atas kita bisa mengambil kesimpulan bahwa:

Invers suatu elemen nonidentitas di suatu grup
dapat berupa elemen lain (other-inverse) atau elemen itu sendiri (self-inverse).

Berdasarkan contoh di atas, kita bisa menyatakan bahwa elemen $\bar{1}$ dan $\bar{3}$ tergolong *other-inverse*, sedangkan elemen $\bar{2}$ tergolong *self-inverse*.

Dari sini seharusnya "aroma *sangit*" pembuktian yang bakal kita lakukan sudah tercium tajam sekali. 😀

- **Langkah-6**

Sekarang ayo kita kembali ke elemen-elemen $g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ ...$ hingga $g_{(2n-1)}$ yang sedang kita amati. Jelas kita tidak tahu secara persis wujud setiap elemen g_i tersebut. Akan tetapi, kita dapat "menyusun" (*make an arrangement*) indeks-indeks elemen g_i sedemikian sehingga $(g_i,\ g_{(i+1)})$ merupakan **pasangan elemen *other-inverse***. Dengan demikian, kita akan memperoleh pasangan sebagai berikut.

- $(g_1, g_2) \implies g_1$ dan g_2 saling invers ($g_1 \star g_2 = g_2 \star g_1 = e$ dan $g_1 \neq g_2$).
- $(g_3, g_4) \implies g_3$ dan g_4 saling invers ($g_3 \star g_4 = g_4 \star g_3 = e$ dan $g_3 \neq g_4$).
- $(g_5, g_6) \implies g_5$ dan g_6 saling invers ($g_5 \star g_6 = g_6 \star g_5 = e$ dan $g_5 \neq g_6$).
- dan seterusnya.

Perhatikan! Proses pengelompokan di atas akan menghasilkan sejumlah m **pasangan**. Karena setiap pasangan terdiri dari 2 elemen (yang berbeda), maka proses pengelompokan di atas akan **mengelompokkan sejumlah** $2 \cdot m$ **elemen** di grup G. Jadi, ada sebanyak $2 \cdot m$ elemen di grup G yang tergolong *other-inverse*.

- **Langkah-7**

Nah! Perhatikan!

- Kita sedang mengamati himpunan $G' = \{g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ ...,\ g_{(2n-1)}\}$
- Sesuai penjabaran elemen-elemennya, jumlah elemen himpunan G' adalah ganjil, yaitu $2n-1$ dengan n adalah suatu bilangan asli.
- Setiap elemen di dalam himpunan G' tergolong sebagai *other-inverse* atau *self-inverse*. Suatu elemen tidak bisa berada di dua golongan sekaligus.
- Ada sebanyak $2 \cdot m$ elemen dari himpunan G' yang tergolong *other-inverse* dengan m adalah suatu bilangan asli.
- Dengan demikian, sisa elemen himpunan G' yang tergolong *self-inverse* adalah sebanyak r dengan r adalah suatu bilangan asli yang memenuhi persamaan:

$$2n - 1 \ = \ 2m + r$$

- Karena $2n-1$ adalah bilangan ganjil sementara $2m$ adalah bilangan genap, maka kita dapat menyimpulkan bahwa r adalah bilangan ganjil.

- **Kesimpulan**

Jadi, berdasarkan uraian pada **Langkah-7** kita bisa menyatakan bahwa elemen-elemen di dalam himpunan $\{g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ ...,\ g_{(2n-1)}\}$ yang tergolong *self-inverse* itu berjumlah ganjil. Dengan kata lain, jumlah elemen di dalam grup G yang berorder 2 adalah ganjil.

Ingat! Order elemen identitas itu 1!

■

8

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 1

Soal

Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3\}$.

Diketahui

$$S_3 = \Big\{ f : A \to A \;\mid\; f = \text{ pemetaan bijektif} \Big\}$$

merupakan grup terhadap operasi komposisi fungsi.

Diketahui juga bahwa himpunan $\mathbb{Z}_5^* = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}_5 \mid \bar{x} \neq \bar{0}\}$ merupakan grup terhadap operasi perkalian modulo di $\mathbb{Z}_5$.

Jika dibentuk pengaitan

$$\psi : S_3 \to \mathbb{Z}_5^*$$

dengan definisi

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\alpha(1)}$$

untuk setiap $\alpha \in S_3$, selidiki apakah pengaitan ψ merupakan homomorfisma grup atau bukan! Jelaskan jawaban Saudara!

Dikerjakan

Ayo kita kerjakan dengan langkah demi langkah supaya lebih mudah dimengerti.

- **Langkah-1**

Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3\}$. Himpunan A ini disebut sebagai himpunan objek.

Sebetulnya, supaya tidak membingungkan, "seharusnya" himpunan objek A ini dinyatakan sebagai $A = \{O_1, O_2, O_3\}$. Dengan demikian, terlihat jelas bahwa himpunan A memuat tiga objek, yaitu O_1, O_2, O_3.

Nah, jika himpunan objek A didefinisikan sebagai $A = \{1, 2, 3\}$, nanti malah rawan membingungkan. Apakah 1,2, dan 3 itu dipandang sebagai objek ataukah sebagai angka. Ya toh?

Selanjutnya, ingat bahwa permutasi adalah suatu pemetaan/fungsi bijektif dari himpunan objek A ke himpunan A itu sendiri. Untuk mempersingkat istilah, kita menyebut permutasi sebagai pemetaan bijektif dari-ke A.

Definisi Permutasi

Diketahui himpunan objek X.

τ adalah permutasi atas X jika dan hanya jika τ adalah pemetaan bijektif dari-ke X.

Jadi, ingat! Permutasi itu adalah pemetaan/fungsi bijektif. Dengan demikian, jika τ_1 dan τ_2 adalah sebarang permutasi atas A, maka kita bisa melakukan komposisi pemetaan, $\tau_1 \circ \tau_2$ ataupun $\tau_2 \circ \tau_1$.

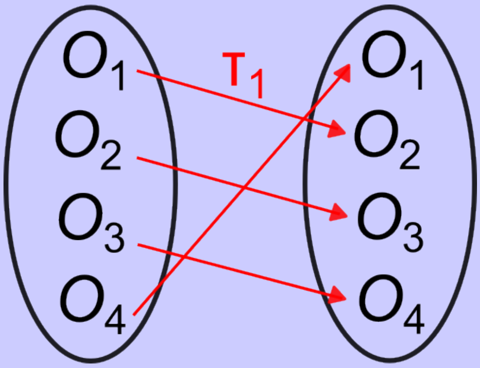
Contoh-1

Misalkan diketahui himpunan objek $X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ O_4\}$.

Nah, salah satu contoh permutasi atas X adalah τ_1 dengan definisi sebagai berikut.

$$\tau_1(O_1) = O_2,\ \tau_1(O_2) = O_3,\ \tau_1(O_3) = O_4,\ \tau_1(O_4) = O_1$$

Permutasi τ_1 bisa divisualisasikan sebagai ini.



Permutasi τ_1 juga bisa dinyatakan dalam notasi matriks seperti ini.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} O_1 & O_2 & O_3 & O_4 \\ O_2 & O_3 & O_4 & O_1 \end{pmatrix}$$

Notasi matriks untuk permutasi τ_1 di atas seringnya diringkas menjadi seperti ini.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Contoh-2

Misalkan diketahui himpunan objek $X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ O_4\}$.

Misalkan juga diketahui permutasi τ_1 dan τ_2 atas X dengan definisi sebagai berikut.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian kita akan punya definisi pemetaan sebagai berikut.

- $\tau_1(O_1) = O_2,\ \tau_1(O_2) = O_3,\ \tau_1(O_3) = O_4,\ \tau_1(O_4) = O_1$
- $\tau_2(O_1) = O_4,\ \tau_2(O_2) = O_1,\ \tau_2(O_3) = O_2,\ \tau_2(O_4) = O_3$

Dengan demikian hasil dari permutasi $\tau_1 \circ \tau_2$ atas X adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
(\tau_1 \circ \tau_2)(O_1) &= \tau_1(\tau_2(O_1)) = \tau_1(O_4) = O_1 \\
(\tau_1 \circ \tau_2)(O_2) &= \tau_1(\tau_2(O_2)) = \tau_1(O_1) = O_2 \\
(\tau_1 \circ \tau_2)(O_3) &= \tau_1(\tau_2(O_3)) = \tau_1(O_2) = O_3 \\
(\tau_1 \circ \tau_2)(O_4) &= \tau_1(\tau_2(O_4)) = \tau_1(O_3) = O_4
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, permutasi $\tau_1 \circ \tau_2$ bisa dinyatakan dalam notasi matriks seperti ini.

$$\tau_1 \circ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Definisi Permutasi Identitas

Diketahui bilangan asli n dan himpunan objek $X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ ...\ O_n\}$.

Permutasi identitas τ_0 atas X didefinisikan sebagai:

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & (n-1) & n \\ 1 & 2 & 3 & ... & (n-1) & n \end{pmatrix}$$

- **Langkah-2**

Selanjutnya, diketahui himpunan:

$$S_3 = \Big\{ f : A \to A \ \mid \ f = \text{ pemetaan bijektif} \Big\}$$

Definisi Himpunan Semua Permutasi atas X

Diketahui himpunan objek X.

Himpunan semua permutasi atas X dinotasikan sebagai S_X dengan definisi sebagai berikut.

$$S_X \ = \ \{\tau \ : \ \tau \text{ adalah permutasi atas } X\}$$

Jika banyaknya anggota himpunan X diketahui, yaitu diketahui akan adanya suatu bilangan asli n sedemikian sehingga $X = \{O_1, \ O_2, \ O_3, \ \ldots \ O_n\}$, maka himpunan S_X akan lebih sering disebut sebagai S_n.

Sebagai contoh, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$, akan tetapi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \notin S_4$

Berdasarkan syarat keanggotaan himpunan S_3, jelas sekali bahwa himpunan ini adalah **himpunan semua permutasi atas** A!

Karena himpunan objek $A = \{O_1, O_2, O_3\}$ memiliki 3 elemen, maka jumlah semua permutasi atas A adalah sebanyak $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ permutasi.

Apa saja 6 permutasi itu? Nih!

$$S_3 = \{\sigma_1, \ \sigma_2, \ \sigma_3, \ \sigma_4, \ \sigma_5, \ \sigma_6\} \text{ dengan:}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Seperti yang diketahui, $(S_3, \circ)$ adalah grup dengan $\circ$ sebagai notasi operasi komposisi fungsi.

- **Langkah-3**

Oke! Selanjutnya, diketahui juga bahwa himpunan $\mathbb{Z}_5^* = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}_5 \mid \bar{x} \neq \bar{0}\}$ merupakan grup terhadap operasi perkalian modulo di $\mathbb{Z}_5$.

Ayo, kita jabarkan elemen di $\mathbb{Z}_5^*$ supaya tidak bingung! Karena $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3},\ \bar{4}\}$, maka $\mathbb{Z}_5^* = \{\bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3},\ \bar{4}\}$.

Seperti yang diketahui, $(\mathbb{Z}_5^*, \otimes)$ adalah grup dengan $\otimes$ sebagai notasi operasi perkalian modulo di $\mathbb{Z}_5$. Sebagai contoh, $\bar{3} \otimes \bar{4} = \bar{2}$, karena $\bar{3} \otimes \bar{4} = \bar{1}\bar{2}$ dan $12 \bmod 5 = 2$.

- **Langkah-4**

Selanjutnya, ayo kita bahas pengaitan $\psi : S_3 \to \mathbb{Z}_5^*$!

Diketahui pengaitan $\psi : S_3 \to \mathbb{Z}_5^*$ dengan definisi:

$$\psi \overset{\text{def}}{=} \overline{\alpha(1)}.$$

Definisi pengaitan ψ ini mungkin sedikit membingungkan 😀. Akan tetapi, karena namanya pengaitan, jadi kita dapat membuat pasangan $\left(\sigma_i, \bar{j}\right)$ dengan $\sigma_i \in S_3$ dan $\bar{j} \in \mathbb{Z}_5^*$ yang memenuhi $\bar{j} = \overline{\sigma_i(1)}$.

Yah, supaya tidak bikin bingung, ayo kita beri contoh! Kita ambil $\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Dengan demikian, akan diperoleh persamaan $\sigma_6(1) = 2$. Akibatnya, $\overline{\sigma_6(1)} = \bar{2} \in \mathbb{Z}_5^*$.

Dengan cara yang serupa, kita akan mendapatkan persamaan-persamaan berikut.

$$\psi(\sigma_1) = \bar{1}$$

$$\psi(\sigma_2) = \bar{2}$$

$$\psi(\sigma_3) = \bar{3}$$

$$\psi(\sigma_4) = \bar{1}$$

$$\psi(\sigma_5) = \bar{3}$$

$$\psi(\sigma_6) = \bar{2}$$

- **Langkah-5**

Hmmm....

Dari akhir **Langkah-2** sudah "tercium bau busuk" nih.

Perhatikan! Tidak ada satu pun elemen di S_3 yang dipetakan ke elemen $\bar{4}$ di $\mathbb{Z}^*$!
Nah! Ini nih "bau busuk"-nya!

Menggunakan "bau busuk" ini, kita bisa menunjukkan bahwa ψ **bukan homomorfisma**.

Bagaimana caranya?

Kita pilih $\sigma_2, \sigma_5 \in S_3$ sebagaimana yang didefinisikan di **Langkah-3**. Jika kita komposisikan σ_2 dengan σ_5 akan diperoleh persamaan berikut.

$$\sigma_2 \circ \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \sigma_6$$

Karena $\sigma_2 \circ \sigma_5 = \sigma_6$, maka kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$\psi(\sigma_2 \circ \sigma_5) = \psi(\sigma_6) = \bar{2}$$

Akan tetapi,

$$\psi(\sigma_2) \otimes \psi(\sigma_5) = \bar{2} \otimes \bar{3} = \bar{1}$$

Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa berlaku pertidaksamaan $\psi(\sigma_i \circ \sigma_j) \neq \psi(\sigma_i) \otimes \psi(\sigma_j)$.

Padahal jika ψ adalah homomorfisma, maka untuk sebarang $\sigma_i, \sigma_j \in S_3$ haruslah berlaku persamaan $\psi(\sigma_i \circ \sigma_j) = \psi(\sigma_i) \otimes \psi(\sigma_j)$.

- **Kesimpulan**

Karena terdapat $\sigma_2, \sigma_5 \in S_3$ sedemikian sehingga berlaku $\psi(\sigma_2 \circ \sigma_5) \neq \psi(\sigma_2) \otimes \psi(\sigma_5)$, maka kita bisa menyatakan bahwa ψ bukan homomorfisma.

$\blacksquare$

9

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 2

Soal

Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Diketahui

$$S_6 = \left\{ f : A \to A \ \mid \ f = \text{ pemetaan bijektif} \right\}$$

merupakan grup terhadap operasi komposisi fungsi.

(a) Apakah ada $f \in S_6$ yang memenuhi $o(f) = 4$? Jelaskan jawaban saudara!

(b) Apakah ada $f \in S_6$ yang memenuhi $o(f) = 7$? Jelaskan jawaban saudara!

(c) Jika $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, tentukan $f^{2.021}$!

Sebagai catatan $f^{2.021} = \underbrace{f \circ f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{sebanyak } 2.021}$.

Dikerjakan

Ayo kita kerjakan dengan langkah demi langkah supaya lebih mudah dimengerti.

- **Langkah-1**

Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Himpunan A ini disebut sebagai himpunan objek.

Sebetulnya, supaya tidak membingungkan, "seharusnya" himpunan objek A ini dinyatakan sebagai $A = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$. Dengan demikian, terlihat jelas bahwa himpunan A memuat enam objek, yaitu O_1 hingga O_6.

Nah, jika himpunan objek A didefinisikan sebagai $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, nanti malah rawan membingungkan. Apakah 1,2,3,4,5,6 itu dipandang sebagai objek ataukah sebagai angka. Ya toh?

Selanjutnya, ingat bahwa permutasi adalah suatu pemetaan/fungsi bijektif dari himpunan objek A ke himpunan A itu sendiri. Untuk mempersingkat istilah, kita menyebut permutasi sebagai pemetaan bijektif dari-ke A.

Definisi Permutasi

Diketahui himpunan objek X.

τ adalah permutasi atas X jika dan hanya jika τ adalah pemetaan bijektif dari-ke X.

Jadi, ingat! Permutasi itu adalah pemetaan/fungsi bijektif. Dengan demikian, jika τ_1 dan τ_2 adalah sebarang permutasi atas A, maka kita bisa melakukan komposisi pemetaan, $\tau_1 \circ \tau_2$ ataupun $\tau_2 \circ \tau_1$.

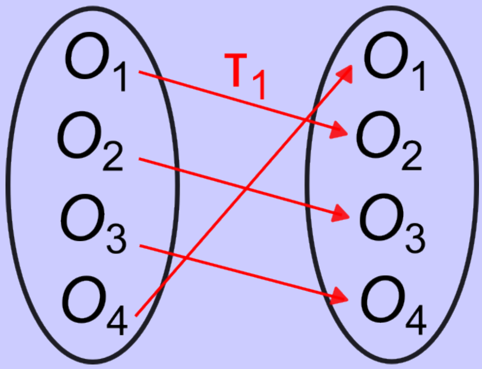
Contoh-1

Misalkan diketahui himpunan objek $X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ O_4\}$.

Nah, salah satu contoh permutasi atas X adalah τ_1 dengan definisi sebagai berikut.

$$\tau_1(O_1) = O_2,\ \tau_1(O_2) = O_3,\ \tau_1(O_3) = O_4,\ \tau_1(O_4) = O_1$$

Permutasi τ_1 bisa divisualisasikan sebagai ini.



Permutasi τ_1 juga bisa dinyatakan dalam notasi matriks seperti ini.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} O_1 & O_2 & O_3 & O_4 \\ O_2 & O_3 & O_4 & O_1 \end{pmatrix}$$

Notasi matriks untuk permutasi τ_1 di atas seringnya diringkas menjadi seperti ini.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Contoh-2

Misalkan diketahui himpunan objek $X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ O_4\}$.

Misalkan juga diketahui permutasi τ_1 dan τ_2 atas X dengan definisi sebagai berikut.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian kita akan punya definisi pemetaan sebagai berikut.

- $\tau_1(O_1) = O_2,\ \tau_1(O_2) = O_3,\ \tau_1(O_3) = O_4,\ \tau_1(O_4) = O_1$
- $\tau_2(O_1) = O_4,\ \tau_2(O_2) = O_1,\ \tau_2(O_3) = O_2,\ \tau_2(O_4) = O_3$

Dengan demikian hasil dari permutasi $\tau_1 \circ \tau_2$ atas X adalah sebagai berikut.

$$\begin{array}{lllllll} (\tau_1 \circ \tau_2)(O_1) & = & \tau_1(\tau_2(O_1)) & = & \tau_1(O_4) & = & O_1 \\ (\tau_1 \circ \tau_2)(O_2) & = & \tau_1(\tau_2(O_2)) & = & \tau_1(O_1) & = & O_2 \\ (\tau_1 \circ \tau_2)(O_3) & = & \tau_1(\tau_2(O_3)) & = & \tau_1(O_2) & = & O_3 \\ (\tau_1 \circ \tau_2)(O_4) & = & \tau_1(\tau_2(O_4)) & = & \tau_1(O_3) & = & O_4 \end{array}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, permutasi $\tau_1 \circ \tau_2$ bisa dinyatakan dalam notasi matriks seperti ini.

$$\tau_1 \circ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Definisi Permutasi Identitas

Diketahui bilangan asli n dan himpunan objek $X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ ...\ O_n\}$.

Permutasi identitas τ_0 atas X didefinisikan sebagai:

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & (n-1) & n \\ 1 & 2 & 3 & ... & (n-1) & n \end{pmatrix}$$

• Langkah-2

Selanjutnya, diketahui himpunan:

$$S_6 = \Big\{ f : A \to A \;\mid\; f = \text{ pemetaan bijektif} \Big\}$$

Definisi Himpunan Semua Permutasi atas X

Diketahui himpunan objek X.

Himpunan semua permutasi atas X dinotasikan sebagai S_X dengan definisi sebagai berikut.

$$S_X \;=\; \{\tau \;:\; \tau \text{ adalah permutasi atas } X\}$$

Jika banyaknya anggota himpunan X diketahui, yaitu diketahui akan adanya suatu bilangan asli n sedemikian sehingga $X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ \ldots\ O_n\}$, maka himpunan S_X akan lebih sering disebut sebagai S_n.

Sebagai contoh, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$, akan tetapi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \notin S_4$

Berdasarkan syarat keanggotaan himpunan S_6, jelas sekali bahwa himpunan ini adalah **himpunan semua permutasi atas A**!

Karena himpunan objek $A = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$ memiliki 6 elemen, maka jumlah semua permutasi atas A adalah sebanyak $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ permutasi.

Beberapa contoh permutasi yang termuat di S_6 adalah $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Seperti yang diketahui, $(S_6, \circ)$ adalah grup dengan $\circ$ sebagai notasi operasi komposisi fungsi.

- **Langkah-3**

Kemudian, setiap permutasi di S_6 memiliki **order**.

Definisi Order dari Suatu Permutasi

Diketahui grup semua permutasi $(S_n, \circ)$ dan permutasi $\tau \in S_n$.

Order dari permutasi τ adalah bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga berlaku $\tau^n = \tau_0$ dengan τ_0 adalah permutasi identitas di S_n.

Order dari suatu permutasi τ dinotasikan sebagai $o(\tau)$.

Karena kita sedang bekerja dengan grup permutasi $(S_6, \circ)$, maka definisi order dari suatu permutasi akan menjadi seperti ini.

Definisi Order dari Suatu Permutasi di S_6

Diketahui grup semua permutasi $(S_6, \circ)$ dan permutasi $\tau \in S_6$.

Order dari permutasi τ adalah bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga berlaku persamaan:

$$\tau^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Contoh-3

Diketahui grup semua permutasi $(S_6, \circ)$. Diketahui juga permutasi $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in S_6$.

Order dari permutasi ρ adalah 5, karena:

$$\rho^1 = \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rho^2 = \rho \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^3 = \rho^2 \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rho^4 = \rho^3 \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rho^5 = \rho^4 \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Langkah-4**

Sebagaimana yang sudah kita pelajari di mata kuliah **Pengantar Logika Matematika dan Himpunan**, jika kita mendefinisikan suatu **relasi ekuivalensi** pada suatu himpunan, maka kita akan mendapatkan **kelas-kelas ekuivalensi** yang akan mempartisi himpunan tersebut. Wujud dari kelas-kelas ekuivalensi ini tidak lain ya adalah himpunan.

Kemudian, perhatikan! Kita sekarang sedang bekerja dengan himpunan objek $A = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$. Himpunan A ini tidak lain adalah himpunan berhingga.

Dengan demikian, jika suatu relasi ekuivalensi didefinisikan pada himpunan objek A, maka jumlah kelas-kelas ekuivalensi yang akan terbentuk adalah berhingga.

Contoh-4

Katakanlah kita mendefinisikan suatu relasi ekuivalensi $\sim_1$ dan $\sim_2$ pada himpunan objek $A = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$.

Relasi ekuivalensi $\sim_1$ akan mempartisi himpunan objek A menjadi tiga kelas ekuivalensi; P_1, P_2, dan P_3, dengan:

$$P_1 = \{O_1, O_4\},\ P_2 = \{O_2, O_5\},\ \text{dan}\ P_3 = \{O_3, O_6\},$$

sementara relasi ekuivalensi $\sim_2$ akan mempartisi himpunan objek A menjadi dua kelas ekuivalensi; K_1 dan K_2, dengan:

$$K_1 = \{O_1, O_3, O_6\}\ \text{dan}\ K_2 = \{O_2, O_4, O_6\}.$$

Perhatikan! Untuk relasi ekuivalensi $\sim_1$, kelas-kelas ekuivalensi P_1, P_2, dan P_3 adalah himpunan-himpunan yang saling asing. Setiap objek pada himpunan objek A akan termuat di tepat salah satu kelas ekuivalensi P_i. Hasil dari $P_1 \cup P_2 \cup P_3$ tidak lain adalah himpunan objek A itu sendiri.

Sama seperti relasi ekuivalensi $\sim_1$, kelas-kelas ekuivalensi K_1 dan K_2 yang terbentuk oleh relasi ekuivalensi $\sim_2$ adalah himpunan-himpunan yang saling asing. Setiap objek pada himpunan objek A akan termuat di tepat salah satu kelas ekuivalensi K_i. Hasil dari $K_1 \cup K_2$ tidak lain adalah himpunan objek A itu sendiri.

Perhatikan! Kita dapat mendefinisikan **berbagai macam** relasi ekuivalensi pada suatu himpunan sedemikian sehingga kita akan mendapatkan berbagai macam kelas-kelas ekuivalensi yang berbeda-beda tergantung dari relasi ekuivalensi yang didefinisikan.

Nah! Dalam topik permutasi dikenal juga istilah **orbit**, yaitu **kelas ekuivalensi** antar objek terhadap suatu permutasi.

Definisi Orbit atas Suatu Permutasi

Diketahui himpunan objek $X = \{O_1, O_2, O_3, ..., O_n\}$. Diketahui juga grup semua permutasi $(S_n, \circ)$.

Jika kita memilih suatu permutasi $\tau \in S_n$, maka kita bisa membuat suatu relasi ekuivalensi $\sim_\tau$ yang didefinisikan sebagai:

$$O_a \sim_\tau O_b \quad \text{jika dan hanya jika} \quad O_a = \tau^n(O_b)\ \text{untuk suatu}\ n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{berlaku untuk setiap}\ O_a, O_b \in A.$$

Orbit adalah kelas-kelas ekuivalensi yang terbentuk dikarenakan relasi ekuivalensi $\sim_\tau$.

Contoh-5

Diketahui himpunan objek $A = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$. Diketahui juga grup semua permutasi $(S_6, \circ)$.

Jika kita memilih permutasi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut.

1. $O_1 \sim_\tau O_6$ karena $O_1 = \tau^1(O_6)$.
   Berdasarkan sifat simetris relasi ekuivalensi, akan berlaku juga $O_6 \sim_\tau O_1$.
2. $O_2 \sim_\tau O_2$ karena $O_2 = \tau^1(O_2)$.
3. $O_3 \sim_\tau O_5$ karena $O_3 = \tau^1(O_5)$.
   $O_5 \sim_\tau O_4$ karena $O_5 = \tau^1(O_4)$.
   Berdasarkan sifat transitif relasi ekuivalensi, akan berlaku juga $O_3 \sim_\tau O_4$.

Berdasarkan penjabaran di atas, relasi ekuivalensi $\sim_\tau$ akan mempartisi himpunan objek A menjadi 3 kelas ekuivalensi; P_1, P_2, dan P_3, dengan:

$$P_1 = \{O_1, O_6\},\ P_2 = \{O_2\},\ \text{dan } P_3 = \{O_3, O_4, O_5\}.$$

Orbit dari relasi ekuivalensi $\sim_\tau$ yang didefinisikan untuk himpunan objek A adalah P_1, P_2, dan P_3.

Dalam bentuk penulisan yang lain, biasanya orbit juga dinyatakan sebagai ini.

$$\text{Orbit dari permutasi } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_6 \text{ adalah } P_1,\ P_2, \text{ dan } P_3.$$

Selanjutnya, perhatikan!

Karena himpunan objek $A = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$ memuat 6 objek, maka suatu relasi ekuivalensi yang didefinisikan pada himpunan A akan menghasilkan **paling banyak** 6 orbit dan **paling sedikit** menghasilkan 1 orbit.

- **Langkah-5**

Sekarang kita akan mengerjakan subsoal poin (a), yaitu:

Subsoal yang akan Dikerjakan 1

Apakah ada $f \in S_6$ yang memenuhi $o(f) = 4$? Jelaskan jawaban saudara!

Ingat! Notasi $o(f)$ menyatakan order dari permutasi f.

Nah, misalkan K adalah suatu orbit yang terbentuk berdasarkan suatu relasi ekuivalensi yang didefinisikan pada himpunan objek A. Dengan demikian, K akan memuat paling banyak 6 objek dan paling sedikit 1 objek. Lebih detilnya, jika m adalah jumlah objek yang termuat di dalam orbit K, maka akan berlaku persamaan $1 \leq m \leq 6$.

Kita jabarkan orbit K sebagai $K = \{O_{i_1}, O_{i_2}, ..., O_{i_m}\}$ dengan tentunya $O_{i_x} \in A$. Sebagai contoh, jika orbit K memuat 4 objek, maka $m = 4$ dan orbit K dapat berupa himpunan $\{O_1, O_2, O_3, O_4\}$, $\{O_2, O_4, O_5, O_6\}$, $\{O_3, O_4, O_5, O_6\}$, dsb.

Perhatikan! Untuk suatu orbit K yang memuat m objek, maka kita dapat membentuk suatu permutasi $\tau \in S_6$ sedemikian sehingga order permutasi τ adalah m (yaitu, $\tau^m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$) dengan cara seperti ini.

- Untuk setiap $O_x \in A$ dengan $O_x \notin K$, didefinisikan $\tau(O_x) = O_x$.
- Untuk setiap $O_x \in A$ dengan $O_x \notin K$ dan $K = \{O_{i_1}, O_{i_2}, ..., O_{i_m}\}$, didefinisikan: $\tau(O_{i_1}) = O_{i_2}$, $\tau(O_{i_2}) = O_{i_3}$, ... , $\tau(O_{i_{m-1}}) = O_{i_m}$, $\tau(O_{i_m}) = O_{i_1}$.

Oke! Kita buat contohnya!

Misalkan dipilih orbit $K = \{O_2, O_4, O_5, O_6\}$. Berdasarkan aturan di atas, kita akan membentuk permutasi $f \in S_6$ dengan definisi sebagai berikut.

$$f(O_1) = O_1, \qquad f(O_3) = O_3$$
$$f(O_2) = O_4, \qquad f(O_4) = O_5, \qquad f(O_5) = O_6, \qquad f(O_6) = O_2$$

Kita dapat menyatakan permutasi f ke dalam notasi matriks sebagai berikut.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, kita akan mencari tahu hasil dari f^1, f^2, f^3, dan f^4. Penjabarannya adalah sebagai berikut.

$$f^1 = f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f^2 = f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$f^3 = f^2 \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f^4 = f^3 \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, terlihat bahwa order dari permutasi f adalah 4. Jadi, kita dapat menjawab **Subsoal yang akan Dikerjakan 1** dengan jawaban **Ada** dengan contoh permutasi f sebagaimana di atas itu.

- **Langkah-6**

Sekarang kita akan mengerjakan subsoal poin (b), yaitu:

Subsoal yang akan Dikerjakan 2

Apakah ada $f \in S_6$ yang memenuhi $o(f) = 7$? Jelaskan jawaban saudara!

Ingat! Notasi $o(f)$ menyatakan order dari permutasi f.

Kita harus mengetahui istilah *cycle* untuk menjawab subsoal ini.

Definisi *Cycle* atas Suatu Permutasi

Diketahui himpunan objek $X = \{O_1, O_2, O_3, ..., O_n\}$. Diketahui juga grup semua permutasi $(S_n, \circ)$.

Jika kita memilih suatu permutasi $\tau \in S_n$, maka kita akan mendapatkan orbit-orbit K_1, K_2, K_3, hingga K_m dengan $1 \leq m \leq n$.

Cycle adalah representasi orbit dalam bentuk permutasi. Dengan demikian:

- *Cycle* adalah permutasi.
- *Cycle* adalah permutasi yang termuat di dalam himpunan S_n.
- Jika orbit K memuat r objek dan ρ adalah *cycle* bersesuaian dengan orbit K, maka order dari *cycle* ρ adalah r.
- Suatu orbit K dapat bersesuaian dengan banyak *cycle*.

Cara Membuat *Cycle* dari Orbit

Diketahui himpunan objek $X = \{O_1, O_2, O_3, ..., O_n\}$. Diketahui juga grup semua permutasi $(S_n, \circ)$.

Jika kita memilih suatu permutasi $\tau \in S_n$, maka kita akan mendapatkan orbit-orbit K_1, K_2, K_3, hingga K_m dengan $1 \leq m \leq n$ yang bersesuaian dengan permutasi τ.

Untuk suatu orbit K yang memuat r objek, maka kita dapat membentuk suatu *cycle* $\rho \in S_n$ sedemikian sehingga order *cycle* ρ adalah r (yaitu, $\rho^r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix}$) dengan cara seperti ini.

- Untuk setiap $O_x \in X$ dengan $O_x \notin K$, didefinisikan $\rho(O_x) = O_x$.
- Untuk setiap $O_x \in X$ dengan $O_x \notin K$ dan $K = \{O_{i_1}, O_{i_2}, ..., O_{i_m}\}$, didefinisikan: $\rho(O_{i_1}) = O_{i_2}$, $\rho(O_{i_2}) = O_{i_3}$, ... , $\rho(O_{i_{m-1}}) = O_{i_m}$, $\rho(O_{i_m}) = O_{i_1}$.

Contoh-6

Diketahui himpunan objek $A = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$. Diketahui juga grup semua permutasi $(S_6, \circ)$.

Jika kita memilih permutasi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$, maka akan diperoleh dua orbit; K_1 dan K_2 sebagai berikut.

$$K_1 = \{O_1, O_6\} \text{ dan } K_2 = \{O_2, O_3, O_4, O_5\}$$

Menggunakan **Cara Membuat *Cycle* dari Orbit**, kita dapat membentuk *cycle* ρ_1 yang bersesuaian dengan orbit K_1 dengan definisi:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

dan juga *cycle* ρ_2 yang bersesuaian dengan orbit K_2 dengan definisi:

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Perhatikan! Selain ρ_2, *cycle* ρ_3 dan ρ_4 berikut juga bersesuaian dengan orbit K_2.

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \rho_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, kita akan menyinggung teorema yang lumayan penting.

Teorema Dekomposisi *Cycle*

Diketahui himpunan objek $X = \{O_1, O_2, O_3, ..., O_n\}$. Diketahui juga grup semua permutasi $(S_n, \circ)$.

Jika kita memilih suatu permutasi $\tau \in S_n$, maka kita akan mendapatkan orbit-orbit K_1, K_2, K_3, hingga K_m dengan $1 \leq m \leq n$ yang bersesuaian dengan permutasi τ.

Jika ρ_1, ρ_2, ρ_3, hingga ρ_m secara berurutan adalah *cycle-cycle* yang bersesuaian dengan orbit-orbit K_1, K_2, K_3, hingga K_m, maka akan berlaku persamaan berikut.

$$\tau \ = \ \rho_1 \ \circ \ \rho_2 \ \circ \ \rho_3 \ \circ \ ... \ \circ \ \rho_m$$

Lebih lanjut, jika permutasi τ memiliki order s dan r_1, r_2, r_3, hingga r_m secara berurutan adalah order-order yang bersesuaian dengan *cycle-cycle* ρ_1, ρ_2, ρ_3, hingga ρ_m, maka akan berlaku persamaan berikut.

$$s \ = \ \text{Kelipatan Persekutuan Terkecil dari } \{r_1, r_2, r_3, ..., r_m\}$$

Oke! Kembali ke **Subsoal yang akan Dikerjakan 2**!

Nah, berdasarkan **Teorema Dekomposisi *Cycle*** untuk sebarang permutasi $\tau \in S_6$, maka τ dapat disajikan sebagai:

$$\tau \ = \ \rho_1 \ \circ \ \rho_2 \ \circ \ \rho_3 \ \circ \ ... \ \circ \ \rho_m$$

Lebih lanjut, jika permutasi τ memiliki order s dan r_1, r_2, r_3, hingga r_m secara berurutan adalah order-order yang bersesuaian dengan *cycle-cycle* ρ_1, ρ_2, ρ_3, hingga ρ_m, maka akan berlaku persamaan berikut.

$$s \ = \ \text{Kelipatan Persekutuan Terkecil dari } \{r_1, r_2, r_3, ..., r_m\}$$

Nah! Kita tahu bahwa 7 itu adalah bilangan prima. Ya toh? Jika $s = 7$, maka akibatnya **harus ada** *cycle* ρ_i yang bersesuaian dengan suatu orbit yang memuat 7 objek!

Lha, bagaimana bisa ada orbit dari himpunan $A = \{O_1, O_2, O_3, ..., O_6\}$ yang memuat 7 objek!? *Lha wong* himpunan objek A itu sendiri hanya memuat 6 objek kok!

Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa tidak ada permutasi di S_6 yang memiliki order 7.

• Langkah-7

Sekarang kita akan mengerjakan subsoal poin (c), yaitu:

Subsoal yang akan Dikerjakan 3

Jika $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, tentukan $f^{2.021}$!

Sebagai catatan $f^{2.021} = \underbrace{f \circ f \circ f \circ f \circ ... \circ f}_{\text{sebanyak } 2.021}$.

Kita akan menggunakan order dari f untuk mengerjakan subsoal poin ini. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

•• (7) Langkah-1

Kita akan menyajikan permutasi f sebagai komposisi dari *cycle-cycle*. Pertama-tama, kita akan menyelidiki orbit-orbit atas permutasi f.

Berdasarkan definisi permutasi f, diperoleh: $f(1) = 3$, $f(3) = 5$, $f(5) = 1$. Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa objek O_1, O_3, dan O_5 saling berelesai. Dengan demikian, objek-objek tersebut termuat di dalam orbit yang sama, yaitu $P_1 = \{1, 3, 5\}$.

Selain itu, berdasarkan definisi permutasi f, diperoleh juga: $f(2) = 4$ dan $f(2) = 4$. Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa objek O_2 dan O_4 saling berelesai. Dengan demikian, objek-objek tersebut termuat di dalam orbit yang sama, yaitu $P_2 = \{2, 4\}$.

Nah, terakhir ini, karena f adalah permutasi dari 6 objek dan hanya objek O_6 yang belum termuat di dalam orbit manapun, maka objek O_6 ini termuat di dalam orbit P_3 yang hanya berisikan objek O_6 itu sendiri; $P_3 = \{6\}$.

Dengan demikian, permutasi f akan menghasilkan 3 orbit pada himpunan objek $A = \{O_1, O_2, O_3, ..., O_6\}$ yaitu P_1, P_2, dan P_3, dengan definisi:

$$P_1 = \{1, 3, 5\} \qquad P_2 = \{2, 4\} \qquad P_3 = \{6\}$$

•• (7) Langkah-2

Menggunakan orbit P_1, P_2, dan P_3, kita dapat membuat *cycle-cycle* ρ_1, ρ_2 dan ρ_1.

Untuk orbit P_1, karena $f(1) = 3$, $f(3) = 5$, dan $f(5) = 1$, maka kita dapat mendefinisikan ρ_1 sebagai:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Untuk orbit P_2, karena $f(2) = 4$ dan $f(4) = 2$, maka kita dapat mendefinisikan ρ_2 sebagai:

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Untuk orbit P_3, karena $f(6) = 6$, maka kita dapat mendefinisikan ρ_3 sebagai:

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, akan berlaku persamaan:

$$f = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, *cycle* ρ_3 tidak lain adalah permutasi identitas di grup $(S_6, \circ)$. Dengan demikian, kita bisa menyatakan permutasi f sebagai $f = \rho_1 \circ \rho_2$.

Eh, ingat! Karena operasi komposisi permutasi itu bersifat komutatif di grup $(S_6, \circ)$, maka akan diperoleh persamaan $f = \rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$.

•• (7) Langkah-3

Kita akan menggunakan **Teorema Dekomposisi *Cycle*** untuk menentukan order dari permutasi f. Karena *cycle* ρ_1 bersesuaian dengan orbit P_1 yang beranggotakan 3 objek, maka order *cycle* ρ_1 adalah 3. Dengan penalaran yang serupa, order dari *cycle* ρ_2 adalah 2.

Nah, menurut **Teorema Dekomposisi *Cycle*** akan diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\text{Order dari } f \;=\; \text{Kelipatan Persekutuan Terkecil dari } \{3, 2\}$$

Karena kelipatan persekutuan terkecil dari 3 dan 2 adalah 6, maka kita bisa menyatakan bahwa order permutasi f adalah 6. Akibatnya, kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$f^6 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

•• (7) Langkah-4

Kita akan menggunakan persamaan:

$$f^6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

untuk menghitung $f^{2.021}$.

Karena $2.021 = 6 + 2.015$, maka kita akan mendapatkan persamaan berikut.

$$f^{2.021} = f^{(6+2.015)} = f^6 \circ f^{2.015} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \circ f^{2.015} = f^{2.015}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita bisa mengulangi penalaran di atas sedemikian sehingga akan menghasilkan persamaan $f^{2.021} = f^r$ dengan r adalah suatu bilangan bulat positif yang memenuhi pertidaksamaan $1 \leq r < 6$.

Singkatnya, karena $2.021 = 336 \cdot 6 + 5$, maka kita akan mendapatkan persamaan:

$$f^{2.021} = f^5$$

•• (7) Langkah-5

Langkah terakhir ini! Kita akan menghitung f^5 dengan memanfaatkan **Teorema Dekomposisi *Cycle***.

Karena berlaku persamaan $f = \rho_1 \circ \rho_2$ dan operasi komposisi permutasi itu bersifat komutatif, maka akan diperoleh persamaan:

$$f^5 = \rho_1^5 \circ \rho_2^5.$$

Ingat! Karena order *cycle* ρ_1 adalah 3, maka kita akan mendapatkan persamaan:

$$\rho_1^5 = \rho_1^{3+2} = \rho_1^3 \circ \rho_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \circ \rho_1^2 = \rho_1^2$$

Dengan penalaran yang serupa, karena order *cycle* ρ_2 adalah 2, maka kita akan mendapatkan persamaan:

$$\rho_2^5 = \rho_2^{2\cdot 2+1} = \left(\rho_2^2\right)^2 \circ \rho_2^1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\right)^2 \circ \rho_2 = \rho_2$$

Dengan demikian, kita akan memperoleh hasil berikut.

$$f^5 = \rho_1^5 \circ \rho_2^5 = \rho_1^2 \circ \rho_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}\right)^2 \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

•• (7) Kesimpulan

Berdasarkan langkah-langkah di atas, kita memperoleh hasil sebagai berikut.

$$f^{2.021} = f^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

■

10

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 3

Soal

Let $(G, \star)$ and $(H, \otimes)$ be groups. Suppose that the functions $\phi : G \to H$ and $\psi : G \to H$ are homomorphisms.

If H is commutative, then show that

$$N = \{g \in G \mid \phi(g) = \psi(g)\}$$

is a normal subgroup of G.

Dikerjakan

Kita akan menunjukkan kebenaran **Misi Utama** berikut untuk menunjukkan bahwa N adalah subgrup normal dari G.

Misi Utama

Kita akan menunjukkan secara berurutan kebenaran dua pernyataan di bawah ini.

1. N adalah subgrup dari G.
2. Untuk setiap $g \in G$, akan berlaku $g \star N = N \star g$.

Tunggu apa lagi!? Ayo kita segera mulai!

• Menunjukkan Kebenaran Pernyataan-1

Kita akan memanfaatkan teorema berikut untuk menunjukkan bahwa N adalah subgrup dari G.

> **Teorema Subgrup**
>
> Diketahui $(G, \star)$ adalah grup dan N adalah himpunan bagian dari G.
>
> N merupakan subgrup dari G jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in N$ berlaku $a \star b^{-1} \in N$.

Oke! Kita ambil sebarang $a, b \in N$. Kita akan menunjukkan bahwa berlaku $a \star b^{-1} \in N$.

Karena $b \in N$, maka berdasarkan syarat keanggotaan himpunan N akan berakibat $b \in G$. Selain itu, karena $(G, \star)$ adalah grup, maka b memiliki invers, yaitu $b^{-1} \in G$.

Kemudian, karena $a \in N$, maka berdasarkan syarat keanggotaan N akan berakibat $a \in G$. Karena $a, b^{-1} \in G$ dan $(G, \star)$ adalah grup, maka $a \star b^{-1} \in G$.

Karena ϕ adalah homomorfisma dari G ke H, maka ϕ adalah pemetaan/fungsi. Karena $a \star b^{-1} \in G$ dan ϕ adalah pemetaan dari G ke H, maka $\phi(a \star b^{-1}) \in H$.

Karena ϕ adalah homomorfisma, maka berdasarkan definisi homomorfisma akan berlaku:

$$\phi(a \star b^{-1}) = \phi(a) \otimes \phi(b^{-1}) \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(a) \otimes \phi(b^{-1}) \in H.$$

Karena ϕ adalah homomorfisma, maka akan berlaku persamaan $\phi(b^{-1}) = (\phi(b))^{-1}$. Dengan demikian:

$$\phi(a) \otimes \phi(b^{-1}) = \phi(a) \otimes (\phi(b))^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(a) \otimes (\phi(b))^{-1} \in H.$$

Berdasarkan syarat keanggotaan himpunan N, maka akan berlaku persamaan $\phi(a) = \psi(a)$ dan $\phi(b) = \psi(b)$. Dengan demikian:

$$\phi(a) \otimes (\phi(b))^{-1} = \psi(a) \otimes (\psi(b))^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \psi(a) \otimes (\psi(b))^{-1} \in H.$$

Karena ψ adalah homomorfisma, maka akan berlaku persamaan $(\psi(b))^{-1} = \psi(b^{-1})$. Dengan demikian:

$$\psi(a) \otimes (\psi(b))^{-1} = \psi(a) \otimes \psi(b^{-1}) \qquad \Longrightarrow \qquad \psi(a) \otimes \psi(b^{-1}) \in H.$$

Karena ψ adalah homomorfisma, maka berdasarkan definisi homomorfisma akan berlaku persamaan:

$$\psi(a) \otimes \psi(b^{-1}) = \psi(a \star b^{-1}) \qquad \Longrightarrow \qquad \psi(a \star b^{-1}) \in H.$$

Berdasarkan penjabaran panjang di atas 😀, kita memperoleh hasil berupa persamaan berikut.

$$\phi(a \star b^{-1}) = \psi(a \star b^{-1})$$

Dengan demikian, berdasarkan syarat keanggotaan himpunan N, kita bisa menyimpulkan bahwa $a \star b^{-1} \in N$. Jadi, berdasarkan **Teorema Subgrup** di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa N adalah subgrup dari G.

- **Menunjukkan Kebenaran Pernyataan-2**

Pada bagian ini kita akan menunjukkan bahwa untuk setiap $g \in G$, akan berlaku $g \star N = N \star g$. Karena pada **Poin (1)** kita sudah menunjukkan bahwa N adalah subgrup dari G, maka pada bagian ini kita akan memandang N sebagai subgrup dari G.

Kita awali bagian ini dengan menjabarkan definisi himpunan $g \star N$ dan $N \star g$ sebagaimana berikut.

- $g \star N = \{g \star n \ : \ n \in N\}$, dan
- $N \star g = \{n \star g \ : \ n \in N\}$.

Perhatikan! Karena kita ingin menunjukkan kebenaran persamaan $g \star N = N \star g$, maka kita harus menggunakan definisi kesamaan dua himpunan. Dengan demikian, kita akan menunjukkan kebenaran **Submisi 2** berikut.

Definisi Kesamaan Dua Himpunan

Diketahui himpunan A dan B.

$A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Submisi 2

Kita harus menunjukkan kebenaran dua pernyataan berikut.

1. Untuk menunjukkan bahwa berlaku $g \star N \subseteq N \star g$, maka kita akan menunjukkan bahwa untuk sebarang $x \in g \star N$ akan berlaku $x \in N \star g$.

2. Untuk menunjukkan bahwa berlaku $N \star g \subseteq g \star N$, maka kita akan menunjukkan bahwa untuk sebarang $x \in N \star g$ akan berlaku $x \in g \star N$.

Jika kebenaran dua pernyataan di atas sudah ditunjukkan, maka kita bisa menyatakan bahwa benar berlaku $g \star N = N \star g$.

•• (2.1) Menunjukkan Kebenaran Pernyataan-1

Oke! Kita akan menunjukkan bahwa berlaku $g \star N \subseteq N \star g$. Kita akan ambil sebarang $x \in g \star N$ dan akan kita tunjukkan bahwa berlaku $x \in N \star g$.

Selanjutnya, perhatikan poin-poin di bawah ini!

- Karena $x \in g \star N$, maka $x = g \star n_1$ untuk suatu $n_1 \in N$.
- Karena $g \in G$, $n_1 \in N$, dan N adalah subgrup dari G, maka akan berakibat $x = g \star n_1 \in G$.

Nah, karena ϕ adalah homomorfisma dari G ke H, maka ϕ adalah pemetaan/fungsi. Karena $x = g \star n_1 \in G$ dan ϕ adalah pemetaan dari G ke H, maka akan berlaku persamaan berikut.

$$\phi(x) = \phi(g \star n_1) \in H$$

Karena ϕ adalah homomorfisma, maka berdasarkan definisi homomorfisma akan diperoleh persamaan berikut.

$$\phi(x) = \phi(g \star n_1) = \phi(g) \otimes \phi(n_1).$$

Karena H adalah grup komutatif, maka akan diperoleh persamaan berikut.

$$\phi(g) \otimes \phi(n_1) = \phi(n_1) \otimes \phi(g)$$

Karena ϕ adalah homomorfisma, maka berdasarkan definisi homomorfisma akan diperoleh persamaan berikut.

$$\phi(n_1) \otimes \phi(g) = \phi(n_1 \star g)$$

Nah, berdasarkan penjabaran panjang di atas, kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$\phi(x) = \phi(g \star n_1) = \phi(n_1 \star g)$$

Dengan kata lain, akan berlaku persamaan berikut.

$$x = g \star n_1 = n_1 \star g$$

Karena $x = n_1 \star g$, maka kita dapat menyimpulkan bahwa $x \in N \star g$. Karena jika $x \in g \star N$ berakibat $x \in N \star g$, maka kita dapat menyatakan bahwa $g \star N \subseteq N \star g$.

•• (2.2) Menunjukkan Kebenaran Pernyataan-2

Oke! Kita akan menunjukkan bahwa berlaku $N \star g \subseteq g \star N$. Kita akan ambil sebarang $x \in N \star g$ dan akan kita tunjukkan bahwa berlaku $x \in g \star N$.

Selanjutnya, perhatikan poin-poin di bawah ini!

- Karena $x \in N \star g$, maka $x = n_1 \star g$ untuk suatu $n_1 \in N$.
- Karena $g \in G$, $n_1 \in N$, dan N adalah subgrup dari G, maka akan berakibat $x = n_1 \star g \in G$.

Nah, karena ϕ adalah homomorfisma dari G ke H, maka ϕ adalah pemetaan/fungsi. Karena $x = n_1 \star g \in G$ dan ϕ adalah pemetaan dari G ke H, maka akan berlaku persamaan berikut.

$$\phi(x) = \phi(n_1 \star g) \in H$$

Karena ϕ adalah homomorfisma, maka berdasarkan definisi homomorfisma akan diperoleh persamaan berikut.

$$\phi(x) = \phi(n_1 \star g) = \phi(n_1) \otimes \phi(g).$$

Karena H adalah grup komutatif, maka akan diperoleh persamaan berikut.

$$\phi(n_1) \otimes \phi(g) = \phi(g) \otimes \phi(n_1)$$

Karena ϕ adalah homomorfisma, maka berdasarkan definisi homomorfisma akan diperoleh persamaan berikut.

$$\phi(g) \otimes \phi(n_1) = \phi(g \star n_1)$$

Nah, berdasarkan penjabaran panjang di atas, kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$\phi(x) = \phi(n_1 \star g) = \phi(g \star n_1)$$

Dengan kata lain, akan berlaku persamaan berikut.

$$x = n_1 \star g = g \star n_1$$

Karena $x = g \star n_1$, maka kita dapat menyimpulkan bahwa $x \in g \star N$. Karena jika $x \in N \star g$ berakibat $x \in g \star N$, maka kita dapat menyatakan bahwa $N \star g \subseteq g \star N$.

•• (2.3) Kesimpulan

Berdasarkan penjabaran-penjabaran di atas, karena kita bisa menyatakan bahwa $g \star N \subseteq N \star g$ dan $N \star g \subseteq g \star N$, maka kita dapat menyatakan bahwa **Submisi 2** benar berlaku. Dengan kata lain, untuk setiap $g \in G$, akan berlaku $g \star N = N \star g$.

• Kesimpulan

Berdasarkan penjabaran-penjabaran di atas, karena kita bisa menunjukkan kebenaran Pernyataan-1 dan Pernyataan-2 pada **Misi Utama**, maka kita bisa menyatakan bahwa N adalah subgrup normal dari G.

■

11

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 4 (a)

Soal

Diketahui $(G, \star)$ merupakan grup komutatif dan H, K masing-masing merupakan subgrup dari G. Diperhatikan bahwa $H \times K$ merupakan grup terhadap operasi biner $\oplus$ dengan definisi $(h_1, k_1) \oplus (h_2, k_2) = (h_1 \star h_2, k_1 \star k_2)$ untuk setiap $(h1, k1), (h2, k2) \in H \times K$. (tidak perlu dibuktikan).

Selanjutnya, misalkan:

$$N = \{(x, x^{-1}) \mid x \in H \cap K\}$$

Buktikan bahwa N merupakan subgrup normal dari $H \times K$!

Dikerjakan

Kita akan menunjukkan kebenaran **Misi Utama** berikut untuk menunjukkan bahwa N adalah subgrup normal dari $H \times K$.

Misi Utama

Kita akan menunjukkan secara berurutan kebenaran dua pernyataan di bawah ini.

1. N adalah subgrup dari $H \times K$.
2. Untuk setiap $(h, k) \in H \times K$, akan berlaku $(h, k) \oplus N = N \oplus (h, k)$.

Sebelumnya, ingat bahwa yang dimaksud dengan $H \times K$ itu adalah himpunan seperti definisi berikut.

$$H \times K = \{\ (h, k) \mid h \in H, k \in K\}$$

Tunggu apa lagi!? Ayo kita segera mulai!

• Menunjukkan Kebenaran Pernyataan-1

Kita akan menggunakan teorema berikut untuk menunjukkan bahwa N adalah subgrup dari $H \times K$.

Teorema Subgrup

Diketahui $(H \times K, \oplus)$ adalah grup dan N adalah himpunan bagian dari $H \times K$.

N merupakan subgrup dari $H \times K$ jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in N$ berlaku $a \oplus b^{-1} \in N$.

Oke! Kita ambil sebarang $a, b \in N$. Kita akan menunjukkan bahwa $a \oplus b^{-1} \in N$.

Perhatikan! Karena $a, b \in N$, maka:

- $a = (x_1, x_1^{-1})$, untuk suatu $x_1 \in H \cap K$.
- $b = (x_2, x_2^{-1})$, untuk suatu $x_2 \in H \cap K$.

Lebih lanjut lagi, perhatikan baik-baik dua poin berikut ini!

- Karena $x_1 \in H \cap K$, maka x_1 merupakan elemen di H dan juga elemen di K. Dengan kata lain, karena $x_1 \in H \cap K$, maka $x_1 \in H$ dan $x_1 \in K$. Demikian pula, berlaku $x_1^{-1} \in H$ dan $x_1^{-1} \in K$.
- Karena $x_2 \in H \cap K$, maka x_2 merupakan elemen di H dan juga elemen di K. Dengan kata lain, karena $x_2 \in H \cap K$, maka $x_2 \in H$ dan $x_2 \in K$. Demikian pula, berlaku $x_2^{-1} \in H$ dan $x_2^{-1} \in K$.

Berdasarkan dua poin di atas, akan berlaku:

- $a = (x_1, x_1^{-1}) \in H \times K$, akibatnya $a \in H \times K$, dan
- $b = (x_2, x_2^{-1}) \in H \times K$, akibatnya $b \in H \times K$.

Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa $N \subseteq (H \times K)$.

Selanjutnya, perhatikan $b = (x_2, x_2^{-1}) \in N$! Perhatikan bahwa b^{-1} tidak lain adalah (x_2^{-1}, x_2) karena berlaku persamaan-persamaan berikut.

$$\begin{aligned} b \oplus b^{-1} &= (x_2, x_2^{-1}) \oplus (x_2^{-1}, x_2) = (x_2 \star x_2^{-1}, x_2^{-1} \star x_2) = (e, e) \\ b^{-1} \oplus b &= (x_2^{-1}, x_2) \oplus (x_2, x_2^{-1}) = (x_2^{-1} \star x_2, x_2 \star x_2^{-1}) = (e, e) \end{aligned}$$

Nah! Karena H dan K merupakan subgrup dari G, maka elemen identitas di H, K, dan G adalah sama, yaitu e. Selanjutnya, jika dibentuk $a \oplus b^{-1}$, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut.

$$a \oplus b^{-1} = (x_1, x_1^{-1}) \oplus (x_2^{-1}, x_2) = (x_1 \star x_2^{-1}, x_1^{-1} \star x_2)$$

Karena:

- H dan K adalah grup,
- $h_1 \in H \cap K$, dan
- $x_2^{-1} \in H \cap K$,

maka akan berlaku $x_1 \star x_2^{-1} \in H \cap K$. Dengan penalaran yang serupa akan berlaku juga $x_1^{-1} \star x_2 \in H \cap K$.

Dengan demikian, berdasarkan syarat keanggotaan himpunan N, kita bisa menyatakan bahwa:

$$a \oplus b^{-1} = (x_1 \star x_2^{-1}, x_1^{-1} \star x_2) \in N$$

Jadi, berdasarkan **Teorema Subgrup** di atas, kita dapat menyatakan bahwa N adalah subgrup dari $H \times K$.

• Menunjukkan Kebenaran Pernyataan-2

Pada bagian ini kita akan menunjukkan bahwa untuk setiap untuk setiap $(h, k) \in H \times K$, akan berlaku $(h, k) \oplus N = N \oplus (h, k)$. Karena pada **Poin (1)** kita sudah menunjukkan bahwa N adalah subgrup dari $H \times K$, maka pada bagian ini kita akan memandang N sebagai subgrup dari $H \times K$.

Kita awali bagian ini dengan menjabarkan definisi himpunan $(h, k) \oplus N$ dan $N \star N \oplus (h, k)$ sebagaimana berikut.

- $(h, k) \oplus N = \{(h, k) \oplus n \ : \ n \in N\}$, dan
- $N \oplus (h, k) = \{n \oplus (h, k) \ : \ n \in N\}$.

Kita akan lebih rinci menyelidiki himpunan $(h, k) \oplus N$ dan $N \star N \oplus (h, k)$ pada paragraf-paragraf selanjutnya.

Perhatikan! Karena kita ingin menunjukkan kebenaran persamaan $(h, k) \oplus N = N \oplus (h, k)$, maka kita harus menggunakan definisi kesamaan dua himpunan. Dengan demikian, kita akan menunjukkan kebenaran **Submisi 2** berikut.

Definisi Kesamaan Dua Himpunan

Diketahui himpunan A dan B.

$A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Submisi 2

Kita harus menunjukkan kebenaran dua pernyataan berikut.

1. Untuk menunjukkan bahwa berlaku $(h, k) \oplus N \subseteq N \oplus (h, k)$, maka kita akan menunjukkan bahwa untuk sebarang $x \in (h, k) \oplus N$ akan berlaku $x \in N \oplus (h, k)$.

2. Untuk menunjukkan bahwa berlaku $N \oplus (h, k) \subseteq (h, k) \oplus N$, maka kita akan menunjukkan bahwa untuk sebarang $x \in N \oplus (h, k)$ akan berlaku $x \in (h, k) \oplus N$.

Jika kebenaran dua pernyataan di atas sudah ditunjukkan, maka kita bisa menyatakan bahwa benar berlaku $(h, k) \oplus N = N \oplus (h, k)$.

•• (2.1) Menunjukkan Kebenaran Pernyataan-1

Oke! Kita akan menunjukkan bahwa berlaku $(h,k) \oplus N \subseteq N \oplus (h,k)$. Kita akan ambil sebarang $x \in (h,k) \oplus N$ dan akan kita tunjukkan bahwa berlaku $x \in N \oplus (h,k)$.

Nah! Kita akan menjabarkan secara lebih rinci syarat keanggotaan himpunan $(h,k) \oplus N$ dan $N \oplus (h,k)$ sebagaimana di bawah ini.

$$\begin{aligned}(h,k) \oplus N &= \{\, (h,k) \oplus n \mid n \in N\} \\ &= \Big\{\, (h,k) \oplus (x, x^{-1}) \mid x \in H \cap K \Big\} \\ &= \Big\{\, (h \star x,\ k \star x^{-1}) \mid x \in H \cap K \Big\}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}N \oplus (h,k) &= \{\, n \oplus (h,k) \mid n \in N\} \\ &= \Big\{\, (x, x^{-1}) \oplus (h,k) \mid x \in H \cap K \Big\} \\ &= \Big\{\, (x \star h,\ x^{-1} \star k) \mid x \in H \cap K \Big\}.\end{aligned}$$

Berdasarkan definisi syarat keanggotaan di atas, jika diambil sebarang $\alpha \in (h,k) \oplus N$, maka akan berlaku $\alpha = (h \star x_0,\ k \star x_0^{-1})$ untuk suatu $x_0 \in H \cap K$.

Perhatikan! Pada soal diketahui bahwa $(G, \star)$ adalah grup komutatif. Artinya, untuk sebarang $x, y \in G$ akan berlaku $x \star y = y \star x$.

Karena H dan K adalah subgrup dari G dan $x_0 \in H \cap K$, maka akan berlaku persamaan $h \star x_0 = x_0 \star h$ dan $k \star x_0^{-1} = x_0^{-1} \star k$.

Dengan demikian,

$$\alpha = (h \star x_0,\ k \star x_0^{-1}) = (x_0 \star h,\ x_0^{-1} \star k).$$

Dengan kata lain, $\alpha \in N \oplus (h,k)$.

Jadi, karena untuk sebarang $\alpha \in (h,k) \oplus N$ akan berlaku $\alpha \in N \oplus (h,k)$, maka kita dapat menyimpulkan bahwa $(h,k) \oplus N \subseteq N \oplus (h,k)$.

•• (2.2) Menunjukkan Kebenaran Pernyataan-2

Langkah-langkah untuk menunjukkan bahwa $N \oplus (h,k) \subseteq (h,k) \oplus N$ mirip dengan langkah-langkah untuk menunjukkan bahwa $(h,k) \oplus N \subseteq N \oplus (h,k)$ yang sudah dipaparkan di poin **(2.1)** di atas.

Demi menghemat waktu dan tenaga, langkah-langkah untuk menunjukkan bahwa $N \oplus (h,k) \subseteq (h,k) \oplus N$ tidak aku tulis. 😀

•• (2.3) Kesimpulan

Berdasarkan penjabaran-penjabaran di atas, karena kita bisa menyatakan bahwa $(h,k) \oplus N \subseteq N \oplus (h,k)$ dan $N \oplus (h,k) \subseteq (h,k) \oplus N$, maka kita dapat menyatakan bahwa **Submisi 2** benar berlaku. Dengan kata lain, untuk setiap $(h,k) \in H \times K$, akan berlaku $(h,k) \oplus N = N \oplus (h,k)$.

• Kesimpulan

Berdasarkan penjabaran-penjabaran di atas, karena kita bisa menunjukkan kebenaran Pernyataan-1 dan Pernyataan-2 pada **Misi Utama**, maka kita bisa menyatakan bahwa N adalah subgrup normal dari $H \times K$.

$\blacksquare$

12

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 4 (b)

Soal

Diketahui $(G, \star)$ merupakan grup komutatif dan H, K masing-masing merupakan subgrup dari G. Diperhatikan bahwa $H \times K$ merupakan grup terhadap operasi biner $\oplus$ dengan definisi $(h_1, k_1) \oplus (h_2, k_2) = (h_1 \star h_2, k_1 \star k_2)$ untuk setiap $(h1, k1), (h2, k2) \in H \times K$. (tidak perlu dibuktikan).

Selanjutnya, misalkan:

$$N = \{(x, x^{-1}) \mid x \in H \cap K\}$$

Buktikan bahwa $(H \times K)/N \simeq HK$!

Dikerjakan

Sebelum memulai pembahasan, ayo kenali beberapa istilah berikut!

- $H \times K = \{\ (h, k)\ \mid h \in H, k \in K\}$.
- $HK = \{\ h \star k\ \mid h \in H, k \in K\}$.
- $G/H = \{\ gH \mid g \in G\} = \{g_1H,\ g_2H,\ g_3H,\ ...\}$.
- $gH = \{\ g \star h \mid h \in H\} = \{g \star h_1,\ g \star h_2,\ g \star h_3,\ ...\}$.

Kita akan menggunakan **Teorema Fundamental Homomorfisma 1** untuk menunjukkan bahwa $(H \times K)/N \simeq HK$.

Teorema Fundamental Homomorfisma 1

Diketahui $(G, \star)$ dan $(H, \circ)$ adalah grup. Diketahui pula homomorfisma $\phi : G \to H$.

Jika ϕ adalah homomorfisma surjektif, maka akan terdapat suatu isomorfisma $\psi : G/Kernel(\phi) \to H$.

Dengan kata lain.

Jika ϕ adalah homomorfisma surjektif, maka akan berlaku $G/Kernel(\phi) \simeq H$.

Ingat! Yang dimaksud dengan $X \simeq Y$ adalah terdapat isomorfisma antara grup X dan grup Y. Isomorfisma itu adalah homomorfisma yang bijektif.

Nah! Selanjutnya, ayo kita telaah apa-apa yang diketahui pada soal.

1. Dalam soal diketahui bahwa $(G,\ \star)$ adalah grup komutatif. Diketahui juga bahwa $(H,\ \star)$ dan $(K,\ \star)$ adalah subgrup-subgrup dari $(G,\ \star)$.

2. Dalam soal disebutkan adanya keterlibatan himpunan HK (pada notasi $(H \times K)/N \simeq HK$). **Seharusnya**, kita sudah tahu bahwa $(HK,\ \star)$ adalah subgrup dari G. Mungkin hal ini sudah pernah dijadikan bahan latihan atau tugas kuliah. Dengan demikian, dalam pengerjaan ini tidak akan menyertakan pembuktian bahwa $(HK,\ \star)$ adalah subgrup dari G.

3. Dalam soal diketahui adanya grup $(H \times K,\ \otimes)$ terhadap operasi biner $\oplus$ dengan definisi $(h_1, k_1) \oplus (h_2, k_2) = (h_1 \star h_2, k_1 \star k_2)$ untuk setiap $(h1, k1), (h2, k2) \in H \times K$.

4. Dalam soal diketahui adanya himpunan N yang didefinisikan sebagai: $N = \{(x, x^{-1}) \mid x \in H \cap K\}$. Kita sudah menunjukkan bahwa N adalah subgrup dari $(H \times K,\ \otimes)$ pada **Pengerjaan Soal Ujian Akhir Nomor 4 (a)**.

5. Soal tidak menyatakan adanya suatu homomorfisma. Dengan demikian, kita harus membuat suatu homomorfisma ϕ yang memenuhi syarat berlakunya **Teorema Fundamental Homomorfisma 1**.

Perhatikan isi **Teorema Fundamental Homomorfisma 1** dalam kotak kuning di atas! Jika kita mensubstitusi grup $(G, \star)$ dengan grup $(H \times K,\ \oplus)$ dan juga mensubstitusi grup $(H, \circ)$ dengan grup $(HK,\ \star)$, maka kita akan mendapatkan "modifikasi" dari **Teorema Fundamental Homomorfisma 1** sebagai berikut.

Teorema Fundamental Homomorfisma 1 (Modifikasi)

Diketahui $(H \times K,\ \oplus)$ dan $(HK,\ \star)$ adalah grup. Diketahui pula homomorfisma $\phi : H \times K \to HK$.

Dinotasikan $N = Kernel(\phi)$.

Jika ϕ adalah homomorfisma surjektif,
maka akan terdapat suatu isomorfisma $\psi : (H \times K)/N \to HK$.

Dengan kata lain.

Jika ϕ adalah homomorfisma surjektif, maka akan berlaku $(H \times K)/N \simeq HK$.

Nah, berdasarkan segala macam uraian di atas, kita akan melakukan serangkaian langkah-langkah berikut secara berurutan untuk menunjukkan bahwa berlaku $(H \times K)/N \simeq HK$.

1. Kita akan membuat suatu pengaitan $\phi : H \times K \to HK$ dengan definisi $\phi\left((h,k)\right) = h \star k$ untuk setiap $(h,k) \in H \times K$.
2. Kita akan menunjukkan bahwa pengaitan ϕ yang kita buat tersebut adalah pemetaan yang terdefinisi dengan baik.
3. Kita akan menunjukkan bahwa pengaitan ϕ yang kita buat tersebut adalah pemetaan surjektif.
4. Kita akan menunjukkan bahwa pengaitan ϕ yang kita buat tersebut adalah suatu homomorfisma.
5. Kita akan menunjukkan bahwa pengaitan ϕ yang kita buat tersebut adalah suatu homomorfisma dengan $Kernel(\phi) = N = \left\{(x, x^{-1}) \mid x \in H \cap K\right\}$.

Terlihat bahwa soal ini menguji kemampuan kita untuk membuat suatu homomorfisma yang memenuhi syarat **Teorema Fundamental Homomorfisma 1**.

Oke! Ayo kita mulai pembahasan soal!

- **Langkah-1**

Kita akan membuat suatu pengaitan $\phi : H \times K \to HK$ dengan definisi $\phi((h,k)) = h \star k$ untuk setiap $(h,k) \in H \times K$.

Terus terang. Mungkin bagian ini yang akan membuat Pembaca yang baru mempelajari Pengantar Struktur Aljabar kesulitan. 😀

Mungkin ada Pembaca yang bertanya-tanya:

Bagaimana caranya membuat pengaitan ϕ sedemikian sehingga ϕ adalah homomorfisma yang memenuhi ***Teorema Fundamental Homomorfisma 1 (Modifikasi)****?*

Kenapa bisa tiba-tiba langsung bikin defisini pengaitan ϕ sebagai $\phi((h,k)) = h \star k$? Kenapa tidak $\phi((h,k)) = h \star k^{-1}$ atau $\phi((h,k)) = h^2 \star k$ dan sebagainya? Bagaimana "rumus"-nya bisa bikin pengaitan ϕ seperti itu?

Jawaban singkatnya, **ya karena pengalaman**, hehehe. 😀

You know lah. *Been there, done that, many-many times.* 😀

Menurutku sih, kalau sering "bergumul" dengan *fotocopy*-an buku *A First Course in Abstract Algebra*, nanti ya lama-lama "insting membuat homomorfisma" bakal terasah. Sedangkan kalau hanya mengandalkan catatan kuliah dari apa yang dijelaskan oleh bapak/ibu/mas/mbak dosen di kelas ya kurang melatih insting.

Sebetulnya, pengaitan ϕ yang memenuhi **Teorema Fundamental Homomorfisma 1 (Modifikasi)** itu dibuat berdasarkan petunjuk-petunjuk yang diketahui. Kan kita ingin supaya pengaitan yang dibuat itu adalah homomorfisma dengan kernel N toh? Nah, setiap elemen di kernel itu kan bakal dipetakan ke elemen identitas di kodomain toh? Karena kodomain si homomorfisma ini adalah HK dan elemen identitas di HK adalah e_G, jadi ya "dikira-kira" saja, "rumus" pengaitan apa yang bakal memetakan $(x, x^{-1}) \in N$ ke e_G. Selain itu, kita juga harus mempertimbangkan bahwa ϕ adalah pemetaan surjektif.

Singkat saran ya **banyak-banyak latihan** saja lah! 😀

• Langkah-2

Kita akan menunjukkan bahwa pengaitan ϕ adalah pemetaan yang terdefinisi dengan baik. Caranya, kita akan menunjukkan bahwa untuk sebarang $x, y \in H \times K$ dengan $x = y$, akan berlaku $\phi(x) = \phi(y)$.

Ayo, kita ambil sebarang $x, y \in H \times K$. Dengan demikian kita akan memperoleh:

- $x = (h_1, k_1)$, untuk suatu $h_1 \in H$ dan $k_1 \in K$, dan
- $y = (h_2, k_2)$, untuk suatu $h_2 \in H$ dan $k_2 \in K$.

Sesuai definisi ϕ, akan diperoleh persamaan berikut.

$$\phi(x) = \phi((h_1, k_1)) = h_1 \star k_1 \in HK$$

Karena $x = y$, maka akan berlaku $(h_1, k_1) = (h_2, k_2)$. Dengan kata lain, karena $x = y$, maka akan berlaku $h_1 = h_2$ dan $k_1 = k_2$.

Dengan demikian, kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$h_1 \star k_1 = h_2 \star k_2 = \phi((h_2, k_2)) = \phi(y).$$

Dengan demikian, kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$\phi(x) = \phi((h_1, k_1)) = \phi((h_2, k_2)) = \phi(y).$$

Jadi, karena untuk sebarang $x, y \in H \times K$ dengan $x = y$ akan berlaku $\phi(x) = \phi(y)$, maka kita bisa menyimpulkan bahwa ϕ merupakan pemetaan yang terdefinisi dengan baik.

Pada langkah-langkah selanjutnya, kita akan menyebut ϕ sebagai pemetaan.

- **Langkah-3**

Kita akan menunjukkan bahwa ϕ merupakan pemetaan surjektif. Caranya, kita akan menunjukkan bahwa untuk sebarang $y \in HK$ akan terdapat $x \in H \times K$, sedemikian sehingga berlaku $\phi(x) = y$.

Oke! Kita ambil sebarang $y \in HK$. Sesuai definisi himpunan HK, maka $y = h_1 \star k_1$ untuk suatu $h_1 \in H$ dan $k_1 \in K$.

Selanjutnya, jika kita tetapkan $x = (h_1, k_1)$, maka x akan merupakan elemen di $H \times K$ dan berlaku $\phi(x) = \phi((h_1, k_1)) = h_1 \star k_1 = y$.

Jadi, karena untuk sebarang $y \in HK$, kita dapat menemukan $x \in H \times K$ sedemikian sehingga $\phi(x) = y$, maka kita dapat menyatakan bahwa ϕ merupakan pemetaan surjektif.

- **Langkah-4**

Kita akan menunjukkan bahwa ϕ merupakan homomorfisma. Caranya ya dengan menunjukkan bahwa untuk sebarang $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \times K$ akan berlaku persamaan berikut.

$$\phi\Big(\ (h_1, k_1) \oplus (h_2, k_2)\ \Big) = \phi((h_1, k_1)) \star \phi((h_2, k_2))$$

Oke! Kita ambil sebarang $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \times K$. Berdasarkan definisi operasi biner $\oplus$ akan diperoleh persamaan berikut.

$$(h_1, k_1) \oplus (h_2, k_2) \ = \ (h_1 \star h_2,\ k_1 \star k_2)$$

Dengan demikian, hasil dari $\phi\Big(\ (h_1, k_1) \oplus (h_2, k_2)\ \Big)$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\phi\Big(\ (h_1, k_1) \oplus (h_2, k_2)\ \Big) &= \phi\Big((h_1 \star h_2,\ k_1 \star k_2)\Big) \\
&= (h_1 \star h_2)\ \star\ (k_1 \star k_2) \\
&= h_1 \star\ (h_2 \star k_1)\ \star k_2 \\
&= h_1 \star\ (k_1 \star h_2)\ \star k_2 && \rightarrow \text{sifat komutatif grup } G \\
&= (h_1 \star k_1)\ \star\ (h_2 \star k_2) \\
&= \phi((h_1, k_1))\ \star\ \phi((h_2, k_2))
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, diperoleh hasil berupa persamaan $\phi\Big(\ (h_1, k_1) \oplus (h_2, k_2)\ \Big) = \phi((h_1, k_1)) \star \phi((h_2, k_2))$. Jadi, kita dapat menyatakan bahwa ϕ merupakan homomorfisma.

• Langkah-5

Kita akan menunjukkan bahwa $Kernel(\phi) = N = \{(x, x^{-1}) \mid x \in H \cap K\}$ dengan menggunakan definisi kesamaan dua himpunan.

Definisi Kesamaan Dua Himpunan

Diketahui himpunan A dan B.

$A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Submisi 1

Kita harus menunjukkan kebenaran dua pernyataan berikut.

1. Untuk menunjukkan bahwa berlaku $Kernel(\phi) \subseteq N$, maka kita akan menunjukkan bahwa untuk sebarang $x \in Kernel(\phi)$ akan berlaku $x \in N$.
2. Untuk menunjukkan bahwa berlaku $N \subseteq Kernel(\phi)$, maka kita akan menunjukkan bahwa untuk sebarang $x \in N$ akan berlaku $x \in Kernel(\phi)$.

Jika kebenaran dua pernyataan di atas sudah ditunjukkan, maka kita bisa menyatakan bahwa benar berlaku $Kernel(\phi) = N = \{(x, x^{-1}) \mid x \in H \cap K\}$.

•• (5.1) Menunjukkan Kebenaran Pernyataan-1

Kita ambil sebarang $x \in Kernel(\phi)$. Dengan demikian $x = (h_1, k_1)$ untuk suatu $h_1 \in H$ dan $k_1 \in K$.

Eh iya! Karena $x \in Kernel(\phi)$, maka akan berlaku persamaan berikut.

$$\phi(x) \;=\; \phi\Big((h_1, k_1)\Big) \;=\; e_G$$

Berdasarkan definisi pemetaan ϕ, akan diperoleh persamaan berikut.

$$\phi(x) = \phi(\ (h_1, k_1)\ ) = h_1 \star k_1 = e_G.$$

Perhatikan bahwa $h_1 \star k_1 = e_G$ jika dan hanya jika $h_1 = (k_1)^{-1}$ atau $k_1 = (h_1)^{-1}$.

Perhatikan!

- Karena $h_1 = (k_1)^{-1}$, itu berarti $h_1 \in K$.
- Karena $h_1 = (k_1)^{-1}$, maka akan berlaku $k_1 = (h_1)^{-1}$ dan itu berarti $k_1 \in H$.

Berdasarkan dua poin di atas, kita dapat menyatakan bahwa:

- h_1 dan k_1 termuat di dalam himpunan H sekaligus di dalam himpunan K. Dengan kata lain, $h_1, k_1 \in H \cap K$.
- h_1 dan k_1 saling invers. Dengan demikian, kita bisa menyatakan pasangan $(h_1,\ k_1)$ sebagai (a, a^{-1}) atau (a^{-1}, a) untuk suatu $a \in H \cap K$.

Berdasarkan penjabaran di atas, kita dapat menyatakan bahwa $x \in N$. Dengan demikian, akan berlaku $Kernel(\phi) \subseteq N$.

•• (5.2) Menunjukkan Kebenaran Pernyataan-2

Kita ambil sebarang $x \in N$. Dengan demikian $x = (a, a^{-1})$ untuk suatu $a \in H \cap K$.

Berdasarkan definisi pemetaan ϕ akan diperoleh persamaan berikut.

$$\phi(x) = \phi(\ (a, a^{-1})\ ) = a \star a^{-1} = e_G.$$

Dengan demikian $x \in Kernel(\phi)$. Dengan kata lain, $N \subseteq Kernel(\phi)$.

•• (5.3) Kesimpulan

Berdasarkan penjabaran-penjabaran di atas, karena kita bisa menyatakan bahwa $Kernel(\phi) \subseteq N$ dan $N \subseteq Kernel(\phi)$, maka kita dapat menyatakan bahwa **Submisi 1** benar berlaku. Dengan kata lain, berlaku benar $Kernel(\phi) = N = \big\{(x, x^{-1}) \mid x \in H \cap K\big\}$.

• Kesimpulan

Berdasarkan **Langkah-1** hingga **Langkah-5** di atas, maka menurut **Teorema Fundamental Homomorfisma 1 (Modifikasi)** akan berlaku $(H \times K)/N \simeq HK$.

■