Aku Mau Coba
Mengerjakan & Membahas
Ujian Tengah Semester & Ujian Akhir Semester

Pengantar Struktur Aljabar 1

Semester Genap 2019/2020

Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Gadjah Mada

Mawi Wijna

Yogyakarta, 2022

Daftar Isi

Siapa Aku?

Halo!

Kenalin, nama aku Wijna.
Sering juga dipanggil Wisna.
Jarang-jarang dipanggil Mawi.

Aku dulu pernah jadi mahasiswa matematika UGM. Maksudnya, aku dulu itu pernah kuliah di Program Studi Matematika FMIPA UGM. Masuk September 2004. Lulus Februari 2009. Info lebih lanjut, *googling* saja namaku di Google.

Oh ya, kenapa aku kurang kerjaan bikin tulisan ini?

Sekadar pemberitahuan. Tulisan ini aku buat dalam rangka **mengisi waktu luang**. Berhubung si *bocil* kalau makan sukanya diemut, jadi ya iseng-iseng aku mengerjakan soal ujian sambil menunggu rongga mulutnya kosong lagi. Itu pun kalau aku sedang bosan membuka *manga online*, *marketplace*, *Instagram*, dan kawan-kawannya.

Jadi ya, sebetulnya tulisan ini hanyalah sebatas alih digital dari hasil *orat-oret* di sebarang kertas kosong di tengah proses menyuapi makan seorang *bocil*. Pengalihan ke format LaTeXaku lakukan sembari menunggu azan subuh berkumandang atau ketika *weekend* hanya di rumah saja. Sebagian besar *orat-oret* ini tercipta semasa Covid-19 masih mewabah.

Eh, sebelumnya, aku mohon maaf jikalau tulisan ini lebih banyak memuat hal-hal yang salah daripada hal-hal yang benarnya. Maklum, namanya juga sudah belasan tahun yang lalu jadi mahasiswa matematika. Jadi ya, mohon maaf kalau lupa-lupa ingat. Walaupun aku tetap berhati-hati dalam menulis supaya tidak terjadi cacat logika.

Terus terang, hampir sebagian besar isi tulisan ini aku sadur dari berbagai macam sumber di internet seperti math.stackexchange.com, Quora, dan Reddit. Jadi, aku bukan orang pintar nan jenius yang bisa mengerjakan semua soal ujian dengan lancar. Seperti, yang aku bilang tadi, aku cuma iseng mengerjakan soal ujian, mengalihkan *orat-oret* di kertas ke format LaTeX, kemudian meng-*upload*-nya ke jagat maya.

Ya, sudahlah. Bagian pengantar ini nggak usah panjang-panjang. Semoga ada yang bisa dipelajari dari tulisan ini. Semoga tulisan ini bisa menjadi bahan pelajaran buat aku, jika di waktu tuaku nanti aku mulai lupa dengan apa-apa yang aku pelajari semasa kuliah.

Oh yes! Last but not least, *matur nuwun* kepada teman-teman di HIMATIKA FMIPA UGM yang sudah menyediakan sumber soal-soal ujian yang bisa diakses secara cuma-cuma di *website* mereka, himatika.fmipa.ugm.ac.id.

Ah... somehow I felt nostalgic....

Diketik sambil diiringi OST-nya Octopath Traveler.

Pengantar Struktur Aljabar 1 Buat Aku

Pas zamanku kuliah (tahun 2004-2009 silam), Pengantar Struktur Aljabar 1 itu mata kuliah wajib berbobot 3 SKS yang diselenggarakan pada Semester 2 Program Studi Matematika FMIPA UGM. Jadi ya, Struktur Aljabar 1 itu adalah salah satu mata kuliah yang menjadi "santapannya" para mahasiswa baru.

Aku bisa berbangga hati karena Pengantar Struktur Aljabar 1 itu adalah mata kuliah pertamaku yang "murni" matematika yang nilai akhirnya adalah A! Hahaha. 😀

Walaupun ya, sebetulnya ya dapatnya nilai akhirnya itu A- sih. 😀

Ya, seenggaknya dapat nilai A lah! Pencapaian ini kan kemudian bikin aku berpikir bahwasanya ~~kuliah di prodi matematika itu ternyata nggak susah-susah amat~~ aku "kemungkinan" bisa lulus dari prodi matematika dengan IPK tiga koma. 😀

Ya pokoknya setelah semester 2 ini dan mendapatkan nilai akhir A untuk mata kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1, aku mulai memantapkan hati bahwasanya **aljabar adalah jalan ninjaku**.

Well, ketika kamu lebih sering menghabiskan waktu *ngendog* sambil membaca buku *A First Course in Abstract Algebra*, aku yakin nilai akhir mata kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1-mu minimal dapat B asal tidak membuat kesalahan fatal.

Pas semester 2 dulu, aku diajar mata kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1 oleh Bu Diah Junia Eksi Palupi a.k.a Bu Diah. Sayangnya, seumur-umur aku kuliah, beliau hanya mengajar mata kuliah Pengantar Struktur Aljabar 1 dan Kriptologi (mata kuliah pilihan). Konon katanya, beliau lebih sering mengajar di prodi sebelah. Sedih....

Oke deh! Sebagai penutup, semoga tulisan ini membawa manfaat. Walaupun aku yakin kalau tulisan ini lebih banyak salahnya daripada benarnya, hehehe. Maklum, kan sudah belasan tahun yang lalu jadi mahasiswa matematika. Jadi ya, mohon maaf kalau lupa-lupa ingat.

Aku nggak tahu apakah benar-benar ada orang yang membaca tulisan ini. Semisal Anda yang membaca tulisan ini adalah mahasiswa, aku doakan semoga Anda mendapat pencerahan dan sukses berkuliah. Semisal Anda yang membaca tulisan ini penasaran dengan soal-soal ujian kuliah matematika, aku harap Anda tidak *shock* dan bisa memahami tulisan ini dengan baik. Semisal Anda yang membaca tulisan ini hanya sekadar mengisi waktu luang, aku sarankan untuk membaca tulisan ini sebagai kawan *ngendog* di toilet.

Semoga tulisan ini bermanfaat bagi mahasiswa matematika semester awal. Khususnya yang kesulitan dan kebingungan memahami mata kuliah Pengantar Logika Matematika dan Himpunan dan sungkan bertanya ke dosen atau kakak tingkat. Tulisan ini bisa diunduh secara cuma-cuma dan diam-diam. Silakan *googling* namaku untuk menemukan lebih banyak tulisan sejenis ini untuk beragam mata kuliah lain.

Akhir kata, selamat menikmati tulisan ini!

Yogyakarta, 2022
Wihikan "Mawi" Wijna

1

Soal-Soal Ujian Tengah Semester

1. Let n be a positive integer and let S_n be the symetric group on elements. Fix a permutation $\sigma \in S_n$. We define a binary relation $\backsim$ on $\{1, 2, 3, ..., n\}$ by

$$x \sim y \text{ if and only if there is an } m \in \mathbb{Z} \text{ for which } \sigma^m(x) = y$$

   (a) Show that $\sim$ is an equivalence relation!

   (b) Suppose $n = 6$ and $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

   Find the equivalence classes for the equivalence relation $\sim$ from part (a)!

2. (a) Diberikan grup berhingga G dengan banyak anggota n, $G = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.
   Jika G komutatif, dan $x = a_1 a_2 ... a_n$ tunjukkan bahwa $x^2 = e$, dengan e elemen identitas dari G.

   (b) Diberikan grup G dengan sifat $(ab)^2 = a^2 b^2$ untuk setiap $a, b \in G$. Buktikan bahwa G komutatif!

3. Diberikan grup G, dan N, K masing-masing subgrup dari G. Jika N subgrup normal dari G, maka buktikan bahwa $KN = \{kn \mid k \in K, n \in N\}$ merupakan subgrup dari G!

4. Diberikan bilangan bulat $n > 1$ dan grup G dengan sifat $(ab)^n = a^n b^n$ untuk semua $a, b \in G$. Buktikan bahwa:

   (a) $G^n = \{x^n \mid x \in G\}$ merupakan subgrup normal dari G.

   (b) $G[n] = \{z \in G \mid z^n = e\}$ merupakan subgrup normal dari G.

2

Soal-Soal Ujian Akhir Semester

1. Let G be any group. Show that the function $f : G \to G$ defined by $f(x) = x^2$ is group homomorphism if and only if G is an abelian group!

2. Tentukan kernel dari homomorfisma $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dengan definisi $T_A(v) = Av$, untuk matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$!

3. Misalkan $V_4 = \{e,\ a,\ b,\ ab\}$ adalah grup dengan tabel multiplikasi berikut.

$\star$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

   Selidiki apakah $V_4 \cong Z_4$!

4. Misalkan G grup abelian dengan elemen identitas e.
   Jika $H = \{\ x^2 \mid x \in G\ \}$ dan $K = \{\ x \in G \mid x^2 = e\ \}$, buktikan $G/K \cong H$!

3

Ayo Kerjakan!
Ujian Tengah Semester
Soal Nomor 1

Soal

Let n be a positive integer and let S_n be the symetric group on elements. Fix a permutation $\sigma \in S_n$. We define a binary relation $\backsim$ on $\{1, 2, 3, ..., n\}$ by

$$x \sim y \text{ if and only if there is an } m \in \mathbb{Z} \text{ for which } \sigma^m(x) = y$$

(a) Show that $\sim$ is an equivalence relation!

(b) Suppose $n = 6$ and $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Find the equivalence classes for the equivalence relation $\sim$ from part (a)!

Dikerjakan

Oke! Mari kita bahas soal ini dengan bahasa Indonesia untuk memudahkan pembaca yang baru mempelajari Pengantar Struktur Aljabar. Mari kita perjelas apa yang diinginkan soal.

Berdasarkan soal, diketahui n adalah bilangan bulat positif. Dengan demikian, $n \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, ...\}$. Dengan kata lain, n adalah bilangan asli.

Kemudian, menggunakan bilangan asli n tersebut, kita bentuk himpunan X, yaitu himpunan yang berisikan n elemen. Elemen-elemen di dalam himpunan X ini kita sebut sebagai objek. Sedemikian sehingga, kita bisa menyatakan himpunan X sebagai ini.

$$X = \{\text{Objek-1},\ \text{Objek-2},\ \text{Objek-3},\ ...,\ \text{Objek-}n\}$$

Supaya penulisannya mudah, kita akan nyatakan himpunan X sebagai ini.

$$X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ ...,\ O_n\}$$

Selanjutnya, ingat bahwa permutasi adalah suatu pemetaan/fungsi bijektif dari himpunan X ke himpunan X itu sendiri. Untuk mempersingkat istilah, kita menyebut permutasi sebagai pemetaan bijektif dari-ke X.

Definisi Permutasi

τ adalah permutasi atas X jika dan hanya jika τ adalah pemetaan bijektif dari-ke X.

Jadi, ingat! Permutasi itu adalah pemetaan/fungsi bijektif. Dengan demikian, jika τ_1 dan τ_2 adalah sebarang permutasi atas X, maka kita bisa melakukan komposisi pemetaan, $\tau_1 \circ \tau_2$ ataupun $\tau_2 \circ \tau_1$.

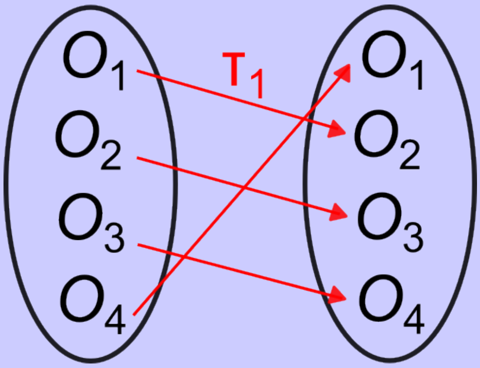
Contoh-1

Misalkan diketahui $n = 4$, dengan demikian kita akan punya $X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ O_4\}$.

Nah, salah satu contoh permutasi atas X adalah τ_1 dengan definisi sebagai berikut.

$$\tau_1(O_1) = O_2,\ \tau_1(O_2) = O_3,\ \tau_1(O_3) = O_4,\ \tau_1(O_4) = O_1$$

Permutasi τ_1 bisa divisualisasikan sebagai ini.



Permutasi τ_1 juga bisa dinyatakan dalam notasi matriks seperti ini.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} O_1 & O_2 & O_3 & O_4 \\ O_2 & O_3 & O_4 & O_1 \end{pmatrix}$$

Notasi matriks untuk permutasi τ_1 di atas seringnya diringkas menjadi seperti ini.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Contoh-2

Misalkan diketahui $n = 4$, dengan demikian kita akan punya $X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ O_4\}$.

Misalkan juga diketahui permutasi τ_1 dan τ_2 atas X dengan definisi sebagai berikut.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian kita akan punya definisi pemetaan sebagai berikut.

- $\tau_1(O_1) = O_2,\ \tau_1(O_2) = O_3,\ \tau_1(O_3) = O_4,\ \tau_1(O_4) = O_1$
- $\tau_2(O_1) = O_4,\ \tau_2(O_2) = O_1,\ \tau_2(O_3) = O_2,\ \tau_2(O_4) = O_3$

Dengan demikian hasil dari permutasi $\tau_1 \circ \tau_2$ atas X adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
(\tau_1 \circ \tau_2)(O_1) &= \tau_1(\tau_2(O_1)) = \tau_1(O_4) = O_1 \\
(\tau_1 \circ \tau_2)(O_2) &= \tau_1(\tau_2(O_2)) = \tau_1(O_1) = O_2 \\
(\tau_1 \circ \tau_2)(O_3) &= \tau_1(\tau_2(O_3)) = \tau_1(O_2) = O_3 \\
(\tau_1 \circ \tau_2)(O_4) &= \tau_1(\tau_2(O_4)) = \tau_1(O_3) = O_4
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, permutasi $\tau_1 \circ \tau_2$ bisa dinyatakan dalam notasi matriks seperti ini.

$$\tau_1 \circ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Definisi Permutasi Identitas

Diketahui bilangan asli n dan himpunan objek $X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ ...\ O_n\}$.

Permutasi identitas τ_0 atas X didefinisikan sebagai:

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & (n-1) & n \\ 1 & 2 & 3 & ... & (n-1) & n \end{pmatrix}$$

Definisi Himpunan Semua Permutasi atas X

Diketahui himpunan objek X.

Himpunan semua permutasi atas X dinotasikan sebagai S_X dengan definisi sebagai berikut.

$$S_X \;=\; \{\tau \;:\; \tau \text{ adalah permutasi atas } X\}$$

Jika banyaknya anggota himpunan X diketahui, yaitu diketahui akan adanya suatu bilangan asli n sedemikian sehingga $X = \{O_1,\; O_2,\; O_3,\; \ldots\; O_n\}$, maka himpunan S_X akan lebih sering disebut sebagai S_n.

Sebagai contoh, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$, akan tetapi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \notin S_4$

***

• Subsoal Poin (a)

Oke! Kita akan mengerjakan subsoal ini dengan langkah-langkah supaya lebih mudah untuk dipahami.

• Langkah-1

Pertama-tama, *first thing first*, kita telaah dulu hal-hal yang didefinisikan soal untuk kita.

"Let n be a positive integer and let S_n be the symetric group on elements."

Diketahui n adalah bilangan bulat positif. Dengan demikian, $n \in \{1,\; 2,\; 3,\; 4,\; 5, \ldots\}$. Dengan kata lain, n adalah bilangan asli.

Kemudian, didefinisikan pula S_n sebagai grup simetri. Dari sini, secara tidak langsung kita bisa menyatakan bahwa:

- Kita punya himpunan objek X yang memuat n objek, yang bisa dijabarkan sebagai: $X = \{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$.
- Isi dari himpunan simetri S_n adalah semua permutasi atas X. Salah satu contoh permutasi yang termuat di himpunan S_n adalah $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & (n-1) & n \\ n & (n-1) & (n-2) & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- Himpunan simetri S_n adalah grup terhadap operasi komposisi fungsi, oleh sebab itu untuk seterusnya S_n akan disebut sebagai grup simetri.

- **Langkah-2**

Selanjutnya, soal menyatakan bahwa:

"Fix a permutation $\sigma \in S_n$."

Dengan demikian, kita akan mengambil sebarang permutasi $\sigma \in S_n$. Permutasi σ ini kita sebut sebagai permutasi acuan.

- **Langkah-3**

Selanjutnya, soal menyatakan bahwa:

We define a binary relation $\backsim$ on $\{1, 2, 3, ..., n\}$ by:
$x \sim y$ if and only if there is an $m \in \mathbb{Z}$ for which $\sigma^m(x) = y$.

Artinya, adalah didefinisikan relasi biner $\backsim$ pada himpunan objek $X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ ...\ O_n\}$ dengan definisi:

Untuk setiap $O_i, O_j \in X$ berlaku $O_i \sim O_j$
jika dan hanya jika terdapat $m \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $\sigma^m(O_i) = O_j$

Contoh-3

Misalkan $X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ O_4\}$ dan ditetapkan permutasi acuan $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Kita bisa menyatakan bahwa:

1. $O_1 \sim O_3$ karena $\sigma^1(O_1) = O_3$ $(m = 1)$.
2. $O_3 \sim O_3$ karena $\sigma^0(O_3) = O_3$ dan juga $\sigma^2(O_3) = \sigma(\sigma(O_3)) = O_3$ ($m = 0$ dan bisa juga $m = 2$).
3. $O_1 \nsim O_2$ karena tidak ada $m \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga, $\sigma^m(O_1) = O_2$. Untuk sebarang $m \in \mathbb{Z}$ hasil dari $\sigma^m(O_1)$ kalau tidak O_1 ya O_3.

- **Langkah-4**

Soal meminta kita untuk menunjukkan bahwa relasi $\sim$ adalah relasi ekuivalensi pada himpunan objek X.

Ayo kita ingat lagi apa itu definisi dari relasi ekuivalensi.

Definisi Relasi Ekuivalensi

Relasi $\sim$ pada himpunan X disebut sebagai relasi ekuivalensi jika dan hanya jika relasi $\sim$ memenuhi ketiga kondisi berikut.

1. Relasi $\sim$ bersifat refleksif, yaitu untuk sebarang $x \in X$ akan berlaku $x \sim x$.
2. Relasi $\sim$ bersifat simetris, yaitu untuk suatu $x, y \in X$, jika berlaku $x \sim y$, maka akan berlaku pula $y \sim x$.
3. Relasi $\sim$ bersifat transitif, yaitu untuk suatu $x, y, z \in X$, jika berlaku $x \sim y$ dan $y \sim z$, maka akan berlaku pula $x \sim z$.

- **Langkah-5**

Ayo kita tunjukkan bahwa relasi $\sim$ bersifat refleksif! Kita akan menunjukkan bahwa untuk sebarang $O_i \in X$ akan berlaku $O_i \sim O_i$.

Oke! Kita ambil sebarang $O_i \in X$ untuk suatu $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Berdasarkan definisi relasi $\sim$, kita akan menunjukkan bahwa terdapat $m \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga berlaku persamaan $\sigma^m (O_i) = O_i$.

Eh iya! Ingat lho bahwasanya $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.

Sebetulnya... berdasarkan definisi umum pemetaan, akan berlaku $\sigma^0 (O_i) = O_i$. Karena $0 \in \mathbb{Z}$, maka kita bisa menyatakan bahwa relasi $\sim$ bersifat refleksif.

Akan tetapi... supaya "lebih meyakinkan", mungkin ada pembaca yang perlu bukti bahwa terdapat $m' \in \mathbb{Z}$ dengan $m' > 0$ sedemikian sehingga berlaku $\sigma^{m'} (O_i) = O_i$. 😃

Okelah kalau begitu! Kita tahu bahwa X adalah himpunan objek-objek. Jumlah anggota X adalah sebanyak n, sebab kan:

$$X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ ...\ O_n\}$$

Tentu kita tahu, karena n adalah bilangan asli, maka n juga termasuk elemen di $\mathbb{Z}$ toh?

Nah, selanjutnya, kita tertarik untuk menyelidiki hasil dari $\sigma^n(O_i)$. Oleh sebab itu, untuk mengawalinya, ayo kita bentuk himpunan $\sigma(X)$ yang definisinya adalah sebagai berikut.

$$\sigma(X) \;=\; \{\sigma(x) \;:\; x \in X\} \;=\; \{\sigma(O_1),\, \sigma(O_2),\, \sigma(O_3),\, ...\, \sigma(O_n)\}$$

Nah! Karena σ adalah permutasi, maka σ adalah pemetaan bijektif dari-ke X. Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa domain dan range σ adalah sama. Dengan kata lain, $X = \sigma(X)$.

Oleh sebab itu, untuk objek O_i (yang di awal tadi kita pilih secara sembarang) akan termuat di dalam himpunan X dan juga himpunan $\sigma(X)$. Itu artinya, akan **terdapat dengan tunggal** indeks j_1 sedemikian sehingga $\sigma(O_{j_1}) \in \sigma(X)$ dan $O_i = \sigma(O_{j_1})$.

Eh! Kenapa tadi disebutkan **"terdapat dengan tunggal"**?

Itu kan karena σ adalah pemetaan bijektif. Sifat pemetaan bijektif itu kan jika terdapat $x, y \in X$ dengan $\sigma(x) = \sigma(y)$, maka pasti akan berlaku $x = y$.

Oke! Kembali ke objek O_{j_1} yang memenuhi persamaan $O_i = \sigma(O_{j_1})$. Perhatikan bahwa ada dua kemungkinan yang bisa terjadi:

- $O_{j_1} = O_i$ (dengan kata lain, $i = j_1$), atau
- $O_{j_1} \neq O_i$

Jika yang terjadi adalah kemungkinan $O_{j_1} = O_i$, maka akibatnya akan berlaku persamaan $O_i = \sigma(O_i)$. Dengan demikian, relasi $\sim$ bersifat refleksif karena kita bisa menetapkan nilai $m' = 1$ sedemikian sehingga berlaku persamaan $\sigma^{m'}(O_i) = O_i$.

Selanjutnya, bagaimana jika yang terjadi adalah kemungkinan yang $O_{j_1} \neq O_i$?

Oh, no worry dong ya! Ingat! Karena berlaku $X = \sigma(X)$, maka akan berlaku $O_{j_1} \in \sigma(X)$. Itu artinya, akan **terdapat dengan tunggal** indeks j_2 sedemikian sehingga $\sigma(O_{j_2}) \in \sigma(X)$ dan $O_{j_1} = \sigma(O_{j_2})$. Akibatnya pula, akan berlaku $O_i = \sigma^2(O_{j_2})$.

Perhatikan ya! Dari kemungkinan ini kita mendapatkan indeks i, j_1, j_2. Dari sini, akan muncul 2 kemungkinan yang serupa, yaitu:

- $O_{j_2} = O_i$ (dengan kata lain, $i = j_2$), atau
- $O_{j_2} \neq O_i$

Apabila yang terjadi adalah kemungkinan $O_{j_2} \neq O_i$, maka kita bisa mengulangi penalaran di atas secara terus-menerus sedemikian sehingga kita akan mendapatkan indeks-indeks j_1, j_2, j_3, j_4, ... dst yang saling berbeda.

Catatan 1

Ingat!

Jika indeks-indeks j_1, j_2, j_3, j_4, ... dst saling berbeda (dengan kata lain $j_1 \neq j_2 \neq j_3 \neq ...$ dst), maka objek-objek O_i, O_{j_2}, O_{j_3}, O_{j_4}, ... dst juga akan saling berbeda (dengan kata lain $O_{j_1} \neq O_{j_2} \neq O_{j_3} \neq ...$ dst).

Tentu saja, kita dapat membentuk himpunan indeks-indeks j yang kita dapatkan dari perulangan penalaran ini sebagai himpunan J_{O_i} dengan definisi sebagai berikut.

$$J_{O_i} = \{j_1, j_2, j_3, ...\}$$

Satu hal lagi yang perlu diingat adalah $i \notin \{j_1, j_2, j_3, ...\}$.

Nah! Perhatikan!

Karena himpunan X adalah himpunan berhingga yang memuat n objek dan σ adalah pemetaan bijektif dari-ke X, maka **perulangan penalaran di atas suatu saat pasti akan berhenti!**

Oleh sebab itu, himpunan indeks-indeks J_{O_i} adalah himpunan berhingga. Lebih tepatnya, himpunan J_{O_i} tersebut **paling banyak** akan memuat $n-1$ indeks.

Lebih lanjut, jika kita tetapkan $m' = |J_{O_i}| + 1$, maka kita akan memperoleh persamaan $O_i = \sigma^{m'}(O_i)$. Dengan demikian, kita dapat menyatakan bahwa relasi $\sim$ bersifat refleksif.

Oh iya! Hasil penjabaran pada **Langkah-5** ini akan memunculkan tiga sifat berikut.

Sifat 1

Diketahui himpunan objek X yang beranggotakan n objek dan permutasi $\sigma \in S_n$.

Untuk sebarang objek $O_i \in X$ akan terdapat suatu bilangan asli k yang memenuhi pertidaksamaan $1 \leq k \leq n$ dan juga memenuhi persamaan $\sigma^k(O_i) = O_i$.

Bilangan asli k ini disebut sebagai order invarian objek O_i terhadap permutasi σ.

Sifat 2

Diketahui himpunan objek X yang beranggotakan n objek dan permutasi $\sigma \in S_n$.

Untuk sebarang objek $O_i \in X$, jika k adalah order invarian objek O_i terhadap permutasi σ, maka akan berlaku persamaan $\sigma^{(n \cdot k)}(O_i) = O_i$ untuk sebarang bilangan asli n.

Sifat 3

Diketahui himpunan objek X yang beranggotakan n objek dan permutasi $\sigma \in S_n$.

Untuk sebarang objek $O_i, O_j \in X$ yang memenuhi relasi $O_i \sim O_j$, jika k adalah order invarian objek O_i terhadap permutasi σ, maka akan terdapat bilangan asli m yang memenuhi pertidaksamaan $1 \le m \le k \le n$ dan juga persamaan $\sigma^m(O_i) = O_j$.

- **Langkah-6**

Selanjutnya, kita akan menunjukkan bahwa relasi $\sim$ bersifat simetris. Misalkan terdapat objek-objek $O_i, O_j \in X$ sedemikian sehingga $O_i \sim O_j$. Kita akan menunjukkan bahwa berlaku juga $O_j \sim O_i$.

Oke! Misalkan terdapat objek-objek $O_i, O_j \in X$ sedemikian sehingga $O_i \sim O_j$. Dengan demikian, berdasarkan definisi relasi $\sim$, akan berlaku persamaan $\sigma^{m_1}(O_i) = O_j$ untuk suatu $m_1 \in \mathbb{Z}$.

Berdasarkan akhir **Sifat 3** di atas, kita bisa memilih bilangan m_1 sebagai bilangan asli yang memenuhi pertidaksamaan $1 \le m_1 \le k \le n$ dengan k adalah order invarian objek O_i terhadap permutasi σ.

Ingat! Karena k adalah order invarian objek O_i terhadap permutasi σ, maka akan berlaku persamaan $\sigma^k(O_i) = O_i$. Jika kita tetapkan bilangan asli m' sebagai $m' = k - m_1$, maka kita akan mendapatkan hasil sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\sigma^{m_1}(O_i) = O_j &\implies \sigma^{m'}\Big(\sigma^{m_1}(O_i) \Big) = \sigma^{m'}(O_j) \\
&\implies \sigma^{(m'+m_1)}(O_i) = \sigma^{m'}(O_j) \\
&\implies \sigma^{(k-m_1+m_1)}(O_i) = \sigma^{(k-m_1)}(O_j) \\
&\implies \sigma^{k}(O_i) = \sigma^{(k-m_1)}(O_j) \\
&\implies O_i = \sigma^{(k-m_1)}(O_j)
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, jika k adalah order invarian objek O_i terhadap permutasi σ, maka kita dapat menetapkan bilangan asli m' sebagai $m' = k - m_1$ sedemikian sehingga berlaku persamaan $O_i = \sigma^{(k-m_1)}(O_j)$ yang akan menyebabkan berlakunya relasi $O_j \sim O_i$. Dengan demikian, kita dapat menyatakan bahwa relasi $\sim$ bersifat simetris.

- **Langkah-7**

Terakhir, kita akan menunjukkan bahwa relasi $\sim$ bersifat transitif. Misalkan terdapat objek-objek O_i, O_j, dan $O_k \in X$ sedemikian sehingga $O_i \sim O_j$ dan $O_j \sim O_k$. Kita akan menunjukkan bahwa berlaku juga $O_i \sim O_k$.

Oke! Misalkan terdapat objek-objek O_i, O_j, dan $O_k \in X$ sedemikian sehingga $O_i \sim O_j$ dan $O_j \sim O_k$. Dengan demikian, berdasarkan definisi relasi $\sim$, akan berlaku persamaan:

- $\sigma^{m_1}(O_i) = O_j$, dan
- $\sigma^{m_2}(O_j) = O_k$

untuk suatu $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$.

Selanjutnya, perhatikan penjabaran berikut.

$$\begin{aligned} \sigma^{m_2}(O_j) = O_k &\implies \sigma^{m_2}(\sigma^{m_1}(O_i)) = O_k \\ &\iff \sigma^{(m_2+m_1)}(O_i) = O_k \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, karena $\sigma^{(m_2+m_1)}(O_i) = O_k$ untuk suatu $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, maka berdasarkan definisi relasi $\sim$, kita bisa menyatakan bahwa $O_i \sim O_k$. Dengan demikian, kita dapat menyatakan bahwa relasi $\sim$ bersifat transitif.

- **Kesimpulan**

Jadi, berdasarkan ketujuh langkah di atas, karena kita sudah berhasil menunjukkan bahwa relasi $\sim$ bersifat refleksif, simetris, sekaligus transitif, maka kita dapat menyatakan bahwa $\sim$ adalah relasi ekuivalensi.

***

- **Subsoal Poin (b)**

Diketahui $n = 6$. Dengan demikian, kita punya himpunan objek $X = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$. Selain itu, diketahui juga permutasi $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in S_6$.

Pada subsoal poin ini kita diperintahkan untuk membuat kelas-kelas ekuivalensi berdasarkan relasi ekuivalensi $\sim$ sebagaimana yang telah ditunjukkan keabsahannya pada tugas subsoal poin (a).

Berdasarkan permutasi $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, kita bisa menyatakan hasil pemetaan berikut.

- $\sigma(O_1) = O_1$
- $\sigma(O_2) = O_3$
- $\sigma(O_3) = O_5$
- $\sigma(O_4) = O_2$
- $\sigma(O_5) = O_4$
- $\sigma(O_6) = O_6$

Pertama-tama, ayo kita selidiki kelas ekuivalensi yang memuat objek O_1!

Pada penjabaran pemetaan di atas, diketahui bahwa $\sigma(O_1) = O_1$. Itu berarti, untuk sebarang bilangan asli n akan berlaku $\sigma^n(O_1) = O_1$. Dengan demikian kita dapat menyimpulkan bahwa objek O_1 termuat di dalam kelas ekuivalensi yang hanya memuat satu objek, yaitu O_1 itu sendiri. Kita notasikan kelas ekuivalensi yang memuat objek O_1 ini sebagai P_1 dengan definisi sebagai berikut.

$$P_1 = \{O_1\}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, diketahui juga bahwa $\sigma(O_6) = O_6$. Sama seperti objek O_1, itu artinya objek O_6 termuat di dalam kelas ekuivalensi yang hanya memuat satu objek, yaitu O_6 itu sendiri. Kita notasikan kelas ekuivalensi yang memuat objek O_6 ini sebagai P_2 dengan definisi sebagai berikut.

$$P_2 = \{O_6\}$$

Oke! Sejauh ini kita sudah menyelidiki kelas-kelas ekuivalensi untuk objek O_1 dan O_6. Selanjutnya, ayo kita selidiki kelas-kelas ekuivalensi untuk objek O_2, O_3, O_4, dan O_5!

Pada penjabaran pemetaan di atas, diketahui bahwa $\sigma(O_2) = O_3$, $\sigma(O_3) = O_5$, $\sigma(O_5) = O_4$, dan $\sigma(O_4) = O_2$. Dengan demikian, kita dapat menyatakan bahwa:

- $\sigma^1(O_2) = O_3$
- $\sigma(O_3) = \sigma^2(O_2) = O_5$
- $\sigma(O_5) = \sigma^3(O_2) = O_4$
- $\sigma(O_4) = \sigma^4(O_2) = O_2$.

Berdasarkan penjabaran di atas, terlihat bahwa order invarian objek O_2 terhadap permutasi σ adalah 4. Selain itu, terlihat juga bahwa $O_2 \sim O_2$, $O_2 \sim O_3$, $O_2 \sim O_4$, dan $O_2 \sim O_5$. Karena semua objek yang berelasi termuat di dalam kelas ekuivalensi yang sama, maka objek O_2, O_3, O_4, dan O_5 termuat di dalam kelas ekuivalensi yang sama. Kita notasikan kelas ekuivalensi yang memuat objek-objek ini sebagai P_3 dengan definisi sebagai berikut.

$$P_3 = \{O_2,\ O_3,\ O_4,\ O_5\}$$

Sudah deh! Berdasarkan penjabaran di atas kita bisa menyatakan bahwa:

- Objek O_1 termuat di kelas ekuivalensi P_1.
- Objek O_2 termuat di kelas ekuivalensi P_3.
- Objek O_3 termuat di kelas ekuivalensi P_3.
- Objek O_4 termuat di kelas ekuivalensi P_3.
- Objek O_5 termuat di kelas ekuivalensi P_3.
- Objek O_6 termuat di kelas ekuivalensi P_2.

Jadi, relasi $\sim$ sebagaimana yang didefinisikan pada soal dengan permutasi $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ akan **mempartisi** himpunan objek $X = \{O_1,\ O_2,\ O_3,\ O_4,\ O_5,\ O_6\}$ menjadi 3 partisi, yaitu:

$$P_1 = \{O_1\},$$
$$P_2 = \{O_6\}, \text{ dan}$$
$$P_3 = \{O_2,\ O_3,\ O_4,\ O_5\}$$

Tentu saja, sebagaimana partisi pada umumnya, akan berlaku sifat:

$$P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \emptyset \quad \text{dan} \quad P_1 \cup P_2 \cup P_3 = X.$$

■

4

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 2 (a)

Soal

Diberikan grup berhingga G dengan banyak anggota n, $G = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.
Jika G komutatif, dan $x = a_1 a_2 ... a_n$ tunjukkan bahwa $x^2 = e$, dengan e elemen identitas dari G.

Dikerjakan

Sebelumnya, untuk mempermudah pemahaman, kita notasikan operasi biner pada grup G sebagai $\star$.

Nah, jika kita mengambil sebarang elemen $a_i \in G$, maka kita dapat menggolongkan a_i ke dalam 2 golongan sebagai berikut.

1. **Golongan Pertama**: Invers a_i adalah dirinya sendiri.
   ($a_i \star a_i = e$)
2. **Golongan Kedua**: Invers a_i adalah elemen lain.
   ($\exists a_j,\ a_i \neq a_j,\ a_i \star a_j = e$)

   Ingat! Invers setiap elemen di grup adalah tunggal!
   (Jika $a, b, c \in G$ dengan b dan c adalah invers dari a, maka berlaku $b = c$)

Berdasarkan penggolongan di atas, perhatikan bahwa **setiap $a_i \in G$ termuat di tepat satu golongan**! Dengan demikian, kita dapat "memisahkan" elemen-elemen di G ke dalam dua himpunan I_1 dan I_2 sebagai berikut.

- Himpunan I_1 berisikan elemen-elemen di G yang masuk Golongan Pertama.
  Dengan kata lain, himpunan I_1 berisikan elemen-elemen di G yang inversnya adalah dirinya sendiri.

$$I_1 = \{a_{k_1},\ a_{k_2},\ a_{k_3},\ ...,\ a_{k_r}\} \text{ dengan sifat } a_{k_i} \star a_{k_i} = e$$

- Himpunan I_2 berisikan pasangan elemen di G yang masuk Golongan Kedua.
  Dengan kata lain, himpunan I_2 berisikan pasangan elemen di G yang saling invers.

$$I_2 = \{\ (a_{j_1}, a_{j_2}),\ (a_{j_3}, a_{j_4}),\ (a_{j_5}, a_{j_6}),\ ...\ , (a_{j_{s-1}}, a_{j_s})\ \}$$
$$\text{dengan sifat } (a_{j_i},\ a_{j_{i+1}}) \text{ adalah pasangan invers, yaitu } a_{j_i} \neq a_{j_{i+1}} \quad a_{j_i} \star a_{j_{i+1}} = e$$

***

Nah, sekarang ayo kita kembali ke grup $G = \{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$!

Kita bentuk $x = a_1 \star a_2 \star a_3 \star ... \star a_n$.

Ingat! $(G, \star)$ adalah grup komutatif!

Dengan menggunakan sifat komutatif dan asosiatif operasi $\star$, maka kita dapat memindah letak elemen-elemen a_i pada bentuk $a_1 \star a_2 \star a_3 \star ... \star a_n$. Kita akan memindah letak elemen-elemen a_i tersebut dengan mengacu pada himpunan I_1 dan I_2. Hasilnya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x &= a_1 \star a_2 \star a_3 \star ... \star a_n \\ &= a_{k_1} \star a_{k_2} \star a_{k_3} \star ... \star a_{k_r} \quad \star \quad (a_{j_1} \star a_{j_2}) \star (a_{j_3} \star a_{j_4}) \star (a_{j_5} \star a_{j_6}) \star ... \star (a_{j_{s-1}} \star a_{j_s}) \end{aligned}$$

Karena $(a_{j_i} \star a_{j_{i+1}}) = e$ maka:

$$\begin{aligned} &= a_{k_1} \star a_{k_2} \star a_{k_3} \star ... \star a_{k_r} \quad \star \quad e \star e \star e \star ... \star e \\ &= a_{k_1} \star a_{k_2} \star a_{k_3} \star ... \star a_{k_r} \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh $x = a_{k_1} \star a_{k_2} \star a_{k_3} \star ... \star a_{k_r}$.

Selanjutnya, kita akan bentuk x^2. Perhatikan penjabaran berikut!

$$
\begin{aligned}
x^2 &= x \star x \\
&= (a_{k_1} \star a_{k_2} \star a_{k_3} \star \ldots \star a_{k_r}) \star (a_{k_1} \star a_{k_2} \star a_{k_3} \star \ldots \star a_{k_r})
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan sifat komutatif dan asosiatif operasi $\star$,
kita bisa memindah letak elemen-elemen pada persamaan di atas menjadi seperti di bawah.

$$= (a_{k_1} \star a_{k_1}) \star (a_{k_2} \star a_{k_2}) \star (a_{k_3} \star a_{k_3}) \star \ldots \star (a_{k_{r-1}} \star a_{k_{r-1}}) \star (a_{k_r} \star a_{k_r})$$

Ingat! Invers dari elemen a_{k_i} adalah dirinya sendiri. Dengan kata lain, $(a_{k_i} \star a_{k_i}) = e$.
Dengan demikian, persamaan di atas akan menjadi seperti di bawah.

$$
\begin{aligned}
&= e \star e \star e \star \ldots \star e \star e \\
&= e
\end{aligned}
$$

Jadi, berdasarkan penjabaran di atas, diperoleh persamaan $x^2 = e$ dengan e adalah elemen identitas di G.

■

5

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 2 (b)

Soal

Diberikan grup G dengan sifat $(ab)^2 = a^2b^2$ untuk setiap $a, b \in G$.

Buktikan bahwa G komutatif!

Dikerjakan

Sebelumnya, untuk mempermudah pemahaman, kita notasikan operasi biner pada grup G sebagai $\star$.

Nah, kita akan menunjukkan bahwa $(G, \star)$ adalah grup komutatif, yaitu untuk sebarang $a, b \in G$ akan berlaku $a \star b = b \star a$.

Berdasarkan apa yang diketahui pada soal, kita mengetahui bahwa untuk sebarang $a, b \in G$ akan berlaku $(a \star b)^2 = a^2 \star b^2$.

Ingat bahwa untuk sebarang $g \in G$, notasi g^2 bermakna $g \star g$. Dengan demikian, berdasarkan apa yang diketahui pada soal, kita mengetahui bahwa untuk sebarang $a, b \in G$ akan berlaku $(a \star b) \star (a \star b) = (a \star a) \star (b \star b)$.

Ayo perhatikan dengan saksama persamaan $(a \star b) \star (a \star b) = (a \star a) \star (b \star b)$!

Karena $(G, \star)$ merupakan grup, maka kita dapat menggunakan sifat asosiatif operasi $\star$ untuk memindah letak tanda kurung pada persamaan di atas.

Di ruas kiri persamaan, kita memiliki bentuk $(a \star b) \star (a \star b)$. Dengan menggunakan sifat asosiatif operasi $\star$ untuk memindah letak tanda kurung, kita akan memperoleh persamaan:

$$(a \star b) \star (a \star b) = a \star (b \star a) \star b \qquad \text{...(2.b.1)}$$

Di ruas kanan persamaan, kita memiliki bentuk $(a \star a) \star (b \star b)$. Dengan menggunakan sifat asosiatif operasi $\star$ untuk memindah letak tanda kurung, kita akan memperoleh persamaan:

$$(a \star a) \star (b \star b) = a \star (a \star b) \star b \qquad \text{...(2.b.2)}$$

Jika kita substitusikan persamaan (2.b.1) dan (2.b.2) ke persamaan utama $(a \star b) \star (a \star b) = (a \star a) \star (b \star b)$, maka kita akan memperoleh persamaan:

$$a \star (b \star a) \star b \ = \ a \star (a \star b) \star b$$

Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka terdapat elemen invers untuk a dan b yaitu a^{-1} dan b^{-1}. Jika kedua ruas pada persamaan di atas kita operasikan dengan a^{-1} dari kiri dilanjutkan dengan b^{-1} dari kanan akan diperoleh hasil sebagaimana berikut.

$$\begin{aligned}
a \star (b \star a) \star b \ = \ a \star (a \star b) \star b &\iff a^{-1} \star (a \star (b \star a) \star b) \ = \ a^{-1} \star (a \star (a \star b) \star b) \\
&\iff (a^{-1} \star a) \star ((b \star a) \star b) \ = \ (a^{-1} \star a) \star ((a \star b) \star b) \\
&\iff e \star ((b \star a) \star b) \ = \ e \star ((a \star b) \star b) \\
&\iff (b \star a) \star b \ = \ (a \star b) \star b \\
\\
&\iff ((b \star a)) \star b \star b^{-1} \ = \ ((a \star b) \star b) \star b^{-1} \\
&\iff (b \star a) \star e \ = \ (a \star b) \star e \\
&\iff b \star a \ = \ a \star b
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, jika $(G, \star)$ adalah grup dengan sifat $(a \star b)^2 = a^2 \star b^2$ untuk setiap $a, b \in G$, maka akan berlaku pula sifat $a \star b = b \star a$.

Jadi, kita dapat menyimpulkan bahwa $(G, \star)$ adalah grup komutatif.

$\blacksquare$

6

Ayo Kerjakan!
Ujian Tengah Semester
Soal Nomor 3

Soal

Diberikan grup G, dan N, K masing-masing subgrup dari G.
Jika N subgrup normal dari G, maka buktikan bahwa $KN = \{kn \mid k \in K, n \in N\}$ merupakan subgrup dari G!

Dikerjakan

Berdasarkan soal, diketahui bahwa G merupakan grup. Dengan demikian, kita dapat menyatakan bahwa G merupakan grup terhadap suatu operasi biner. Mari kita notasikan operasi biner tersebut sebagai $\star$.

Selain itu, diketahui juga bahwa K dan N adalah subgrup dari G. Dengan demikian $N \subseteq G$ dan $K \subseteq G$. Dengan demikian pula K dan N adalah grup terhadap operasi biner $\star$ yang sama pada G.

Jadi, $(G, \star)$, $(N, \star)$, dan $(K, \star)$ adalah grup.

Terakhir, berdasarkan soal diketahui bahwa N merupakan subgrup normal. Artinya, untuk setiap $g \in G$ dan untuk setiap $n \in N$ akan berlaku $(g \star n) \star g^{-1} \in N$.

Ingat! Walaupun N adalah subgrup normal, **tidak ada jaminan** lho bahwa K juga merupakan subgrup normal!

***

Oke! Mari kita kerjakan soal ini! 😀

Berdasarkan grup K dan N, kita bentuk himpunan KN dengan definisi sebagai berikut.

$$KN = \{n \star k \mid n \in N \text{ dan } k \in K\}$$

Nah, soal memerintahkan kita untuk membuktikan bahwa $(KN, \star)$ adalah subgrup dari G.

Kita akan melakukan serangkaian langkah-langkah berikut secara berurutan untuk menunjukkan bahwa $(KN, \star)$ adalah subgrup dari G.

1. Menunjukkan bahwa KN merupakan himpunan bagian dari G.
2. Jika Poin (1) terbukti benar, maka kita akan menunjukkan bahwa operasi $\star$ merupakan operasi biner di KN, yaitu operasi $\star$ terdefinisi dengan baik sekaligus tertutup di KN.
3. Jika Poin (2) terbukti benar, maka kita akan menunjukkan bahwa operasi $\star$ bersifat asosiatif di KN.
4. Jika Poin (3) terbukti benar, maka kita akan menunjukkan bahwa KN memuat elemen identitas terhadap operasi $\star$.
5. Jika Poin (4) terbukti benar, maka kita akan menunjukkan bahwa setiap elemen di KN memiliki invers terhadap operasi $\star$.

Oke! Ayo kita mulai!

• Langkah-1: Menunjukkan bahwa KN merupakan himpunan bagian dari G.

Cara untuk menunjukkan bahwa KN merupakan himpunan bagian dari G adalah dengan menunjukkan bahwa sebarang elemen di KN juga merupakan elemen di G. Dengan kata lain, untuk sebarang $x \in KN$, maka akan berlaku $x \in G$.

Mari kita ambil sebarang $x \in KN$. Berdasarkan definisi himpunan KN, maka $x = k_1 \star n_1$ untuk suatu $k_1 \in K$ dan $n_1 \in N$. Karena K adalah subgrup dari G, maka elemen-elemen di K juga merupakan elemen-elemen di G, termasuk k_1. Demikian pula, karena N adalah subgrup dari G, maka elemen-elemen di N juga merupakan elemen-elemen di G, termasuk n_1. Dengan kata lain, kita akan memperoleh $k_1 \in G$ dan $n_1 \in G$.

Kemudian, karena $(G, \star)$ adalah grup maka jelas operasi $\star$ tertutup di G. Dengan demikian, karena $k_1 \in G$ dan $n_1 \in G$, maka kita bisa menyatakan bahwa $k_1 \star n_1 \in G$. Karena $x = k_1 \star n_1$, dengan kata lain $x \in G$.

Jadi, kita bisa menyatakan bahwa KN merupakan himpunan bagian dari G.

• Langkah-2: Menunjukkan bahwa operasi $\star$ merupakan operasi biner di KN, yaitu terdefinisi dengan baik sekaligus tertutup di KN.

Karena $(G, \star)$ merupakan grup, maka kita dapat menyatakan bahwa operasi $\star$ terdefinisi dengan baik di G. Karena KN merupakan himpunan bagian dari G, maka kita dapat menyatakan bahwa operasi $\star$ juga terdefinisi dengan baik di KN.

Ingat! Walaupun operasi $\star$ juga terdefinisi dengan baik di KN, **tidak ada jaminan** bahwa operasi $\star$ ini tertutup di KN. Dengan demikian, kita harus menunjukkan bahwa operasi $\star$ tertutup di KN.

Kita akan menunjukkan bahwa operasi $\star$ tertutup di KN dengan cara mengambil sebarang 2 elemen di KN kemudian menunjukkan bahwa hasil operasi 2 elemen tersebut terhadap $\star$ juga termuat di KN. Dengan kata lain, untuk sebarang $x, y \in KN$ akan berlaku $x \star y \in KN$.

Oke, kita ambil sebarang $x, y \in KN$. Berdasarkan definisi himpunan KN, maka $x = k_1 \star n_1$ dan $y = k_2 \star n_2$ untuk suatu $k_1, k_2 \in K$ dan $n_1, n_2 \in N$.

Kemudian, kita operasikan x dengan y terhadap operasi $\star$ sebagai berikut.

$$x \star y$$

Karena $x = k_1 \star n_1$ dan $y = k_2 \star n_2$, maka akan berlaku persamaan berikut.

$$x \star y = (k_1 \star n_1) \star (k_2 \star n_2).$$

Karena K dan N adalah himpunan bagian dari G, maka n_1, n_2, k_1, k_2 juga merupakan elemen-elemen di G. Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka sifat asosiatif operasi $\star$ juga berlaku pada keempat elemen tersebut. Dengan demikian kita dapat "memindah" tanda kurung pada persamaan di atas menjadi seperti di bawah.

$$(k_1 \star n_1) \star (k_2 \star n_2) = k_1 \star (n_1 \star k_2) \star n_2$$

Nah! Ingat! Karena K adalah subgrup dari G dan $k_2 \in K$, maka k_2 memiliki invers, yaitu $k_2^{-1} \in K$. Ingat! Karena K adalah subgrup dari G, maka k_2^{-1} juga merupakan elemen di G.

Selanjutnya, ayo kita manfaatkan sifat N sebagai subgrup normal! Karena N adalah subgrup normal dan $n_1 \in N$, maka untuk setiap $g \in G$ akan berlaku $(g \star n_1) \star g^{-1} \in N$. Karena k_2^{-1} juga merupakan elemen di G, maka berlaku $(k_2^{-1} \star n_1) \star (k_2^{-1})^{-1} \in N$.

Oh iya! Perhatikan bahwa $(k_2^{-1} \star n_1) \star (k_2^{-1})^{-1}$ itu ekuivalen dengan $(k_2^{-1} \star n_1) \star k_2$.

Selanjutnya, kita misalkan $(k_2^{-1} \star n_1) \star k_2 = n_3$ untuk suatu $n_3 \in N$. Jika kedua ruas pada persamaan $(k_2^{-1} \star n_1) \star k_2 = n_3$ kita operasikan dengan k_2 dari kiri, akan diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
(k_2^{-1} \star n_1) \star k_2 = n_3 &\iff k_2^{-1} \star (n_1 \star k_2) = n_3 \\
&\iff k_2 \star k_2^{-1} \star (n_1 \star k_2) = k_2 \star n_3 \\
&\iff e \star (n_1 \star k_2) = k_2 \star n_3 \\
&\iff n_1 \star k_2 = k_2 \star n_3
\end{aligned}$$

Jika persamaan $n_1 \star k_2 = k_2 \star n_3$ kita substitusikan ke persamaan $(k_1 \star n_1) \star (k_2 \star n_2) = k_1 \star (n_1 \star k_2) \star n_2$, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
(k_1 \star n_1) \star (k_2 \star n_2) &= k_1 \star (n_1 \star k_2) \star n_2 \\
&= k_1 \star (k_2 \star n_3) \star n_2 \\
&= (k_1 \star k_2) \star (n_3 \star n_2) \\
&= k_4 \star n_4, \text{ untuk suatu } k_4 = k_1 \star k_2 \in K \text{ dan } n_4 = n_3 \star n_2 \in N
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$(k_1 \star n_1) \star (k_2 \star n_2) = k_4 \star n_4,$$
$$\text{untuk suatu } k_4 \in K \text{ dan } n_4 \in N$$

Karena $x \star y = (k_1 \star n_1) \star (k_2 \star n_2)$, akibatnya:

$$x \star y = k_4 \star n_4, \text{ untuk suatu } k_4 \in K \text{ dan } n_4 \in N$$

Dengan kata lain, $x \star y \in KN$.

Jadi, kita dapat menyatakan bahwa operasi $\star$ tertutup di KN.

- **Langkah-3: Menunjukkan bahwa operasi $\star$ bersifat asosiatif di KN.**

Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka operasi $\star$ bersifat asosiatif untuk semua elemen himpunan G.

Karena K, N, dan KN adalah himpunan bagian dari G, maka semua elemen himpunan K, N, dan KN juga merupakan elemen himpunan G.

Dengan demikian, otomatis operasi $\star$ juga bersifat asosiatif untuk semua elemen himpunan K, N, dan KN.

- **Langkah-4: Menunjukkan bahwa KN memuat elemen identitas terhadap operasi $\star$.**

Diketahui $(G, \star)$ adalah grup. Diketahui pula K dan N adalah subgrup dari G. Selanjutnya, perhatikan sifat berikut.

> **Sifat Elemen Identitas di Subgrup**
>
> Diketahui G adalah grup dan N adalah subgrup dari G.
> Elemen identitas di G juga merupakan elemen identitas di N.

Berdasarkan sifat di atas, jika e merupakan elemen identitas di G, maka e juga merupakan elemen identitas di K dan N. Dengan kata lain, e termuat di K dan N ($e \in K$ dan $e \in N$).

Perhatikan, bahwa kita dapat membentuk persamaan berikut.

$$e = \underset{\in K}{e} \star \underset{\in N}{e} \in KN$$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan bahwa $e \in KN$.

Pertanyaannya,

Apakah e juga merupakan elemen identitas di KN?

Hmmm....

Ayo kita ambil sebarang $x \in KN$. Berdasarkan definisi himpunan KN, maka $x = k_1 \star n_1$ untuk suatu $k_1 \in K$ dan $n_1 \in N$.

Selanjutnya, kita akan menyelidiki hasil dari $e \star x$ dan $x \star e$.

Untuk $e \star x$, kita dapat menyatakan operasi tersebut dengan persamaan berikut.

$$e \star x = e \star (k_1 \star n_1)$$

Karena e, k_1, dan n_1 merupakan elemen-elemen himpunan G, maka kita dapat menggunakan sifat asosiatif operasi $\star$ untuk "memindah" tanda kurung pada persamaan di atas menjadi seperti berikut.

$$e \star (k_1 \star n_1) = (e \star k_1) \star n_1$$

Karena e juga merupakan elemen identitas di K, maka kita akan memperoleh $e \star k_1 = k_1$. Dengan demikian, persamaan di atas akan menjadi seperti di bawah ini.

$$(e \star k_1) \star n_1 = k_1 \star n_1 = x$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita mendapatkan persamaan $e \star x = x$. Dengan langkah-langkah yang serupa untuk $x \star e$, kita akan mendapatkan persamaan $x \star e = x$.

Jadi, karena $e \in KN$ dan untuk sebarang $x \in KN$ berlaku $x \star e = e \star x = x$, maka kita dapat menyatakan bahwa KN memuat elemen identitas, yaitu e yang juga merupakan elemen identitas di grup G, subgrup K, dan subgrup N.

- **Langkah-5: Menunjukkan bahwa setiap elemen di KN memiliki invers terhadap operasi $\star$.**

Untuk menunjukkan bahwa setiap elemen di KN memiliki invers terhadap operasi $\star$ adalah dengan cara menunjukkan bahwa untuk sebarang $x \in KN$ terdapat $y \in KN$ sedemikian sehingga berlaku $x \star y = y \star x = e$.

Mari kita ambil sebarang $x \in KN$. Berdasarkan definisi himpunan KN, maka $x = k_1 \star n_1$ untuk suatu $k_1 \in K$ dan $n_1 \in N$.

Oke! Selanjutnya, kita akan **membuat asumsi** bahwa elemen x ini benar-benar memiliki invers, yaitu elemen y. Karena elemen y adalah invers dari elemen x, dengan demikian y juga merupakan elemen di KN. Berdasarkan definisi himpunan KN, maka $y = k' \star n'$ untuk suatu $k' \in K$ dan $n' \in N$.

Kemudian, karena elemen y adalah invers dari elemen x, maka berlaku $x \star y = e$. Dengan mensubstitusikan $x = k_1 \star n_1$ dan $y = k' \star n'$, maka kita akan memperoleh persamaan $x \star y = (k_1 \star n_1) \star (k' \star n') = e$.

Selanjutnya, apabila kita memanfaatkan sifat asosiatif operasi $\star$ untuk "memindah" posisi tanda kurung, maka kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$(k_1 \star n_1) \star (k' \star n') = k_1 \star (n_1 \star k') \star n' = e$$

Nah! Perhatikan! Kita akan **membuat asumsi** kedua bahwa $n_1 \star k' = e$ (atau dengan kata lain $k' = n_1^{-1}$). Dengan demikian, kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$k_1 \star (n_1 \star k') \star n' = k_1 \star e \star n' = k_1 \star n' = e$$

Oke! Dari 2 asumsi yang kita buat, kita akan memperoleh persamaan $k_1 \star n' = e$, atau dengan kata lain $n' = k_1^{-1}$.

Oke! Apabila semua asumsi-asumsi di atas disatukan, kita akan memperoleh suatu asumsi pamungkas bahwasanya elemen $y = n_1^{-1} \star k_1^{-1}$ merupakan invers dari elemen $x = k_1 \star n_1$.

Eits! Ingaaat!

Eksistensi elemen y ini baru sebatas **asumsi** lho! Belum dibuktikan kebenarannya. 😀

Oke! Sekarang kita akan mulai menunjukkan bahwa sebarang elemen di KN memiliki invers terhadap operasi $\star$. Lebih tepatnya, jika kita mengambil sebarang $x \in KN$, maka kita dapat menyatakan elemen x tersebut sebagai $k_1 \star n_1$ untuk suatu $k_1 \in K$ dan $n_1 \in N$. Nah, invers dari elemen x tersebut adalah elemen y yang memenuhi persamaan $y = n_1^{-1} \star k_1^{-1}$.

Oh iya! Sebelumnya ingat empat poin berikut!

Catatan 1

1. Karena K adalah grup, maka $k_1 \in K$ memiliki invers, yaitu k_1^{-1} yang juga merupakan elemen di K.
2. Karena N adalah grup, maka $n_1 \in N$ memiliki invers, yaitu n_1^{-1} yang juga merupakan elemen di N.
3. Karena K adalah subgrup dari G, maka k_1 dan k_1^{-1} juga merupakan elemen di G.
4. Karena N adalah subgrup dari G, maka n_1 dan n_1^{-1} juga merupakan elemen di G.

Nah, karena N adalah subgrup normal, maka untuk setiap $g \in G$ dan untuk setiap $n \in N$ akan berlaku $(g \star n^{-1}) \star g^{-1} \in N$.

Jika kita menggunakan poin nomor 2 dan 3 dari **Catatan 1** di atas, maka kita akan memperoleh sifat bahwa $(k_1 \star n_1^{-1}) \star k_1^{-1} \in N$.

Naaah, karena $k_1^{-1} \in K$ dan $(k_1 \star n_1^{-1}) \star k_1^{-1} \in N$, dengan begitu $k_1^{-1} \star \left((k_1 \star n_1^{-1}) \star k_1^{-1}\right)$ itu elemen di KN dong? Iya kan?

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} k_1^{-1} \star \left((k_1 \star n_1^{-1}) \star k_1^{-1}\right) &= \left(k_1^{-1} \star k_1\right) \star \left(n_1^{-1} \star k_1^{-1}\right) \\ &= e \star \left(n_1^{-1} \star k_1^{-1}\right) \\ &= n_1^{-1} \star k_1^{-1} \end{aligned}$$

Dengan demikian, kita memperoleh sifat bahwa $n_1^{-1} \star k_1^{-1} \in KN$.

Terakhir, karena:

- $(k_1 \star n_1) \star (n_1^{-1} \star k_1^{-1}) = k_1 \star (n_1 \star n_1^{-1}) \star k_1^{-1} = k_1 \star e \star k_1^{-1} = e$, dan
- $(n_1^{-1} \star k_1^{-1}) \star (k_1 \star n_1) = n_1^{-1} \star (k_1^{-1} \star k_1) \star n_1 = n_1^{-1} \star e \star n_1 = e$.

maka kita dapat menyatakan bahwa jika kita mengambil sebarang $x \in KN$, maka kita dapat menyatakan elemen x tersebut sebagai $k_1 \star n_1$ untuk suatu $k_1 \in K$ dan $n_1 \in N$ dan invers dari elemen x tersebut adalah elemen y yang memenuhi persamaan $y = n_1^{-1} \star k_1^{-1}$.

Jadi, kita dapat menyatakan bahwa setiap elemen di KN memiliki invers terhadap operasi $\star$.

- **Kesimpulan**

Jadi, berdasarkan langkah-langkah di atas, kita sudah menunjukkan kebenaran aksioma-aksioma berikut.

1. Himpunan KN merupakan himpunan bagian dari G.
2. Operasi $\star$ merupakan operasi biner di KN, yaitu operasi $\star$ terdefinisi dengan baik sekaligus tertutup di KN.
3. Operasi $\star$ bersifat asosiatif di KN.
4. Himpunan KN memuat elemen identitas terhadap operasi $\star$.
5. Setiap elemen di KN memiliki invers terhadap operasi $\star$.

Jadi, kita dapat menyatakan bahwa $(KN, \star)$ adalah subgrup dari G.

■

7

Ayo Kerjakan!
Ujian Tengah Semester
Soal Nomor 4

Soal

Diberikan bilangan bulat $n > 1$ dan grup G dengan sifat $(ab)^n = a^n b^n$ untuk semua $a, b \in G$. Buktikan bahwa:

(a) $G^n = \{x^n \mid x \in G\}$ merupakan subgrup normal dari G.

(b) $G[n] = \{z \in G \mid z^n = e\}$ merupakan subgrup normal dari G.

Dikerjakan

Sebelumnya, perhatikan bahwa:

- Untuk memudahkan pemahaman, kita nyatakan bahwa G merupakan grup terhadap operasi biner $\star$. Jadi $(G, \star)$ adalah grup.
- Yang dimaksud dengan a^n adalah $\underbrace{a \star a \star a \star \ldots \star a}_{\text{sebanyak } n}$
- Sifat $(a \star b)^n = a^n \star b^n$ untuk semua $a, b \in G$ **<u>hanya berlaku</u>** bagi suatu bilangan bulat "istimewa" n yang nilainya lebih besar dari 1. Semisal ada bilangan bulat lain, yaitu m, yang nilainya juga lebih besar dari 1, maka sifat $(a \star b)^m = a^m \star b^m$ untuk semua $a, b \in G$ **belum tentu berlaku!**

- **Subsoal Poin (a)**

Oke, pertama kita selidiki dulu himpunan $G^n = \{x^n \mid x \in G\}$.

Kita akan menunjukkan bahwa G^n merupakan subgrup dari G dengan memanfaatkan teorema berikut.

> **Teorema Subgrup**
>
> Diketahui $(G, \star)$ adalah grup dan H adalah himpunan bagian dari G.
> $(H, \star)$ merupakan subgrup dari $(G, \star)$ jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $a \star b^{-1} \in H$.

Oke, kita ambil sebarang $a, b \in G^n$. Berdasarkan definisi himpunan G^n, maka $a = g_1^n$ dan $b = g_2^n$ untuk suatu $g_1, g_2 \in G$. Karena g_2 adalah elemen di grup $(G, \star)$, maka jelas bahwa g_2 memiliki invers, yaitu g_2^{-1}.

Berdasarkan definisi himpunan G^n, perhatikan bahwa $(g_2^{-1})^n \in G^n$.

Sesuai definisi, $(g_2^{-1})^n = \underbrace{g_2^{-1} \star g_2^{-1} \star g_2^{-1} \star ... \star g_2^{-1}}_{\text{sebanyak } n}$ dan $g_2^n = \underbrace{g_2 \star g_2 \star g_2 \star ... \star g_2}_{\text{sebanyak } n}$.

Nah, berdasarkan penjabaran di atas, kita akan memperoleh $(g_2^{-1})^n \star g_2^n = g_2^n \star (g_2^{-1})^n = e$.

Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa $(g_2^{-1})^n$ adalah invers dari g_2^n. Dengan kata lain, $(g_2^{-1})^n = (g_2^n)^{-1}$.

Selanjutnya, kita bentuk $a \star b^{-1}$. Karena $a = g_1^n$ dan $b = g_2^n$, maka:

$$a \star b^{-1} = g_1^n \star (g_2^n)^{-1}$$

Karena, $(g_2^{-1})^n = (g_2^n)^{-1}$, maka:

$$g_1^n \star (g_2^n)^{-1} = g_1^n \star (g_2^{-1})^n$$

Karena berlaku sifat $(a \star b)^n = a^n \star b^n$ untuk semua $a, b \in G$, maka:

$$g_1^n \star (g_2^{-1})^n = (g_1 \star g_2^{-1})^n$$

Karena g_1 dan g_2^{-1} adalah elemen-elemen di grup $(G, \star)$, maka jelas bahwa $g_1 \star g_2^{-1} \in G$.

Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa $(g_1 \star g_2^{-1})^n \in G^n$. Dengan kata lain, $a \star b^{-1} \in G^n$.

Jadi, karena untuk sebarang $a, b \in G^n$ berlaku $a \star b^{-1} \in G^n$, maka berdasarkan **Teorema Subgrup** di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa G^n merupakan subgrup dari G.

***

Selanjutnya, kita akan menunjukkan bahwa G^n merupakan subgrup normal dengan cara menunjukkan bahwa untuk sebarang $g \in G$ dan $x \in G^n$ akan berlaku $g \star x \star g^{-1} \in G^n$.

Kita ambil sebarang $g \in G$ dan $x \in G^n$. Berdasarkan definisi himpunan G^n, maka $x = g_1^n$ untuk suatu $g_1 \in G$.

Nah, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} g \star x \star g^{-1} &= g \star g_1^n \star g^{-1} \\ &= g \star \ (g_1 \star g_1^{n-1}) \ \star g^{-1} \\ &= g \star \ (g_1 \star \ e \ \star g_1^{n-1}) \ \star g^{-1} \\ &= g \star \ g_1 \star \ (g^{-1} \star g) \ \star g_1^{n-1} \ \star g^{-1} \\ &= (g \star g_1 \star g^{-1}) \ \star \ (g \star g_1^{n-1} \star g^{-1}) \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita memperoleh persamaan berikut.

$$g \star x \star g^{-1} = g \star g_1^n \star g^{-1} = (g \star g_1 \star g^{-1}) \ \star \ (g \star g_1^{n-1} \star g^{-1})$$

Dengan langkah-langkah penjabaran yang serupa, kita juga dapat memperoleh persamaan berikut.

$$\begin{aligned} g \star x \star g^{-1} &= g \star g_1^n \star g^{-1} \\ &= (g \star g_1 \star g^{-1}) \ \star \ (g \star g_1^{n-1} \star g^{-1}) \\ &= (g \star g_1 \star g^{-1}) \ \star \ (g \star g_1 \star g^{-1}) \ \star \ (g \star g_1^{n-2} \star g^{-1}) \\ &= (g \star g_1 \star g^{-1}) \ \star \ (g \star g_1 \star g^{-1}) \ \star \ (g \star g_1 \star g^{-1}) \ \star \ (g \star g_1^{n-3} \star g^{-1}) \\ &\text{hingga} \\ &= \underbrace{(g \star g_1 \star g^{-1}) \ \star \ (g \star g_1 \star g^{-1}) \ \star \ (g \star g_1 \star g^{-1}) \ \star \ \dots \ \star \ (g \star g_1 \star g^{-1})}_{\text{sebanyak } n} \\ &= (g \star g_1 \star g^{-1})^n \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, pada akhirnya kita akan mendapatkan persamaan $g \star x \star g^{-1} = (g \star g_1 \star g^{-1})^n$.

Karena g, g_1, dan g^{-1} adalah elemen-elemen di G, maka jelas bahwa $g \star g_1 \star g^{-1} \in G$. Dengan demikian, berdasarkan definisi himpunan G^n, kita dapat menyatakan bahwa $(g \star g_1 \star g^{-1})^n \in G^n$. Dengan kata lain, $g \star x \star g^{-1} \in G^n$.

Jadi, kita bisa menyatakan bahwa G^n adalah subgrup normal dari G.

• Subsoal Poin (b)

Oke, pertama kita selidiki dulu himpunan $G[n] = \{z \in G \mid z^n = e\}$.

Kita akan menunjukkan bahwa $G[n]$ merupakan subgrup dari G dengan memanfaatkan teorema berikut.

Teorema Subgrup

Diketahui $(G, \star)$ adalah grup dan H adalah himpunan bagian dari G.
$(H, \star)$ merupakan subgrup dari $(G, \star)$ jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $a \star b^{-1} \in H$.

Oke, kita ambil sebarang $a, b \in G[n]$. Berdasarkan definisi himpunan $G[n]$, maka $a^n = e$ dan $b^n = e$. Karena $b \in G[n]$, maka berdasarkan syarat keanggotaan grup $G[n]$ akan berakibat b adalah elemen di grup $(G, \star)$. Dengan demikian, jelas bahwa elemen b memiliki invers, yaitu b^{-1}.

Selanjutnya, kita akan menunjukkan bahwa $(b^{-1})^n = (b^n)^{-1}$.

Sesuai definisi, $(b^{-1})^n = \underbrace{b^{-1} \star b^{-1} \star b^{-1} \star \ldots \star b^{-1}}_{\text{sebanyak } n}$ dan $b^n = \underbrace{b \star b \star b \star \ldots \star b}_{\text{sebanyak } n}$.

Nah, berdasarkan penjabaran di atas, kita akan memperoleh $(b^{-1})^n \star b^n = b^n \star (b^{-1})^n = e$.

Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa $(b^{-1})^n$ adalah invers dari b^n. Dengan kata lain, $(b^{-1})^n = (b^n)^{-1}$.

Selanjutnya, kita bentuk $a \star b^{-1}$. Kita akan menunjukkan bahwa $a \star b^{-1} \in G[n]$. Dengan kata lain, kita akan menunjukkan bahwa $(a \star b^{-1})^n = e$.

Karena berlaku sifat $(a \star b)^n = a^n \star b^n$ untuk semua $a, b \in G$, maka:

$$\begin{aligned}(a \star b^{-1})^n &= a^n \star (b^{-1})^n \\ &= a^n \star (b^n)^{-1} \\ &= e \star e^{-1} \\ &= e\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, terlihat bahwa $(a \star b^{-1})^n = e$. Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa $a \star b^{-1} \in G[n]$.

Jadi, karena untuk sebarang $a, b \in G[n]$ berlaku $a \star b^{-1} \in G[n]$, maka berdasarkan **Teorema Subgrup** di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa $G[n]$ merupakan subgrup dari G.

***

Selanjutnya, kita akan menunjukkan bahwa $G[n]$ merupakan subgrup normal dengan cara menunjukkan bahwa untuk sebarang $g \in G$ dan $x \in G[n]$ akan berlaku $g \star x \star g^{-1} \in G[n]$. Dengan kata lain, kita akan menunjukkan bahwa untuk sebarang $g \in G$ dan $x \in G[n]$ akan berlaku $(g \star x \star g^{-1})^n = e$.

Kita ambil sebarang $g \in G$ dan $x \in G[n]$. Berdasarkan syarat keanggotaan himpunan $G[n]$, maka akan berlaku persamaan $x^n = e$.

Nah, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}(g \star x \star g^{-1})^n &= \underbrace{(g \star x \star g^{-1}) \star (g \star x \star g^{-1}) \star ... \star (g \star x \star g^{-1})}_{\text{sebanyak } n} \\ &= g \star x \star \ (g^{-1} \star g) \ \star x \star \ (g^{-1} \star g) \ \star x \star ... \star \ (g^{-1} \star g) \ \star x \star g^{-1} \\ &= g \star x \star e \star x \star e \star x \star ... \star e \star x \star g^{-1} \\ &= g \star \underbrace{(x \star x \star ... \star x)}_{\text{sebanyak } n} \star g^{-1} \\ &= g \star x^n \star g^{-1} \\ &= g \star e \star g^{-1} \\ &= e\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita mendapatkan hasil berupa persamaan $(g \star x \star g^{-1})^n = e$. Dengan demikian, berdasarkan syarat keanggotaan himpunan $G[n]$, kita dapat menyatakan bahwa $g \star x \star g^{-1} \in G[n]$.

Jadi, kita bisa menyatakan bahwa $G[n]$ adalah subgrup normal dari G.

$\blacksquare$

8

Ayo Kerjakan!
Ujian Akhir Semester
Soal Nomor 1

Soal

Let G be any group. Show that the function $f : G \to G$ defined by $f(x) = x^2$ is group homomorphism if and only if G is an abelian group!

Dikerjakan

Oke! Ayo kita bahas soal ini dengan bahasa Indonesia terlebih dahulu untuk memudahkan pembaca yang baru belajar Pengantar Struktur Aljabar. Ayo kita perjelas apa yang diinginkan soal.

Diketahui bahwa G adalah sebarang grup. Soal memerintahkan kita untuk menunjukkan kebenaran dari pernyataan berikut.

Terjemahan Soal

Fungsi $f : G \to G$ yang didefinisikan sebagai $f(x) = x^2$ adalah homomorfisma grup jika dan hanya jika G adalah grup abelian.

Cara untuk menunjukkan kebenaran pernyataan **Terjemahan Soal** di atas adalah dengan menunjukkan kebenaran dua pernyataan berikut.

1. Jika fungsi $f : G \to G$ yang didefinisikan sebagai $f(x) = x^2$ adalah homomorfisma grup, maka G adalah grup abelian.
2. Jika G adalah grup abelian, maka fungsi $f : G \to G$ yang didefinisikan sebagai $f(x) = x^2$ adalah homomorfisma grup.

Ayo kita buktikan!

Eh, sebelumnya, untuk mempermudah pemahaman, kita notasikan operasi biner pada G sebagai $\star$. Dengan demikian, $(G, \star)$ adalah grup.

- **Bagian-1: Menunjukkan bahwa jika fungsi $f : G \to G$ yang didefinisikan sebagai $f(x) = x^2$ adalah homomorfisma grup, maka G adalah grup abelian.**

Diketahui bahwa G adalah sebarang grup. Diketahui pula fungsi $f : G \to G$ yang didefinisikan sebagai $f(x) = x^2$ adalah homomorfisma grup.

Kita akan menunjukkan bahwa untuk sebarang $a, b \in G$ akan berlaku persamaan $a \star b = b \star a$. Jika hal tersebut benar, maka kita bisa menyatakan bahwa $(G, \star)$ adalah grup abelian.

Oke! Kita ambil sebarang $a, b \in G$. Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka akan berlaku $a \star b \in G$.

Karena f adalah fungsi dari G ke G, maka akan berlaku $f(a \star b) = (a \star b)^2 \in G$. Selain itu, karena f adalah homomorfisma dari G ke G, maka akan berlaku juga $f(a \star b) = f(a) \star f(b) = a^2 \star b^2 \in G$.

Dengan demikian, kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$f(a \star b) = (a \star b)^2 = a^2 \star b^2$$

Perhatikan bahwa notasi a^2 bermakna $a \star a$. Demikian pula, notasi b^2 bermakna $b \star b$ dan notasi $(a \star b)^2$ bermakna $(a \star b) \star (a \star b)$.

Dengan demikian, persamaan di atas ekuivalen dengan persamaan di bawah ini. Kita akan sebut persamaan di bawah ini sebagai Persamaan Utama.

$$(a \star b) \star (a \star b) = (a \star a) \star (b \star b)$$

...(Persamaan Utama)

Nah, sekarang perhatikan dengan saksama Persamaan Utama di atas!

Karena $(G, \star)$ merupakan grup, maka kita dapat menggunakan sifat asosiatif operasi $\star$ untuk memindah letak tanda kurung pada persamaan Persamaan Utama.

Di ruas kiri Persamaan Utama, kita memiliki bentuk $(a \star b) \star (a \star b)$. Dengan menggunakan sifat asosiatif operasi $\star$ untuk memindah letak tanda kurung, kita akan memperoleh persamaan (1.1) berikut.

$$(a \star b) \star (a \star b) = a \star (b \star a) \star b \qquad ...(1.1)$$

Di ruas kanan Persamaan Utama, kita memiliki bentuk $(a \star a) \star (b \star b)$. Dengan menggunakan sifat asosiatif operasi $\star$ untuk memindah letak tanda kurung, kita akan memperoleh persamaan (1.2) berikut.

$$(a \star a) \star (b \star b) = a \star (a \star b) \star b \qquad ...(1.2)$$

Jika kita substitusikan persamaan (1.1) dan (1.2) ke Persamaan Utama, maka kita akan memperoleh persamaan:

$$a \star (b \star a) \star b \;=\; a \star (a \star b) \star b$$

Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka terdapat elemen invers untuk a dan b yaitu a^{-1} dan b^{-1}. Jika kedua ruas pada persamaan di atas kita operasikan dengan a^{-1} dari kiri dilanjutkan dengan b^{-1} dari kanan akan diperoleh hasil sebagaimana berikut.

$$\begin{aligned}
a \star (b \star a) \star b \;=\; a \star (a \star b) \star b &\iff a^{-1} \star \big(a \star (b \star a) \star b\big) \;=\; a^{-1} \star \big(a \star (a \star b) \star b\big) \\
&\iff (a^{-1} \star a) \star \big((b \star a) \star b\big) \;=\; (a^{-1} \star a) \star \big((a \star b) \star b\big) \\
&\iff e \star \big((b \star a) \star b\big) \;=\; e \star \big((a \star b) \star b\big) \\
&\iff (b \star a) \star b \;=\; (a \star b) \star b \\
\\
&\iff \big((b \star a)\big) \star b \star b^{-1} \;=\; \big((a \star b) \star b\big) \star b^{-1} \\
&\iff (b \star a) \star e \;=\; (a \star b) \star e \\
&\iff b \star a \;=\; a \star b
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita memperoleh hasil berupa persamaan $a \star b = b \star a$ yang berlaku untuk sebarang $a, b \in G$. Dengan demikian, kita dapat menyatakan bahwa $(G, \star)$ adalah grup abelian.

- **Bagian-2: Menunjukkan bahwa jika G adalah grup abelian, maka fungsi $f : G \to G$ yang didefinisikan sebagai $f(x) = x^2$ adalah homomorfisma grup.**

Diketahui bahwa $(G, \star)$ adalah grup abelian, yaitu untuk sebarang $a, b \in G$ akan berlaku sifat $a \star b = b \star a$.

Diketahui juga bahwa pengaitan $f : G \to G$ yang didefinisikan sebagai $f(x) = x^2$ adalah suatu fungsi. Dengan demikian, untuk menunjukkan bahwa f merupakan homomorfisma grup, kita hanya tinggal menunjukkan bahwa untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $f(a \star b) = f(a) \star f(b)$.

Oke! Kita ambil sebarang $a, b \in G$. Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka $a \star b \in G$. Dengan demikian, $f(a \star b) = (a \star b)^2 \in G$.

Ingat bahwa untuk sebarang $g \in G$, notasi g^2 bermakna $g \star g$. Dengan demikian, akan berlaku $(a \star b)^2 = (a \star b) \star (a \star b)$.

Selanjutnya, perhatikan bentuk $(a \star b) \star (a \star b)$! Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka kita dapat menggunakan sifat asosiatif operasi $\star$ untuk memindah letak tanda kurung. Dengan demikian akan berlaku persamaan berikut.

$$(a \star b) \star (a \star b) = a \star (b \star a) \star b$$

Karena $(G, \star)$ adalah grup abelian, maka berlaku sifat $a \star b = b \star a$. Dengan demikian persamaan di atas akan menjadi seperti ini.

$$a \star (b \star a) \star b \;=\; a \star (a \star b) \star b$$

Jika kita menggunakan lagi sifat asosiatif operasi $\star$ untuk memindah letak tanda kurung, maka kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$a \star (a \star b) \star b \;=\; (a \star a) \star (b \star b) \;=\; a^2 \star b^2$$

Dengan demikian, kita akan memperoleh hasil akhir berupa persamaan berikut.

$$f(a \star b) = (a \star b) \star (a \star b) = a^2 \star b^2$$

Berdasarkan definisi pengaitan f, akan diperoleh persamaan $a^2 = f(a)$ dan $b^2 = f(b)$. Dengan demikian, kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$f(a \star b) = f(a) \star f(b)$$

Ya sudah deh!

Berdasarkan penjabaran di atas, jika $(G, \star)$ adalah grup abelian dan dibentuk fungsi $f : G \to G$ dengan definisi $f(x) = x^2$, maka untuk sebarang $a, b \in G$ akan berlaku sifat $f(a \star b) = f(a) \star f(b)$. Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa fungsi f adalah homomorfisma grup.

$\blacksquare$

9

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 2

Soal

Tentukan kernel dari homomorfisma $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dengan definisi $T_A(v) = Av$, untuk matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$!

Dikerjakan

Berdasarkan soal, diketahui bahwa pemetaan $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dengan definisi:

$$T_A\left(v\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot v \quad \text{untuk setiap } v \in \mathbb{R}^3$$

adalah homomorfisma.

Nah, kernel dari homomorfisma T_A tidak lain adalah himpunan Kernel $\left(T_A\right)$ dengan definisi sebagai berikut.

$$\text{Kernel}\left(T_A\right) = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 0_{\mathbb{R}^2} \right\}$$

Selain definisi di atas, kita juga bisa mendefinisikan himpunan Kernel (T_A) sebagai berikut.

$$\text{Kernel }(T_A) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Pertanyannya:

Vektor $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *apa sajakah yang menyebabkan* $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$*?*

Ayo kita cari tahu jawaban atas pertanyaan menarik di atas!

Perhatikan bahwa $\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\bar{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{0}}$ merupakan **persamaan linear homogen** yang umum disajikan sebagai persamaan $A\bar{X} = \bar{0}$. Tentu kita sudah "kenyang" menyantap bentuk perkalian matriks ini ketika mempelajari mata kuliah **Aljabar Linear Elementer**.

Nah, ingat sifat persamaan linear homogen! Jika A' merupakan matriks eselon kolom tereduksi dari matriks A, maka matriks A' juga akan memenuhi persamaan $A'\bar{X} = \bar{0}$.

Oke! Sekarang, mari kita cari matriks A' sebagai matriks eselon kolom tereduksi dari matriks A!

Kita akan melakukan serangkaian operasi baris elementer (OBE) untuk mereduksi matriks A menjadi matriks A'. Prosesnya adalah sebagai berikut.

1. OBE ke-1: Baris ke-1 $= 1/2 \times$ Baris ke-1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. OBE ke-2: Baris ke-2 $= 1/3 \times$ Baris ke-2.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

3. OBE ke-3: Baris ke-2 $=$ Baris ke-2 $-$ Baris ke-1.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

4. OBE ke-4: Baris ke-1 = Baris ke-1 + Baris ke-2.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

5. OBE ke-5: Baris ke-2 = $(-2) \times$ Baris ke-2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$ adalah matriks eselon kolom tereduksi dari matriks A. Dengan kata lain:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, setiap vektor $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ yang memenuhi persamaan $A' \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ juga akan memenuhi persamaan $A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Jika $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ merupakan vektor yang memenuhi persamaan $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}}_{A'} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, maka kita akan memperoleh persamaan:

- $a = -\dfrac{1}{3}c$, dan
- $b = -\dfrac{10}{3}c$

untuk sebarang $c \in \mathbb{R}$.

Dengan demikian, vektor $v \in \mathbb{R}^3$ yang memenuhi persamaan $Av = 0_{\mathbb{R}^2}$ adalah $v = \begin{bmatrix} -\dfrac{c}{3} \\ -\dfrac{10 \cdot c}{3} \\ c \end{bmatrix}$ untuk sebarang $c \in \mathbb{R}$.

Hei! Ingat bahwa v tidak lain adalah elemen dari Kernel (T_A)!

Jadi, kita bisa menyimpulkan bahwa:

$$\text{Kernel } (T_A) = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 0_{\mathbb{R}^2} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -\dfrac{c}{3} \\ -\dfrac{10 \cdot c}{3} \\ c \end{bmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}.$$

■

10

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 3

Soal

Misalkan $V_4 = \{e,\ a,\ b,\ ab\}$ adalah grup dengan tabel multiplikasi berikut.

$\star$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

Selidiki apakah $V_4 \cong Z_4$!

Dikerjakan

Berikut ini adalah tabel multiplikasi untuk $Z_4 = \{\bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3}\}$. Ingat bahwa Z_4 adalah grup terhadap operasi penjumlahan modulo 4 (kita notasikan $+$). Dengan demikian, multiplikasi yang dimaksud untuk Z_4 adalah operasi penjumlahan modulo 4.

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Sepintas tabel multiplikasi V_4 dan Z_4 memiliki ukuran yang sama. Akan tetapi, karena kita ingin menyelidiki apakah berlaku $V_4 \cong Z_4$, maka kita bisa menggunakan langkah-langkah berikut.

- **Langkah-1**

Kita akan **mengandaikan** bahwa benar berlaku $V_4 \cong Z_4$. Dengan demikian, akan terdapat homomorfisma bijektif $\phi : V_4 \to Z_4$.

- **Langkah-2**

Berdasarkan tabel multiplikasi di atas, kita tahu bahwa e adalah elemen identitas di grup V_4 dan $\bar{0}$ adalah elemen identitas di grup Z_4.

Karena ϕ adalah homomorfisma, maka berdasarkan sifat homomorfisma akan berlaku $\phi(e) = \bar{0}$. Oleh sebab itu, kita akan warnai *cell* pada tabel yang memuat elemen e dan $\bar{0}$ dengan warna yang sama, yaitu kuning.

$\star$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Berdasarkan *cell-cell* kuning pada dua tabel di atas, terlihat bahwa letak *cell-cell* kuning tersebut tidak sama, yaitu *cell-cell* kuning yang berada di daerah kanan bawah.

Kita akan menyelidiki *cell-cell* kuning tersebut pada langkah selanjutnya.

- **Langkah-3**

Perhatikan *cell-cell* kuning yang berada di daerah kanan bawah pada dua tabel di atas!

Pada tabel multiplikasi V_4 kita mendapatkan persamaan:

- $a \star a = e$,
- $b \star b = e$, dan
- $ab \star ab = e$,

sedangkan pada tabel multiplikasi Z_4 kita mendapatkan persamaan:

- $\bar{1} + \bar{3} = \bar{0}$,
- $\bar{2} + \bar{2} = \bar{0}$, dan
- $\bar{3} + \bar{1} = \bar{0}$.

- **Langkah-4**

Karena ϕ adalah homomorfisma, maka untuk setiap $x, y \in V_4$ akan berlaku $\phi(x \star y) = \phi(x) + \phi(y)$.

Pada tabel multiplikasi V_4 kita mendapatkan persamaan $a \star a = e$. Dengan demikian, akan berlaku persamaan:

$$\begin{aligned} a \star a = e &\iff \phi(a \star a) = \phi(e) \\ &\iff \phi(a) + \phi(a) = \bar{0} \\ &\iff \phi(a)^2 = \bar{0} \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, untuk persamaan $a \star a = e$, kita akan mendapatkan persamaan:

$$\phi(a)^2 = \bar{0}.$$

Dengan penjabaran yang serupa, untuk persamaan $b \star b = e$ dan $ab \star ab = e$, kita akan mendapatkan persamaan:

$$\phi(b)^2 = \bar{0} \quad \text{dan} \quad \phi(ab)^2 = \bar{0}$$

Nah ini!

Pada tabel multiplikasi Z_4, satu-satunya $g \in Z_4$ sedemikian sehingga $g^2 = \bar{0}$ hanyalah $g = \bar{2}$.

Karena pada soal didefinisikan $V_4 = \{e,\ a,\ b,\ ab\}$, maka jelas bahwa $a \neq b \neq ab$. Akan tetapi, $\phi(a)^2 = \phi(b)^2 = \phi(ab)^2$.

Karena ϕ adalah homomorfisma bijektif, maka:

- Berdasarkan persamaan $\phi(a)^2 = \bar{0}$, akan diperoleh $\phi(a) = \bar{2}$.
- Berdasarkan persamaan $\phi(b)^2 = \bar{0}$, akan diperoleh $\phi(b) = \bar{2}$.
- Berdasarkan persamaan $\phi(ab)^2 = \bar{0}$, akan diperoleh $\phi(ab) = \bar{2}$.

Berdasarkan penjabaran di atas, diperoleh persamaan $\phi(a) = \phi(b) = \phi(ab) = \bar{2}$ sedangkan $a \neq b \neq ab$.

...

KONTRADIKSI! INI JELAS TIDAK MUNGKIN BISA TERJADI!

Kenapa? Karena ϕ adalah homomorfisma bijektif, seharusnya jika $a \neq b \neq ab$, maka akan berlaku $\phi(a) \neq \phi(b) \neq \phi(ab)$.

- **Kesimpulan**

Karena pada **Langkah-4** muncul **kontradiksi**, maka **pengandaian** bahwa benar berlaku $V_4 \cong Z_4$ adalah **salah besar**!

Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa **sama sekali tidak ada homomorfisma bijektif** dari V_4 ke Z_4 (dan juga sebaliknya).

Jadi, kita bisa menyimpulkan bahwa $V_4 \ncong Z_4$.

■

11

Ayo Kerjakan!
Ujian Akhir Semester
Soal Nomor 4

Soal

Misalkan G grup abelian dengan elemen identitas e.

Jika $H = \{ x^2 \mid x \in G \}$ dan $K = \{ x \in G \mid x^2 = e \}$, buktikan $G/K \cong H$!

Dikerjakan

Kita akan menggunakan **Teorema Fundamental Homomorfisma 1** untuk menunjukkan bahwa $G/K \cong H$.

> **Teorema Fundamental Homomorfisma 1**
>
> Diketahui $(G, \star)$ dan $(H, \circ)$ adalah grup. Diketahui pula homomorfisma $\phi : G \to H$.
>
> Jika ϕ adalah homomorfisma surjektif, maka akan terdapat suatu isomorfisma $\psi : G/Kernel(\phi) \to H$.
>
> Dengan kata lain.
>
> Jika ϕ adalah homomorfisma surjektif, maka akan berlaku $G/Kernel(\phi) \cong H$.

Nah! Selanjutnya, ayo kita telaah apa-apa yang diketahui pada soal.

1. Dalam soal diketahui adanya himpunan H yang didefinisikan sebagai: $H = \{\ x^2 \mid x \in G\ \}$. Berdasarkan syarat keanggotannya, kita bisa menyatakan bahwa H adalah himpunan bagian dari G. Akan tetapi, soal **TIDAK MENYATAKAN** bahwa himpunan H adalah grup. Oleh sebab itu, kita harus menunjukkan bahwa H adalah suatu grup. Nah, "bagusnya", berdasarkan syarat keanggotan H, sepertinya kita cukup menunjukkan bahwa H adalah subgrup dari G.

2. Soal tidak menyatakan adanya suatu homomorfisma. Dengan demikian, setelah menunjukkan bahwa H adalah subgrup dari G, maka kita harus membuat suatu homomorfisma $\phi : G \to H$ **DENGAN SYARAT** ϕ adalah homomorfisma surjektif dan $Kernel(\phi) = K = \{\ x \in G \mid x^2 = e\ \}$.

Nah, berdasarkan dua poin di atas, kita akan melakukan serangkaian langkah-langkah berikut secara berurutan untuk menunjukkan bahwa berlaku $G/K \cong H$.

1. Kita akan menunjukkan bahwa $(H, \star)$ adalah subgrup dari $(G, \star)$.
2. Kita akan membuat suatu pengaitan $\phi : G \to H$ dengan definisi $\phi(g) = g^2$ untuk setiap $g \in G$.
3. Kita akan menunjukkan bahwa pengaitan ϕ yang kita buat tersebut adalah pemetaan yang terdefinisi dengan baik.
4. Kita akan menunjukkan bahwa pengaitan ϕ yang kita buat tersebut adalah pemetaan surjektif.
5. Kita akan menunjukkan bahwa pengaitan ϕ yang kita buat tersebut adalah suatu homomorfisma.
6. Kita akan menunjukkan bahwa pengaitan ϕ yang kita buat tersebut adalah suatu homomorfisma dengan $Kernel(\phi) = K = \{\ x \in G \mid x^2 = e\ \}$.

Terlihat bahwa soal ini menguji kemampuan kita untuk membuat suatu homomorfisma yang memenuhi syarat **Teorema Fundamental Homomorfisma 1**.

- **Langkah-1**

Kita akan menunjukkan bahwa $(H, \star)$ adalah subgrup dari $(G, \star)$ dengan menggunakan **Teorema Subgrup** berikut.

Teorema Subgrup

Diketahui $(G, \star)$ adalah grup dan H adalah himpunan bagian dari G.
$(H, \star)$ merupakan subgrup dari $(G, \star)$ jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $a \star b^{-1} \in H$.

Oke! Kita ambil sebarang $g_1^2, g_2^2 \in H$ (untuk suatu $g_1, g_2 \in G$).

Misi: Harus Ditunjukkan Kebenarannya (1)

Berdasarkan **Teorema Subgrup**, kita harus menunjukkan bahwa berlaku $g_1^2 \star (g_2^2)^{-1} \in H$.

Dengan kata lain, kita harus menunjukkan bahwa berlaku $g_1^2 \star (g_2^2)^{-1} = g_3^2$ untuk suatu $g_3 \in G$.

Nah, ingat sifat elemen invers di grup, bahwasanya $(g_2^2)^{-1} = (g_2^{-1})^2$.

Dengan demikian, jika kita membentuk $g_1^2 \star (g_2^2)^{-1}$, maka kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$\begin{aligned}
g_1^2 \star (g_2^2)^{-1} &= g_1^2 \star (g_2^{-1})^2 && \text{(sifat elemen invers)}\\
&= (g_1 \star g_1) \star (g_2^{-1} \star g_2^{-1})\\
&= g_1 \star \ (g_1 \star g_2^{-1}) \ \star g_2^{-1} && \text{(sifat asosiatif)}\\
&= g_1 \star \ (g_2^{-1} \star g_1) \ \star g_2^{-1} && \text{(sifat grup abelian)}\\
&= (g_1 \star g_2^{-1}) \ \star \ (g_1 \star g_2^{-1})\\
&= (g_1 \star g_2^{-1})^2
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita memperoleh persamaan $g_1^2 \star (g_2^2)^{-1} = (g_1 \star g_2^{-1})^2$.

Ingat! Karena g_1 dan g_2^{-1} adalah elemen-elemen di grup $(G, \star)$, maka jelas akan berlaku $g_1 \star g_2^{-1} \in G$. Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa $g_1 \star g_2^{-1} = g_3$ untuk suatu $g_3 \in G$. Akibatnya, akan diperoleh persamaan $g_1^2 \star (g_2^2)^{-1} = g_3^2$ untuk suatu $g_3 \in G$.

Berdasarkan hasil ini, maka **Misi: Harus Ditunjukkan Kebenarannya (1)** terbukti kebenarannya. Jadi, kita bisa menyatakan bahwa $(H, \star)$ adalah subgrup dari $(G, \star)$.

- **Langkah-2**

Kita akan membuat suatu pengaitan $\phi : G \to H$ dengan definisi $\phi(g) = g^2$ untuk setiap $g \in G$.

Terus terang. Mungkin bagian ini yang akan membuat Pembaca yang baru mempelajari Pengantar Struktur Aljabar kesulitan.

Menurutku, untuk membuat pengaitan ϕ ini tidak ada rumus bakunya. Aku membuat pengaitan ϕ ini dengan memperhatikan syarat keanggotaan himpunan H dan K supaya ϕ bisa menjadi homomorfisma dan juga supaya $Kernel(\phi) = K$.

Menurutku, kalau sudah "terbiasa" membaca buku *A First Course in Abstract Algebra* ketika *ngendog*, nanti ya "insting" untuk membuat homomorfisma itu akan terlatih dengan sendirinya. 😀

- **Langkah-3**

Kita akan menunjukkan bahwa pengaitan ϕ yang kita buat tersebut adalah pemetaan yang terdefinisi dengan baik. Jika mengamati definisi pengaitan ϕ, yaitu:

$$\phi : G \to H \text{ dengan definisi } \phi(g) = g^2 \text{ untuk setiap } g \in G$$

maka pemetaan ϕ ini terlihat "baik-baik" saja, dikarenakan:

1. Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka $g^2 = g \star g$ akan selalu terdefinisi dengan baik untuk sebarang $g \in G$. Lebih tepatnya, untuk sebarang $g \in G$ akan berlaku $g^2 \in G$. Dengan kata lain, untuk sebarang $g \in G$ akan berlaku $\phi(g) \in G$.
2. Perhatikan bahwa $H = \{ \ x^2 \mid x \in G \ \} = \{ \ \phi(x) \mid x \in G \ \} = Image(\phi)$. Dengan demikian, pemilihan $H = Image(\phi)$ sebagai kodomain pengaitan ϕ merupakan suatu hal yang sangat terdefinisi dengan baik dikarenakan $Kodomain(\phi)$ dan $Image(\phi)$ adalah dua himpunan yang sama.
3. Terakhir dan hal yang paling krusial, untuk sebarang $g \in G$, hasil dari $g \star g$ adalah tunggal dikarenakan $\star$ adalah operasi biner. Oleh sebab itu, jika ada $g_1, g_2 \in G$ yang memenuhi persamaan $g \star g = g_1$ dan $g \star g = g_2$, maka pastilah $g_1 = g_2$.

Berdasarkan tiga poin di atas, kita dapat menyatakan bahwa pengaitan ϕ yang kita buat tersebut adalah pemetaan yang terdefinisi dengan baik.

Pada langkah-langkah selanjutnya, kita akan menyebut ϕ sebagai pemetaan.

- **Langkah-4**

Kita akan menunjukkan bahwa pemetaan ϕ yang kita buat tersebut adalah pemetaan surjektif.

Hal ini sebetulnya sudah secara langsung kita tunjukkan di **Langkah-3** poin kedua. Karena $Kodomain(\phi)$ dan $Image(\phi)$ adalah dua himpunan yang sama, maka pemetaan ϕ merupakan pemetaan yang surjektif.

Buat yang belum tahu, suatu pemetaan bukan pemetaan surjektif jika kodomain dan image-nya adalah himpunan yang berbeda.

- **Langkah-5**

Kita akan menunjukkan bahwa pemetaan ϕ yang kita buat tersebut adalah suatu homomorfisma.

Definisi Homomorfisma

Diketahui $(G, \star)$ dan $(H, \circ)$ adalah grup. Diketahui pula pemetaan $\phi : G \to H$.

Jika untuk setiap $g_1, g_2 \in G$ berlaku persamaan:

$$\phi(g_1 \star g_2) \;=\; \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$$

maka pemetaan ϕ disebut sebagai homomorfisma.

Misi: Harus Ditunjukkan Kebenarannya (2)

Kita harus menunjukkan bahwa untuk setiap $g_1, g_2 \in G$ akan berlaku persamaan:

$$\phi(g_1 \star g_2) \;=\; \phi(g_1) \star \phi(g_2).$$

Ingat! Karena H adalah subgrup dari G, maka operasi biner yang berlaku di H adalah operasi biner $\star$ yang berlaku di grup $(G, \star)$.

Kita ambil sebarang $g_1, g_2 \in G$. Perhatikan penjabaran berikut!

$$\begin{aligned}
\phi(g_1 \star g_2) &= (g_1 \star g_2)^2 \\
&= (g_1 \star g_2) \star (g_1 \star g_2) \\
&= g_1 \star (g_2 \star g_1) \star g_2 && \text{(sifat asosiatif)} \\
&= g_1 \star (g_1 \star g_2) \star g_2 && \text{(sifat grup abelian)} \\
&= (g_1 \star g_1) \star (g_2 \star g_2) \\
&= g_1^2 \star g_2^2 \\
&= \phi(g_1) \star \phi(g_2)
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita memperoleh hasil berupa persamaan $\phi(g_1 \star g_2) \;=\; \phi(g_1) \star \phi(g_2)$ untuk sebarang $g_1, g_2 \in G$.

Berdasarkan hasil ini, maka **Misi: Harus Ditunjukkan Kebenarannya (2)** terbukti kebenarannya. Jadi, kita bisa menyatakan bahwa pemetaan ϕ yang kita buat tersebut adalah suatu homomorfisma.

- **Langkah-6**

Kita akan menunjukkan bahwa pemetaan ϕ yang kita buat tersebut adalah suatu homomorfisma dengan $Kernel(\phi) = K = \{\ x \in G \mid x^2 = e\ \}$.

Definisi Kernel suatu Homomorfisma

Diketahui $(G, \star)$ dan $(H, \circ)$ adalah grup. Diketahui pula homomorfisma $\phi : G \to H$ dan e_H adalah elemen identitas di grup $(H, \circ)$.

Kernel dari homomorsima ϕ dinotasikan $Kernel(\phi)$ adalah himpunan bagian dari G dengan definisi:

$$Kernel(\phi) = \{g \in G \mid \phi(g) = e_H\}$$

Ingat! Karena $(H, \star)$ adalah subgrup dari $(G, \star)$, maka elemen identitas di $(G, \star)$ dan $(H, \star)$ adalah sama. Dengan demikian, berdasarkan **Definisi Kernel suatu Homomorfisma** di atas, kita dapat menyatakan $Kernel(\phi)$ sebagai:

$$Kernel(\phi) \;=\; \{g \in G \mid \phi(g) = e\} \;=\; \{g \in G \mid g^2 = e\}$$

Perhatikan bahwa definisi $Kernel(\phi)$ ini identik dengan definisi himpunan $K = \{\ x \in G \mid x^2 = e\ \}$. Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa $Kernel(\phi) = K = \{\ x \in G \mid x^2 = e\ \}$.

- **Kesimpulan**

Berdasarkan **Langkah-1** hingga **Langkah-6** di atas, maka menurut **Teorema Fundamental Homomorfisma 1** akan berlaku $G/K \cong H$.

■