Aku Mau Coba
Mengerjakan & Membahas
Ujian Tengah Semester & Ujian Akhir Semester

Pengantar Analisis 1

Semester Genap 2021/2022

Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Gadjah Mada

Mawi Wijna

Yogyakarta, 2023

Daftar Isi

Siapa Aku?

Halo!

Kenalin, nama aku Wijna.
Sering juga dipanggil Wisna.
Jarang-jarang dipanggil Mawi.

Aku dulu pernah jadi mahasiswa matematika UGM. Maksudnya, aku dulu itu pernah kuliah di Program Studi Matematika FMIPA UGM. Masuk September 2004. Lulus Februari 2009. Info lebih lanjut, *googling* saja namaku di Google.

Oh ya, kenapa aku kurang kerjaan bikin tulisan ini?

Sekadar pemberitahuan. Tulisan ini aku buat dalam rangka **mengisi waktu luang**. Berhubung si *bocil* kalau makan sukanya diemut, jadi ya iseng-iseng aku mengerjakan soal ujian sambil menunggu rongga mulutnya kosong lagi. Itu pun kalau aku sedang bosan membuka *manga online*, *marketplace*, *Instagram*, dan kawan-kawannya.

Jadi ya, sebetulnya tulisan ini hanyalah sebatas alih digital dari hasil *orat-oret* di sebarang kertas kosong di tengah proses menyuapi makan seorang *bocil*. Pengalihan ke format LaTeXaku lakukan sembari menunggu azan subuh berkumandang atau ketika *weekend* hanya di rumah saja. Sebagian besar *orat-oret* ini tercipta semasa Covid-19 masih mewabah.

Eh, sebelumnya, aku mohon maaf jikalau tulisan ini lebih banyak memuat hal-hal yang salah daripada hal-hal yang benarnya. Maklum, namanya juga sudah belasan tahun yang lalu jadi mahasiswa matematika. Jadi ya, mohon maaf kalau lupa-lupa ingat. Walaupun aku tetap berhati-hati dalam menulis supaya tidak terjadi cacat logika.

Terus terang, hampir sebagian besar isi tulisan ini aku sadur dari berbagai macam sumber di internet seperti math.stackexchange.com, Quora, dan Reddit. Jadi, aku bukan orang pintar nan jenius yang bisa mengerjakan semua soal ujian dengan lancar. Seperti, yang aku bilang tadi, aku cuma iseng mengerjakan soal ujian, mengalihkan *orat-oret* di kertas ke format LaTeX, kemudian meng-*upload*-nya ke jagat maya.

Ya, sudahlah. Bagian pengantar ini nggak usah panjang-panjang. Semoga ada yang bisa dipelajari dari tulisan ini. Semoga tulisan ini bisa menjadi bahan pelajaran buat aku, jika di waktu tuaku nanti aku mulai lupa dengan apa-apa yang aku pelajari semasa kuliah.

Oh yes! Last but not least, *matur nuwun* kepada teman-teman di HIMATIKA FMIPA UGM yang sudah menyediakan sumber soal-soal ujian yang bisa diakses secara cuma-cuma di *website* mereka, himatika.fmipa.ugm.ac.id.

Ah... somehow I felt nostalgic....

Diketik sambil diiringi OST-nya NieR.

Pengantar Analisis (Real) 1 Buat Aku

Pas zamanku kuliah (tahun 2004 s.d. 2009 silam), Pengantar Analisis (Real) 1 itu adalah mata kuliah wajib berbobot 2 SKS yang diselenggarakan pada semester 5 Program Studi Matematika FMIPA UGM. Aku sempat mengulang mata kuliah ini pada semester 9, semester terakhirku kuliah di UGM. Biasalah, memperbaiki nilai dari C menjadi A.

Dari semua mata kuliah bidang analisis, aku paling suka dengan mata kuliah Pengantar Analisis (Real) ini. Mungkin mata kuliah ini terasa mirip seperti mata kuliah Pengantar Logika Matematika dan Himpunan yang diberi bumbu analisis.

Heee... kalau boleh jujur, aku lebih senang dengan mata kuliah yang berkutat dengan pembuktian-pembuktian teorema daripada harus menghitung-hitung angka secara rinci dan teliti.

Masalah-masalah pembuktian teorema/sifat yang diajarkan di mata kuliah Pengantar Analisis (Real) 1 ini akan terasa "mudah" ketika kita sudah menguasai mata kuliah Pengantar Logika Matematika dan Himpunan dan Pengantar Struktur Aljabar. Beberapa "trik" untuk membantu proses pembuktian dapat kita peroleh dari mata kuliah Kalkulus 1. Tidak ketinggalan, mata kuliah Pengantar Topologi bisa membantu kita untuk "merasakan" bahwa teorema/sifat dalam lingkup sistem bilangan real itu *"make sense"*, walaupun umumnya mata kuliah Pengantar Topologi itu diselenggarakan pada semester lanjut.

Aku lupa-lupa ingat siapa dosen pengampu mata kuliah Pengantar Analisis (Real) 1 saat aku kuliah dahulu. Antara Pak Yusuf atau almarhumah Bu Ndaru. Oh ya, karena menyinggung almarhumah Bu Ndaru, kalau tidak sibuk, mungkin aku juga bakal membuat tulisan tentang ujian mata kuliah Pengantar Topologi.

Oke deh! Sebagai penutup, semoga tulisan ini membawa manfaat. Walaupun aku yakin kalau tulisan ini lebih banyak salahnya daripada benarnya. Maklum, kan sudah belasan tahun yang lalu jadi mahasiswa matematika. Jadi ya, mohon maaf kalau lupa-lupa ingat atau salah ketik notasi.

Aku nggak tahu apakah benar-benar ada orang yang membaca tulisan ini. Semisal Anda yang membaca tulisan ini adalah mahasiswa, aku doakan semoga Anda mendapat pencerahan dan sukses berkuliah. Semisal Anda yang membaca tulisan ini penasaran dengan soal-soal ujian kuliah matematika, aku harap Anda tidak *shock* dan bisa memahami tulisan ini dengan baik. Semisal Anda yang membaca tulisan ini hanya sekadar mengisi waktu luang, aku sarankan untuk membaca tulisan ini sebagai kawan *ngendog* di toilet.

Semoga tulisan ini bermanfaat bagi mahasiswa matematika. Khususnya mahasiswa yang kesulitan dan kebingungan memahami mata kuliah Pengantar Analisis (Real) 1 dan sungkan bertanya ke dosen atau kakak tingkat. Tulisan ini bisa diunduh secara cuma-cuma dan diam-diam. Silakan *googling* namaku untuk menemukan lebih banyak tulisan sejenis ini untuk beragam mata kuliah lain.

Akhir kata, selamat menikmati tulisan ini!

Yogyakarta, 2023
Wihikan "Mawi" Wijna

1

Soal-Soal Ujian Tengah Semester

1. (a) Diberikan $a, b \in \mathbb{R}$. Jika $a - \epsilon < b$, untuk setiap $\epsilon > 0$, tunjukkan $a \leq b$.
   (b) Diberikan $E = \left\{1 - \dfrac{(-1)^n}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$. Tunjukkan E terbatas! Selanjutnya, tentukan $\sup(E)$ dan $\inf(E)$!

2. (a) Prove that the complement of A^0 is the closure of A^c!
   (b) Give an example of $A \subset \mathbb{R}$ such that $A^0 = \emptyset$ but $\bar{A} = \mathbb{R}$.

3. (a) Diberikan barisan bilangan real (x_n), dengan $x_1 \geq 2$, $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n - 1}$, $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan barisan (x_n) terbatas ke bawah! Tentukan $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$!
   (b) Jika $A \subset \mathbb{R}$ himpunan tak hingga, terbatas ke bawah dan $x = \inf(A)$, tunjukkan ada barisan turun monoton (x_n) sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

4. Diketahui $x_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen dan $|y_n| \leq x_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, tunjukkan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergen.

5. Tentukan suatu bilangan $\delta > 0$ sehingga apabila $|x - 2| < \delta$, maka akan berakibat $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\right| < 1$.

2

Soal-Soal Ujian Akhir Semester

1. Diberikan fungsi $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, c titik limit A, serta $\lim_{x\to c} f(x)$ ada dan bernilai tak nol. Dengan menggunakan definisi limit, buktikan bahwa terdapat $\delta > 0$ sehingga

$$f(x)f(y) > 0$$

untuk setiap $x, y \in A$ dengan $0 < |x - c| < \delta$ dan $0 < |y - c| < \delta$.

2. Diberikan fungsi $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan c titik limit A dengan $\lim_{x\to c} f(x) = 0$. Jika $f(x) > 0$ untuk setiap $x \in A$, buktikan bahwa $\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

3. (a) Buktikan bahwa setiap fungsi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi kontinu seragam.
   (b) Diketahui fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi kontinu seragam. Jika terdapat $p > 0$ sehingga $|f(x)| \geq p$ berlaku untuk sctiap $x \in R$, buktikan bahwa fungsi $\frac{1}{f}$ merupakan fungsi kontinu seragam.

4. (a) Buktikan bahwa terdapat $c \in [0, 1]$ yang memenuhi $c + \tan c = 1$.
   (b) Tunjukkan bahwa persamaan $x^4 - x^3 + x - 2 = 0$ memiliki minimal dua solusi.

5. Let $s, t \in \mathbb{R}$ such that $1 < 3s < 3t < 9$.

   Show that $\frac{|s-t|}{3} < \left|\ln\left(\frac{s}{t}\right)\right| < 3|s - t|$

3

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 1 (a)

Soal

Diberikan $a, b \in \mathbb{R}$. Jika $a - \epsilon < b$, untuk setiap $\epsilon > 0$, tunjukkan $a \leq b$.

Dikerjakan

Sesuai soal, kita akan menunjukkan kebenaran dari **Pernyataan-Soal** di bawah:

Pernyataan-Soal

Diketahui $a, b \in \mathbb{R}$. Jika $a - \epsilon < b$, untuk setiap $\epsilon > 0$, maka $a \leq b$.

dengan menggunakan metode ***Reductio ad Absurdum***. Caranya, pertama-tama kita akan **mengandaikan** bahwa **Ingkaran dari Pernyataan-Soal** berlaku benar.

Ingkaran dari Pernyataan-Soal (Diasumsikan berlaku benar)

Diketahui $a, b \in \mathbb{R}$. Diketahui juga $a - \epsilon < b$ untuk setiap $\epsilon > 0$ dan berlaku $a > b$.

Selanjutnya, kita akan melakukan serangkaian penalaran logis pada **Ingkaran dari Pernyataan-Soal** tersebut sedemikian sehingga (harapannya) akan memunculkan suatu kontradiksi. Dengan demikian, **Ingkaran dari Pernyataan-Soal** adalah salah dan akibatnya pernyataan yang benar adalah **Pernyataan-Soal**.

Oke! Kita mulai pembuktiannya!

Sebagai pengingat, kita asumsikan bahwa **Ingkaran dari Pernyataan-Soal** berlaku benar.

Karena diketahui $a > b$, maka akan berlaku persamaan $a = b+r$ untuk suatu bilangan real positif r.

Jika persamaan $a = b + r$ kita tambahkan dengan $-r$ di kedua ruasnya, maka akan diperoleh persamaan $a + (-r) = b + r + (-r)$.

Karena $r + (-r) = r - r = 0$ dan $a + (-r) = a - r$, maka kita akan memperoleh persamaan $a - r = b + 0 \iff a - r = b$.

Nah, di sinilah muncul **kontradiksi!**

Perhatikan! Seharusnya, menurut yang diketahui, akan berlaku $a - \epsilon < b$, untuk setiap $\epsilon > 0$. Akan tetapi, berdasarkan penalaran di atas, kita mendapatkan persamaan $a - r = b$, dengan r adalah bilangan real positif.

Terjadi **kontradiksi** toh?

Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa **Ingkaran dari Pernyataan-Soal** adalah salah dan akibatnya pernyataan yang benar adalah **Pernyataan-Soal**, yaitu:

Pernyataan-Soal

Diketahui $a, b \in \mathbb{R}$. Jika $a - \epsilon < b$, untuk setiap $\epsilon > 0$, maka $a \leq b$.

■

4

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 1 (b)

Soal

Diberikan $E = \left\{1 - \dfrac{(-1)^n}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$. Tunjukkan E terbatas! Selanjutnya, tentukan $\sup(E)$ dan $\inf(E)$!

Dikerjakan

Supaya tidak bingung, kita selidiki dulu nilai $1 - \dfrac{(-1)^n}{n}$ untuk $n = 1$ hingga 5.

- Untuk $n = 1$ diperoleh $1 - \dfrac{(-1)^n}{n} = 1 - \dfrac{(-1)^1}{1} = 1 - \dfrac{-1}{1} = 1 - (-1) = 2$
- Untuk $n = 2$ diperoleh $1 - \dfrac{(-1)^n}{n} = 1 - \dfrac{(-1)^2}{2} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$
- Untuk $n = 3$ diperoleh $1 - \dfrac{(-1)^n}{n} = 1 - \dfrac{(-1)^3}{3} = 1 - \dfrac{-1}{3} = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$
- Untuk $n = 4$ diperoleh $1 - \dfrac{(-1)^n}{n} = 1 - \dfrac{(-1)^4}{4} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$
- Untuk $n = 5$ diperoleh $1 - \dfrac{(-1)^n}{n} = 1 - \dfrac{(-1)^5}{5} = 1 - \dfrac{-1}{5} = 1 + \dfrac{1}{5} = \dfrac{6}{5}$

Sudah dapat gambaran?

Supaya lebih jelas lagi, perhatikan bahwa syarat keanggotaan himpunan E, yaitu $1 - \dfrac{(-1)^n}{n}$, dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$1 - \frac{(-1)^n}{n} \iff \frac{n}{n} - \frac{(-1)^n}{n} \iff \frac{n-(-1)^n}{n}$$

- Jika n adalah bilangan asli yang ganjil, maka akan berlaku persamaan $(-1)^n = -1$. Dengan demikian, syarat keanggotaan himpunan E dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{n-(-1)^n}{n} = \frac{n-(-1)}{n} = \frac{n+1}{n}$$

- Jika n adalah bilangan asli yang genap, maka akan berlaku persamaan $(-1)^n = 1$. Dengan demikian, syarat keanggotaan himpunan E dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{n-(-1)^n}{n} = \frac{n-1}{n}$$

Nah, menggunakan syarat keanggotaan himpunan E yang sudah didefinisikan ulang di atas, kita dapat membuat himpunan E_1 dan E_2 sebagai:

$$E_1 = \left\{\frac{n+1}{n} \ : \ n = 1, 3, 5, 7, 9, ...\right\}$$
$$E_2 = \left\{\frac{n-1}{n} \ : \ n = 2, 4, 6, 8, 10, ...\right\}$$

sedemikian sehingga berlaku persamaan:

$$E = E_1 \cup E_2$$

Perhatikan! Kita bisa mendefinisikan ulang syarat keanggotaan himpunan E_1 dan E_2 menjadi seperti berikut.

- Jika n adalah bilangan asli yang ganjil, maka kita dapat menyatakan n sebagai $n = 2n' - 1$ dengan n' adalah bilangan asli dari 1,2,3, dst. Dengan demikian syarat keanggotaan himpunan E_1 akan menjadi seperti ini.

$$\frac{n+1}{n} = \frac{2n'-1+1}{2n'-1} = \frac{2n'}{2n'-1}$$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan himpunan E_1 dengan syarat keanggotaan berikut.

$$E_1 = \left\{\frac{2n}{2n-1} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$$

- Jika n adalah bilangan asli yang genap, maka kita dapat menyatakan n sebagai $n = 2n'$ dengan n' adalah bilangan asli dari 1,2,3, dst. Dengan demikian syarat keanggotaan himpunan E_2 akan menjadi seperti ini.

$$\frac{n-1}{n} = \frac{2n'-1}{2n'}$$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan himpunan E_2 dengan syarat keanggotaan berikut.

$$E_2 = \left\{ \frac{2n-1}{2n} \;:\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Ayo kita selidiki himpunan E_1! Kita tampilkan dulu syarat keanggotaan himpunan E_1 sebagaimana berikut.

$$E_1 = \left\{ \frac{2n}{2n-1} \;:\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Untuk sebarang bilangan asli n tentu berlaku pertidaksamaan $2n > 2n - 1$. Selain itu, untuk sebarang bilangan asli n akan berlaku $2n$ dan $2n - 1$ adalah bilangan-bilangan real positif.

Karena $2n - 1$ adalah bilangan real positif, maka jika kedua ruas pertidaksamaan $2n > 2n - 1$ kita bagi dengan $2n - 1$ akan diperoleh pertidaksamaan $\dfrac{2n}{2n-1} > 1$. Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa himpunan E_1 terbatas ke bawah oleh 1.

Selanjutnya, untuk sebarang bilangan asli n, kita akan mengklaim bahwa berlaku pertidaksamaan $2n \leq 4n - 2$. Kita akan coba menyelidiki hasil jika $4n - 2$ dikurangi dengan $2n$.

$$(4n-2) - 2n \;=\; 2n - 2 \;=\; 2(n-1)$$

Karena n adalah sebarang bilangan asli, maka akan berlaku pertidaksamaan $n - 1 \geq 0$. Akibatnya, akan berlaku pertidaksamaan $2(n - 1) \geq 0$ untuk sebarang bilangan asli n. Dengan demikian, kita dapat menyatakan bahwa $(4n - 2) - 2n$ adalah bilangan positif. Dengan kata lain, benar bahwa berlaku pertidaksamaan $2n \leq 4n - 2$ untuk sebarang bilangan asli n.

Nah, karena untuk sebarang bilangan asli n akan berlaku pertidaksamaan $2n \leq 4n-2$, maka akan diperoleh:

$$2n \leq 4n - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2n}{2n-1} \leq \frac{4n-2}{2n-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2n}{2n-1} \leq 2$$

Dengan demikian, berdasarkan penjabaran di atas, menyimpulkan bahwa himpunan E_1 terbatas ke atas oleh 2.

Ayo kita selidiki himpunan E_2! Kita tampilkan dulu syarat keanggotaan himpunan E_1 sebagaimana berikut.

$$E_2 = \left\{ \frac{2n-1}{2n} \;:\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Untuk sebarang bilangan asli n tentu berlaku pertidaksamaan $2n > 2n - 1$. Selain itu, untuk sebarang bilangan asli n akan berlaku $2n$ dan $2n - 1$ adalah bilangan-bilangan positif. Akibatnya, kita bisa menyatakan bahwa $\dfrac{2n-1}{2n}$ adalah bilangan positif atau dengan kata lain $\dfrac{2n-1}{2n} > 0$. Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa himpunan E_2 terbatas ke bawah oleh 0.

Karena $2n - 1$ adalah bilangan real positif, maka jika kedua ruas pertidaksamaan $2n > 2n - 1$ kita bagi dengan $2n$ akan diperoleh pertidaksamaan $1 > \dfrac{2n-1}{2n}$. Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa himpunan E_2 terbatas ke atas oleh 1.

Berdasarkan penjabaran di atas, diketahui bahwa:

- Himpunan E_1 terbatas ke bawah oleh 1 dan terbatas ke atas oleh 2.
- Himpunan E_2 terbatas ke bawah oleh 0 dan terbatas ke atas oleh 1.

Dengan demikian, kita dapat menyatakan bahwa himpunan E terbatas oleh 2, sebab untuk sebarang $x \in E$ akan berlaku $|x| < 2$.

Selanjutnya, berdasarkan definisi himpunan E_1 kita akan membentuk barisan $(x_n) := \left(\dfrac{2n}{2n-1}\right)$. Perhatikan bahwa:

$$x_n = \frac{2n}{2n-1} = \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n+1}{2n+1} = \frac{4n^2+2n}{4n^2-1}$$

dan

$$x_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)-1} = \frac{2n+2}{2n+2-1} = \frac{2n+2}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{2n-1} = \frac{4n^2+2n-2}{4n^2-1}$$

Karena berlaku pertidaksamaan $4n^2 + 2n - 2 < 4n^2 + 2n$ untuk sebarang bilangan asli n, maka kita dapat menyatakan bahwa $x_{n+1} < x_n$. Dengan kata lain, barisan (x_n) adalah barisan yang turun monoton. Dengan demikian, barisan (x_n) konvergen ke infimumnya.

Kita akan menunjukkan bahwa infimum barisan (x_n) adalah 1. Kita akan menunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan real positif ϵ akan selalu terdapat suku x'_n sedemikian sehingga berlaku pertidaksamaan $x'_n < 1 + \epsilon$.

Perhatikan! Karena ϵ adalah bilangan real positif, maka $\dfrac{1+\epsilon}{2\epsilon}$ juga adalah bilangan real positif. Dengan demikian, berdasarkan ***Archimedean Property***, akan terdapat bilangan asli n' yang memenuhi pertidaksamaan $\dfrac{1+\epsilon}{2\epsilon} < n'$, yang ekuivalen dengan pertidaksamaan $\dfrac{2n'}{2n'-1} < 1 + \epsilon$. Dengan demikian, infimum barisan (x_n) adalah 1 dan supremum barisan (x_n) adalah 2. Dengan kata lain, kita juga dapat menyatakan bahwa infimum himpunan E_1 adalah 1 dan supremum himpunan E_1 adalah 2.

Selanjutnya, dengan cara yang serupa, berdasarkan definisi himpunan E_2 kita akan membentuk barisan $(y_n) := \left(\frac{2n-1}{2n}\right)$. Dengan cara yang serupa seperti pada barisan (x_n), kita dapat menunjukkan bahwa infimum barisan (y_n) adalah $\frac{1}{2}$ dan supremum barisan (y_n) adalah 1. Dengan kata lain, kita juga dapat menyatakan bahwa infimum himpunan E_2 adalah $\frac{1}{2}$ dan supremum himpunan E_2 adalah 1.

Selanjutnya, perhatikan sifat berikut.

Supremum dan Infimum dari Union Dua Himpunan

Diketahui A dan B adalah himpunan-himpunan bagian dari $\mathbb{R}$. Diketahui juga bahwa A dan B adalah himpunan-himpunan yang tidak kosong dan terbatas.

- supremum$(A \cup B)$ adalah bilangan yang terbesar dari supremum(A) dan supremum(B).
- infimum$(A \cup B)$ adalah bilangan yang terkecil dari infimum(A) dan infimum(B).

Nah, berdasarkan sifat di atas, karena infimum himpunan E_1 adalah 1 dan infimum himpunan E_2 adalah $\frac{1}{2}$, maka infimum himpunan $E_1 \cup E_2 = E$ adalah bilangan yang terkecil dari 1 dan $\frac{1}{2}$, yang tidak lain adalah $\frac{1}{2}$. Dengan demikian, infimum himpunan E adalah $\frac{1}{2}$.

Selain itu, karena supremum himpunan E_1 adalah 2 dan supremum himpunan E_2 adalah 1, maka supremum himpunan $E_1 \cup E_2 = E$ adalah bilangan yang terbesar dari 2 dan 1, yang tidak lain adalah 2. Dengan demikian, supremum himpunan E adalah 2.

$\blacksquare$

5

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 2 (a)

Soal

Prove that the complement of A^0 is the closure of A^c!

Dikerjakan

Terjemahan soal ini dalam bahasa Indonesia adalah sebagai berikut.

Buktikan bahwa komplemen dari A^0 adalah *closure* dari A^c

Nah, dengan demikian, kita akan menunjukkan kebenaran **Pernyataan-Soal** di bawah ini.

Pernyataan-Soal

$\left(A^0\right)^c = closure\left(A^c\right)$

Untuk menunjukkan kebenaran **Pernyataan-Soal** di atas, kita akan menunjukkan kebenaran dua pernyataan di bawah.

1. $\left(A^0\right)^c \subseteq closure\left(A^c\right)$
2. $closure\left(A^c\right) \subseteq \left(A^0\right)^c$

Sebelumnya, kita paparkan dulu definisi-definisi dan sifat-sifat yang akan dipakai.

Definisi Titik Interior A

Titik c disebut sebagai titik interior dari himpunan A jika dan hanya jika terdapat himpunan terbuka O yang memuat c dan himpunan O tersebut termuat di dalam himpunan A.

$$(\exists \text{ open set } O) \quad c \in O \subseteq A$$

Himpunan semua titik interior dari himpunan A dinotasikan A^0.

Definisi Titik *Closure* A

Titik c disebut sebagai titik *closure* dari himpunan A jika dan hanya jika sebarang himpunan terbuka O yang memuat c akan memuat elemen dari himpunan A.

$$(\forall \text{ open set } O) \quad c \in O \implies O \cap A \neq \emptyset$$

Himpunan semua titik *closure* dari himpunan A dinotasikan $closure(A)$.

- **1. Menunjukkan kebenaran pernyataan 1.**

Kita akan menunjukkan bahwa berlaku $\left(A^0\right)^c \subseteq closure\left(A^c\right)$ dengan cara menunjukkan bahwa untuk setiap $x \in \left(A^0\right)^c$ akan berakibat $x \in closure\left(A^c\right)$.

Oke! Kita ambil sebarang $x \in \left(A^0\right)^c$ yang berarti elemen x <u>bukan</u> elemen di himpunan A^0.

Karena A^0 adalah himpunan semua titik interior himpunan A, dengan demikian kita bisa menyatakan bahwa elemen x bukan titik interior A.

Berdasarkan **Definisi Titik Interior** A, karena elemen x bukan titik interior A, maka semua himpunan terbuka yang memuat x tidak akan termuat di dalam himpunan A. Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa semua himpunan terbuka yang memuat x akan termuat di dalam himpunan A^c.

Hasil-1

Semua himpunan terbuka yang memuat x akan termuat di dalam himpunan A^c.

Perhatikan bahwa berdasarkan **Definisi Titik *Closure*** A, maka kita dapat membuat **Definisi Titik *Closure*** A^c sebagai berikut.

Definisi Titik *Closure* A^c

Titik x disebut sebagai titik *closure* dari himpunan A^c jika dan hanya jika sebarang himpunan terbuka O yang memuat x akan memuat elemen dari himpunan A^c.

$$(\forall \text{ open set } O) \;\; x \in O \implies O \cap A^c \neq \emptyset$$

Himpunan semua titik *closure* dari himpunan A^c dinotasikan $closure(A^c)$.

Nah, berdasarkan **Hasil-1** dan **Definisi Titik *Closure* A^c** di atas, kita bisa menyatakan bahwa x adalah titik *closure* dari himpunan A^c. Dengan kata lain, untuk setiap $x \in \left(A^0\right)^c$ akan berakibat $x \in closure\,(A^c)$.

- **2. Menunjukkan kebenaran pernyataan 2.**

Kita akan menunjukkan bahwa berlaku $closure\,(A^c) \subseteq \left(A^0\right)^c$ dengan cara menunjukkan bahwa untuk setiap $x \in closure\,(A^c)$ akan berakibat $x \in \left(A^0\right)^c$.

Oke! Karena $x \in closure\,(A^c)$, maka x adalah titik *closure* himpunan A^c. Dengan demikian, menurut **Definisi Titik *Closure* A^c**, setiap himpunan terbuka yang memuat elemen x juga akan memuat elemen dari himpunan A^c.

Dengan demikian, setiap himpunan terbuka yang memuat elemen x **tidak akan pernah termuat** di dalam himpunan A. Kenapa? Ya, karena setiap himpunan terbuka yang memuat elemen x juga akan memuat elemen dari himpunan A^c. Mana mungkin elemen dari himpunan A^c bakal termuat di himpunan A?

Oleh sebab itu, kita dapat menyatakan bahwa elemen x **bukan titik interior** himpunan A. Karena elemen x **bukan titik interior** himpunan A (yaitu, $x \notin A^0$), maka kita bisa menyatakan bahwa elemen x adalah elemen dari komplemen himpunan A^0 atau dengan kata lain $x \in \left(A^0\right)^c$.

■

6

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 2 (b)

Soal

Give an example of $A \subset \mathbb{R}$ such that $A^0 = \emptyset$ but $\bar{A} = \mathbb{R}$.

Dikerjakan

Terjemahan soal ini dalam bahasa Indonesia adalah sebagai berikut.

> Berikan contoh suatu himpunan $A \subset \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $A^0 = \emptyset$ akan tetapi $\bar{A} = \mathbb{R}$

Eh, sebelumnya, topologi yang dipakai ini adalah topologi umum yang berlaku di sistem bilangan real ya! Kita akan sajikan dulu beberapa definisinya.

Beberapa Definisi Topologi Umum pada $\mathbb{R}$

1. Diketahui $a \in \mathbb{R}$. Untuk bilangan real $\epsilon > 0$, persekitaran-ϵ dari a adalah himpunan $V_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - a| < \epsilon\}$.
2. Diketahui $A \subset \mathbb{R}$. Himpunan A disebut sebagai himpunan terbuka di $\mathbb{R}$ jika dan hanya jika untuk setiap $a \in A$ terdapat persekitaran dari a (sebut persekitaran ini sebagai V) sedemikian sehingga berlaku $V \subseteq A$.
3. Diketahui $F \subset \mathbb{R}$. Himpunan F disebut sebagai himpunan tertutup di $\mathbb{R}$ jika dan hanya jika himpunan $F^c = \mathbb{R} - F$ adalah himpunan terbuka.
4. Diketahui $A \subset \mathbb{R}$. Elemen $x \in \mathbb{R}$ disebut sebagai titik interior A jika dan hanya jika terdapat suatu persekitaran dari x (sebut persekitaran ini sebagai V) sedemikian sehingga berlaku $V \subseteq A$.
5. Diketahui $A \subset \mathbb{R}$. *Closure* dari A (dinotasikan $\bar{A}$) adalah irisan semua himpunan tertutup yang memuat A.

Beberapa Sifat Topologi Umum pada $\mathbb{R}$

1. Diketahui $A \subset \mathbb{R}$. Himpunan A disebut sebagai himpunan terbuka di $\mathbb{R}$ jika dan hanya jika setiap elemen $a \in A$ adalah titik interior dari A.
2. Diketahui $A \subset \mathbb{R}$. *Closure* dari A adalah himpunan tertutup terkecil yang memuat himpuan A.
3. Untuk sebarang dua elemen $x, y \in \mathbb{R}$ dengan sifat $x < y$, akan terdapat bilangan rasional r sedemikian sehingga berlaku pertidaksamaan $x < r < y$.
4. Sebarang persekitaran di $\mathbb{R}$ adalah himpunan yang tak berhingga dan memuat bilangan rasional.

Kita akan menunjukkan bahwa himpunan bilangan rasional ($\mathbb{Q}$) dapat kita pilih sebagai himpunan A. Dengan demikian, kita akan menunjukkan bahwa $\mathbb{Q}^0 = \emptyset$ dan $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Oke! Pertama, kita akan menunjukkan bahwa $Q^0 = \emptyset$! Kita ambil sebarang bilangan real r. Perhatikan bahwa untuk sebarang bilangan real positif ϵ, persekitaran $V_\epsilon(r)$ akan memuat tak berhingga banyaknya bilangan rasional dan juga bilangan irrasional. Oleh sebab itu, karena himpunan $\mathbb{Q}$ hanya memuat bilangan-bilangan rasional, maka kita bisa menyatakan bahwa persekitaran $V_\epsilon(r)$ tidak akan termuat di dalam $\mathbb{Q}$. Oleh sebab itu, sebarang bilangan real r bukan titik interior $\mathbb{Q}$ dan karenanya $Q^0 = \emptyset$.

Selanjutnya! Kita akan menunjukkan bahwa $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Kita misalkan F sebagai sebarang himpunan tertutup yang memuat $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q} \subset F \subseteq \mathbb{R}$).

Nah, karena F adalah himpunan tertutup, maka F^c adalah himpunan terbuka.

Pertanyannya adalah, "Himpunan F^c itu kosong atau tidak?"

Yang jelas, himpunan F itu tidak kosong karena kan $\mathbb{Q}$ termuat di dalam F.

Nah, kita **andaikan** saja bahwa F^c bukan himpunan kosong. Dengan demikian, akan terdapat elemen $f \in F^c$.

Karena F^c adalah himpunan terbuka, maka f adalah titik interior F^c. Dengan demikian, akan terdapat suatu persekitaran dari f (sebut persekitaran ini sebagai V) dengan $f \in V$ dan $V \subseteq F^c$.

Karena persekitaran V termuat di himpunan F^c, maka persekitaran V sama sekali tidak memuat satu pun elemen himpunan F. Ingat! Himpunan $\mathbb{Q}$ kan termuat di dalam F. Itu artinya, persekitaran V **sama sekali tidak memuat** satu pun bilangan rasional.

Lha, ini kan tidak mungkin! Perhatikan sifat topologi umum nomor 3 dan 4 di atas.

Dengan demikian, pengandaian bahwa F^c bukan himpunan kosong adalah **salah**. Yang benar adalah F^c itu himpunan kosong.

Karena F^c itu himpunan kosong, maka kita bisa menyatakan bahwa F tidak lain adalah $\mathbb{R}$. Dengan demikian, karena F dipilih sebarang, maka kita bisa menyatakan bahwa satu-satunya himpunan tertutup yang memuat $\mathbb{Q}$ adalah $\mathbb{R}$. Dengan demikian, akan berlaku $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

■

7

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 3 (a)

Soal

Diberikan barisan bilangan real (x_n), dengan $x_1 \geq 2$, $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n - 1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Tunjukkan barisan (x_n) terbatas ke bawah! Tentukan $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$!

Dikerjakan

Oke! Sebagai permulaan kita jabarkan dulu barisan (x_n) sebagaimana berikut.

$$\begin{aligned}(x_n) &= (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, x_5,\ ...\ x_n,\ x_{n+1},\ ...)\\ &= \left(\geq 2,\ 1+\sqrt{x_1-1},\ 1+\sqrt{x_2-1},\ 1+\sqrt{x_3-1}, 1+\sqrt{x_4-1},\ ...\ 1+\sqrt{x_{n-1}-1},\ 1+\sqrt{x_n-1},\ ...\right)\end{aligned}$$

Barisan ini "agak aneh" ya, karena suku pertamanya, yaitu x_1, bisa bermacam-macam dengan syarat nilainya lebih besar atau sama dengan 2. Sebagai contoh, bisa saja $x_1 = 2$ atau $x_1 = \pi$, atau $x_1 = \sqrt{7}$.

Oke! Kita akan menunjukkan bahwa barisan (x_n) terbatas ke bawah dengan cara menunjukkan kebenaran **Pernyataan-1** di bawah:

Pernyataan-1

Diketahui barisan bilangan real (x_n), dengan $x_1 \geq 2$, $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n - 1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ akan berlaku $x_n \geq 2$. Dengan demikian, 2 adalah batas bawah barisan (x_n).

dengan menggunakan metode **Induksi Matematika**. Urutan langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

- Kita akan menunjukkan bahwa pertidaksamaan $x_n \geq 2$ berlaku benar untuk $n = 1$.
- Kita akan mengasumsikan bahwa pertidaksamaan $x_n \geq 2$ berlaku benar untuk $n = p$.
- Kita akan menunjukkan bahwa pertidaksamaan $x_n \geq 2$ berlaku benar untuk $n = p + 1$.

• Langkah-1

Kita akan menunjukkan bahwa pertidaksamaan $x_n \geq 2$ berlaku benar untuk $n = 1$. Dengan kata lain, kita akan menunjukkan bahwa berlaku pertidaksamaan $x_1 \geq 2$.

Karena berdasarkan definisi suku-suku barisan (x_n) diketahui bahwa $x_1 \geq 2$, maka kita dapat menyatakan benar bahwa pertidaksamaan $x_n \geq 2$ berlaku benar untuk $n = 1$.

• Langkah-2

Kita akan mengasumsikan bahwa pertidaksamaan $x_n \geq 2$ berlaku benar untuk $n = p$ dengan p adalah suatu bilangan asli.

• Langkah-3

Kita akan menunjukkan bahwa pertidaksamaan $x_n \geq 2$ berlaku benar untuk $n = p + 1$. Dengan kata lain, kita akan menunjukkan bahwa berlaku pertidaksamaan $x_{p+1} \geq 2$.

Karena di **Langkah-2** kita mengasumsikan bahwa $x_p \geq 2$, maka akan berlaku $x_p - 1 \geq 1$. Akibatnya, akan berlaku $\sqrt{x_p - 1} \geq 1$.

Berdasarkan definisi suku-suku barisan (x_n) diketahui bahwa $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n - 1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Nah, jika $n = p$, maka kita akan memperoleh persamaan: $x_{p+1} = 1 + \sqrt{x_p - 1}$.

Karena berlaku pertidaksamaan $\sqrt{x_p - 1} \geq 1$, maka kita bisa menyatakan bahwa $1 + \sqrt{x_p - 1} \geq 2$. Dengan kata lain, kita bisa menyatakan bahwa $x_{p+1} \geq 2$.

- **Kesimpulan**

Berdasarkan **Langkah-1** dan **Langkah-3** di atas, kita dapat menyatakan bahwa **Pernyataan-1** terbukti benar. Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa barisan (x_n) terbatas ke bawah oleh 2. Dengan kata lain, 2 adalah batas bawah barisan (x_n).

Kesimpulan-1

Barisan (x_n) adalah barisan bilangan real yang terbatas ke bawah.

***

Oke! Selanjutnya, kita akan menentukan infimum barisan (x_n)!

Euh... terus-terang, proses untuk menentukan infimum barisan (x_n) ini lumayan panjang ya. Jadi, alangkah baiknya aku tuliskan langkah demi langkah sebagaimana berikut ini.

- **Langkah-1**

Oke! Pertama-tama, kita akan "mengubah" definisi barisan (x_n). Sebagaimana di soal, definisi barisan (x_n) adalah sebagai berikut.

Definisi Barisan (x_n)

Diketahui barisan bilangan real (x_n), dengan $x_1 \geq 2$, $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n - 1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Perhatikan bahwa persamaan $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n - 1}$, $n \in \mathbb{N}$ itu ekuivalen dengan $x_{n+1} - 1 = \sqrt{x_n - 1}$, $n \in \mathbb{N}$. Dengan demikian Definisi Barisan (x_n) dapat kita nyatakan sebagai berikut.

Definisi Barisan (x_n) **(Modifikasi 1)**

Diketahui barisan bilangan real (x_n), dengan $x_1 \geq 2$, $x_{n+1} - 1 = \sqrt{x_n - 1}$, $n \in \mathbb{N}$.

- **Langkah-2**

Kita punya barisan $(x_n) = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ ...)$.

Ingat! Pada bagian sebelumnya, kita sudah menunjukkan bahwa barisan (x_n) terbatas ke bawah oleh 2. Dengan demikian, akan berlaku pertidaksamaan $2 \leq x_n$ untuk setiap bilangan asli n. Pertidaksamaan ini ekuivalen dengan $x_n \geq 2$ untuk setiap bilangan asli n.

Selanjutnya, kita akan bentuk suatu barisan baru, yaitu (y_n) dengan definisi suku $y_n = x_n - 1$.

$$(y_n) \;=\; (y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ ...) \;=\; (x_1 - 1,\ x_2 - 1,\ x_3 - 1,\ x_4 - 1,\ x_5 - 1,\ ...)$$

Karena berlaku pertidaksamaan $x_n \geq 2$ untuk setiap bilangan asli n, akibatnya akan berlaku juga pertidaksamaan $y_n \geq 1$ untuk setiap bilangan asli n.

Untuk beberapa langkah selanjutnya, kita akan fokus pada barisan (y_n).

- **Langkah-3**

Perhatikan definisi barisan (y_n) yang baru saja kita buat! Perhatikan definisi suku y_{n+1} dan y_n sebagaimana di bawah ini.

$$y_{n+1} = x_{n+1} - 1 \text{ dan } y_n = x_n - 1$$

Nah! Berdasarkan **Definisi Barisan** (x_n) **(Modifikasi 1)**, maka kita dapat mendefinisikan barisan (y_n) menjadi seperti di bawah ini.

Definisi Barisan (y_n) **(Baru)**

Diketahui barisan bilangan real (y_n), dengan $y_1 \geq 1$, $y_{n+1} = \sqrt{y_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

- **Langkah-4**

Berdasarkan **Definisi Barisan** (y_n) **(Baru)** di atas, maka kita bisa menjabarkan barisan (y_n) menjadi seperti di bawah ini.

$$\begin{aligned}
(y_n) &= (y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ ...) \\
&= (y_1,\ \sqrt{y_1},\ \sqrt{y_2},\ \sqrt{y_3},\ \sqrt{y_4},\ ...) \\
&= (y_1,\ \sqrt{y_1},\ \sqrt{\sqrt{y_1}},\ \sqrt{\sqrt{y_2}},\ \sqrt{\sqrt{y_3}},\ ...) \\
&= (y_1,\ \sqrt{y_1},\ \sqrt[4]{y_1},\ \sqrt[4]{y_2},\ \sqrt[4]{y_3},\ ...) \\
&= (y_1,\ \sqrt{y_1},\ \sqrt[4]{y_1},\ \sqrt[8]{y_1},\ \sqrt[8]{y_2},\ ...) \\
&= (y_1,\ \sqrt{y_1},\ \sqrt[4]{y_1},\ \sqrt[8]{y_1},\ \sqrt[16]{y_1},\ \sqrt[32]{y_1},\ \sqrt[64]{y_1},\ ...)
\end{aligned}$$

Dengan demikian kita bisa menyatakan suku y_n sebagai: $y_n = \sqrt[2^{(n-1)}]{y_1}$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

Berdasarkan penjabaran suku-suku di atas, perhatikan bahwa (y_n) adalah barisan yang turun monoton. Karena kita mendefinisikan $y_n = x_n - 1 \iff x_n = y_n + 1$, maka kita dapat menyatakan bahwa barisan (x_n) juga merupakan barisan yang turun monoton.

Perhatikan! Adanya $+1$ pada definisi $x_n = y_n + 1$ tetap akan membuat barisan (x_n) menjadi barisan yang turun monoton dikarenakan nilai suku y_n akan semakin mengecil seiring dengan membesarnya bilangan asli n.

Kesimpulan-2

Barisan (x_n) adalah barisan bilangan real yang turun monoton.

- **Langkah-5**

Sekarang kita bentuk barisan bagian (y'_n) dari barisan (y_n) sebagai:

$$(y'_n) = (\sqrt{y_1},\ \sqrt[4]{y_1},\ \sqrt[8]{y_1},\ \sqrt[16]{y_1},\ \sqrt[32]{y_1},\ \sqrt[64]{y_1},\ \ldots).$$

Yah, sebetulnya barisan bagian (y'_n) ini hanya barisan (y_n) tanpa suku pertama: y_1.

Perhatikan! Barisan bagian (y'_n) ini sebetulnya adalah juga barisan bagian dari barisan (Y_n), yang didefinisikan sebagai:

$$(Y_n) = (y_1,\ \sqrt{y_1},\ \sqrt[3]{y_1},\ \sqrt[4]{y_1},\ \sqrt[5]{y_1},\ \sqrt[6]{y_1},\ \ldots,\ \sqrt[n]{y_1},\ \ldots)$$

Sebagaimana yang **mungkin** kita sudah tahu, barisan (Y_n) ini konvergen ke 1.

Untuk pembaca yang mau tahu pembuktian barisan (Y_n) konvergen ke 1 silakan simak **Langkah-Langkah Ekstra** di halaman setelah ini. Sedangkan jika pembaca sudah **yakin** bahwa barisan (Y_n) konvergen ke 1, silakan lanjut ke **Langkah-6**.

- **Langkah-6**

Karena barisan (Y_n) konvergen ke 1 dan (y'_n) adalah barisan bagian dari (Y_n), maka berdasarkan teorema berikut:

Teorema-1

Suatu barisan (x_n) konvergen ke x jika dan hanya jika semua barisan bagian dari (x_n) juga konvergen ke x.

kita bisa menyatakan bahwa barisan bagian (y'_n) konvergen ke 1.

Ingat! Karena sesungguhnya barisan bagian (y_n') adalah barisan (y_n) tanpa suku pertama, yaitu y_1, maka kita dapat menyatakan bahwa barisan barisan (y_n) juga konvergen ke 1.

- **Langkah-7**

Nah, selanjutnya kita akan menunjukkan bahwa barisan (x_n) adalah barisan yang konvergen. Ingat! Karena barisan (y_n) konvergen ke 1, akibatnya $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n) = 1$ dan dengan demikian:

$$\begin{aligned} y_n = x_n - 1 &\iff \lim_{n\to\infty}(y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n - 1) \\ &\iff \lim_{n\to\infty}(y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n) - \lim_{n\to\infty}(1) \\ &\iff 1 = \lim_{n\to\infty}(x_n) - 1 \\ &\iff \lim_{n\to\infty}(x_n) = 2 \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas kita memperoleh hasil bahwa barisan (x_n) konvergen ke 2.

- **Langkah-8**

Berdasarkan **Kesimpulan-2** dan hasil **Langkah-7** kita mendapatkan hasil bahwa barisan (x_n) adalah barisan turun monoton yang konvergen ke 2.

Nah, berdasarkan teorema berikut:

Teorema-2

Jika barisan (x_n) turun monoton dan terbatas ke bawah, maka $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

atau dengan kata lain:

Suatu barisan (x_n) yang turun monoton sekaligus terbatas ke bawah adalah barisan yang konvergen ke infimumnya.

pada akhirnya *(fiuh...)* kita bisa menyatakan bahwa infimum barisan (x_n) adalah 2.

■

8

Ekstra! Penjelasan Tambahan 1 Ujian Tengah Semester Soal Nomor 3 (a)

Tentang

Buktikan bahwa barisan:

$$(\sqrt[n]{a}) = (a,\ \sqrt{a},\ \sqrt[3]{a},\ \sqrt[4]{a},\ \sqrt[5]{a},\ ...,\ \sqrt[n]{a},\ ...) = (a^{\frac{1}{1}},\ a^{\frac{1}{2}},\ a^{\frac{1}{3}},\ a^{\frac{1}{4}},\ a^{\frac{1}{5}},\ ...,\ a^{\frac{1}{n}},\ ...)$$

untuk sebarang $a \in \mathbb{R}$ dengan $a \geq 1$ itu konvergen ke 1!

Dikerjakan

Kita akan membuktikan bahwa barisan:

$$(\sqrt[n]{a}) = (a,\ \sqrt{a},\ \sqrt[3]{a},\ \sqrt[4]{a},\ \sqrt[5]{a},\ ...,\ \sqrt[n]{a},\ ...) = (a^{\frac{1}{1}},\ a^{\frac{1}{2}},\ a^{\frac{1}{3}},\ a^{\frac{1}{4}},\ a^{\frac{1}{5}},\ ...,\ a^{\frac{1}{n}},\ ...)$$

untuk sebarang $a \in \mathbb{R}$ dengan $a \geq 1$ itu konvergen ke 1 dengan menggunakan definisi formal limit barisan, yaitu membuktikan kebenaran pernyataan berikut.

> **Pernyataan yang Harus Dibuktikan Kebenarannya**
>
> Untuk sebarang bilangan real positif ϵ akan terdapat suatu bilangan asli n_0 sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli n yang memenuhi pertidaksamaan $n > n_0$ akan berakibat $|a^{\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon$.

Oke! Ayo kita mulai pembuktiannya!

- **Langkah-1**

Sebelumnya, kita paparkan dulu sifat bilangan real yang akan kita pakai.

Pertama, jelas kita sudah tahu bahwa $1^n = 1$ untuk sebarang bilangan asli n.

Kedua, jika a dan b adalah bilangan-bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan $a \geq b > 0$, maka akan berlaku pula pertidaksamaan $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b} > 0$ untuk sebarang bilangan asli n.

Kemudian, misalkan a adalah suatu bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan $a \geq 1$. Karena $1^n = 1$ untuk sebarang bilangan asli n, maka kita akan punya pertidaksamaan $a \geq 1^n$ untuk sebarang bilangan asli n.

Perhatikan bahwa pertidaksamaan $a \geq 1^n$ akan ekuivalen dengan pertidaksamaan: $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{1^n} \iff \sqrt[n]{a} \geq 1 \iff a^{\frac{1}{n}} \geq 1$.

Jadi, berdasarkan paparan di atas, kita bisa menyimpulkan bahwa untuk sebarang bilangan asli n dan sebarang bilangan real $a \geq 1$ akan berlaku pertidaksamaan $a^{\frac{1}{n}} \geq 1$.

- **Langkah-2**

Kita ambil sebarang bilangan real positif ϵ.

- **Langkah-3**

Selanjutnya, kita akan menelaah pertidaksamaan $|a^{\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon$.

Karena $a \geq 1$, maka berdasarkan hasil di **Langkah-1**, kita akan memperoleh pertidaksamaan $a^{\frac{1}{n}} - 1 \geq 0$.

Oleh sebab itu, kita akan memperoleh persamaan $|a^{\frac{1}{n}} - 1| = a^{\frac{1}{n}} - 1$.

Oleh sebab itu pula, kita bisa "memodifikasi" **Pernyataan yang Harus Dibuktikan Kebenarannya** menjadi seperti berikut.

Pernyataan yang Harus Dibuktikan Kebenarannya (Modifikasi ke-1)

Untuk sebarang bilangan real positif ϵ akan terdapat suatu bilangan asli n_0 sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli n yang memenuhi pertidaksamaan $n > n_0$ akan berakibat $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$.

- **Langkah-4**

Sekarang kita akan menelaah pertidaksamaan $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$.

Perhatikan bahwa pertidaksamaan $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$ itu ekuivalen dengan pertidaksamaan $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \epsilon$.

Berdasarkan sifat bilangan real yang sudah dipaparkan di **Langkah-1**, pertidaksamaan $a^{\frac{1}{n}} < 1+\epsilon$ akan ekuivalen dengan $a < (1+\epsilon)^n$ atau dengan kata lain $(1+\epsilon)^n > a$.

Dengan demikian, kita bisa "memodifikasi" **Pernyataan yang Harus Dibuktikan Kebenarannya** menjadi seperti berikut.

Pernyataan yang Harus Dibuktikan Kebenarannya (Modifikasi ke-2)

Untuk sebarang bilangan real positif ϵ akan terdapat suatu bilangan asli n_0 sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli n yang memenuhi pertidaksamaan $n > n_0$ akan berakibat $(1+\epsilon)^n > a$.

- **Langkah-5**

Selanjutnya, kita akan mencoba untuk menjabarkan $(1+\epsilon)^n$. Dengan menggunakan binomial Newton, kita bisa menjabarkan $(1+\epsilon)^n$ menjadi seperti berikut.

$$(1+\epsilon)^n =$$
$$\frac{n!}{0!\cdot(n-0)!}(1^n\cdot\epsilon^0) + \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!}(1^{(n-1)}\cdot\epsilon^1) + \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}(1^{(n-2)}\cdot\epsilon^2) + ... + \frac{n!}{n!\cdot(n-n)!}(1^{(n-n)}\cdot\epsilon^n)$$

Persamaan di atas bisa kita ringkas menjadi seperti berikut.

$$(1+\epsilon)^n \ = \ 1 \ + \ n\cdot\epsilon \ + \ (n\cdot(n-1))\cdot\epsilon^2 \ + \ ... \ + \ \epsilon^n$$

Nah, berdasarkan persamaan di atas, kita bisa menyimpulkan bahwa berlaku pertidaksamaan berikut.

$$(1+\epsilon)^n > 1 \ + \ n\cdot\epsilon$$

Ingat! ϵ adalah bilangan real positif! Dengan demikian, $(1+\epsilon)^n$ dan suku-suku hasil penjabarannya juga adalah bilangan-bilangan real positif.

- **Langkah-6**

Ingat! ϵ dan a adalah bilangan-bilangan real positif!

Dengan demikian, berdasarkan ***Archimedean Property***, akan terdapat bilangan asli m sedemikian sehingga berlaku pertidaksamaan $\epsilon \cdot m > a$.

Atau dengan kata lain, berdasarkan ***Archimedean Property***, akan terdapat bilangan asli m sedemikian sehingga berlaku pertidaksamaan $m > \frac{a}{\epsilon}$.

Nah! Ini dia!

Jika kita tetapkan bilangan asli n_0 sebagai:

$$n_0 \text{ adalah bilangan asli yang memenuhi pertidaksamaan } n_0 > \frac{a}{\epsilon}$$

maka akan diperoleh pertidaksamaan berikut.

$$1 + n_0 \cdot \epsilon > 1 + \left(\frac{a}{\epsilon}\right) \cdot \epsilon$$

Perhatikan! Pertidaksamaan di atas ekuivalen dengan pertidaksamaan berikut.

$$1 + n_0 \cdot \epsilon > 1 + a$$

Akibatnya, berlaku juga pertidaksamaan berikut.

$$1 + n_0 \cdot \epsilon > a$$

Ingat! Di **Langkah-6** kita punya pertidaksamaan $(1+\epsilon)^n > 1 + n \cdot \epsilon$ untuk sebarang bilangan asli n.

Dengan demikian, menggunakan bilangan asli n_0 ini, kita akan punya pertidaksamaan:

$$1 + n_0 \cdot \epsilon > a \iff (1+\epsilon)^{n_0} > a$$

- **Kesimpulan**

Untuk sebarang bilangan real positif ϵ, kita bisa menetapkan bilangan asli n_0 sebagai bilangan asli yang memenuhi pertidaksamaan $n_0 > \dfrac{a}{\epsilon}$ sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli n yang memenuhi pertidaksamaan $n > n_0$ akan berakibat $(1+\epsilon)^n > a$.

Karena **Pernyataan yang Harus Dibuktikan Kebenarannya (Modifikasi ke-2)** terbukti kebenarannya, maka terbukti benar bahwa barisan:

$$(\sqrt[n]{a}) = (a,\ \sqrt{a},\ \sqrt[3]{a},\ \sqrt[4]{a},\ \sqrt[5]{a},\ ...,\ \sqrt[n]{a},\ ...) = (a^{\frac{1}{1}},\ a^{\frac{1}{2}},\ a^{\frac{1}{3}},\ a^{\frac{1}{4}},\ a^{\frac{1}{5}},\ ...,\ a^{\frac{1}{n}},\ ...)$$

untuk sebarang $a \in \mathbb{R}$ dengan $a \geq 1$ itu konvergen ke 1.

$\blacksquare$

9

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 3 (b)

Soal

Jika $A \subset \mathbb{R}$ himpunan tak hingga, terbatas ke bawah dan $x = \inf(A)$, tunjukkan ada barisan turun monoton (x_n) sehingga $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

Dikerjakan

Soal klasik banget ini.

Oke! Kita paparkan dulu hal-hal yang kita ketahui ya!

Karena $A \subset \mathbb{R}$ adalah himpunan tak hingga yang terbatas ke bawah, maka akan terdapat $w \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk sebarang $a \in A$ akan berlaku $w \leq a$.

Nah, karena diawali dengan kata "terdapat $w \in \mathbb{R}$", maka **bisa jadi** bilangan w yang memenuhi itu ada banyak. Mungkin bakal ada w_1, w_2, w_3, dst yang kesemuanya itu bisa kita himpun ke dalam himpunan $W = \{w_1, w_2, w_3, ...\} = \{w \in \mathbb{R} \mid w \text{ batas bawah } A\}$. Himpunan W ini bisa jadi adalah himpunan tak hingga ya!

Nah, karena diketahui $x = \inf(A)$, maka x adalah batas bawah terbesar dari A. Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa $x \in W$ dan untuk sebarang $w \in W$ akan berlaku $w \leq x$.

Ingat! Karena x adalah batas bawah dari himpunan A, maka untuk sebarang $a \in A$ akan berlaku $x \leq a$.

Paragraf-paragraf di atas itu sekadar pengingat kalau-kalau lupa dengan yang namanya batas bawah terbesar alias infimum. 😃

Oke! Selanjutnya, kita ambil sebarang bilangan real positif ϵ_1. Setelahnya, kita "bentuk" bilangan real y_1 yang didefinisikan sebagai $y_1 = x + \epsilon_1$.

Naaah..., ayo kita selidiki hal-hal berikut.

Apakah y_1 adalah batas bawah himpunan A?

Jawabannya adalah **TIDAK**! Kenapa?

Ingat bahwa x adalah batas bawah terbesar himpunan A. Jelas, bahwa y_1 itu pasti lebih besar dari x. Karena kan $y_1 = x + \epsilon_1$ dengan $\epsilon_1 > 0$.

Apakah y_1 termuat di himpunan A?

Jawabannya adalah **YA**! Kenapa?

Di atas tadi kita sudah menunjukkan bahwa y_1 bukan batas bawah himpunan A. Nah, karena y_1 bukan batas bawah himpunan A, maka ada bilangan real $a' \in A$, sedemikian sehingga berlaku $a' < y_1$.

Nah, karena x adalah batas bawah (terkecil) himpunan A, maka untuk bilangan real a' tersebut akan berlaku $x \leq a' < y_1$.

Nah, karena A adalah himpunan tak hingga, maka kita bisa "menyesuaikan" pemilihan bilangan real $\epsilon_1 > 0$ di atas itu sedemikian sehingga terdapat bilangan real $a' \in A$ yang memenuhi pertidaksamaan $x < a' < y_1$ (dengan kata lain, $a' \neq x$).

Nah, karena $x < a'$, maka akan terdapat bilangan real positif γ_1 sedemikian sehingga berlaku $x = a' + \gamma_1$.

Dengan demikian pertidaksamaan $x < a' < y_1$ akan ekuivalen dengan $x < x + \gamma_1 < x + \epsilon_1$. Akibatnya, kita akan memperoleh pertidaksamaan $\gamma_1 < \epsilon_1$.

Ingat lho! γ_1 dan ϵ_1 itu bilangan-bilangan real positif!

Nah ini dia! Dengan informasi-informasi di atas, mari kita buat suatu barisan (x_n) yang didefinisikan sebagai $(x_n) = \left\{ x + \dfrac{\gamma_1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$.

Seperti yang bisa ditebak, selanjutnya kita akan menunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan yang dimaksud pada soal.

Nah, jika kita jabarkan, elemen-elemen barisan (x_n) akan seperti ini.

$$(x_n) = \left\{ x + \frac{\gamma_1}{1} \ , \ x + \frac{\gamma_1}{2} \ , \ x + \frac{\gamma_1}{3} \ , \ x + \frac{\gamma_1}{4} \ , \ x + \frac{\gamma_1}{5} \ , \ \dots \ , \ x + \frac{\gamma_1}{n} \ , \ \dots \right\}$$

Perhatikan!

Karena γ_1 adalah bilangan real positif, maka untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$ akan berlaku $\dfrac{\gamma_1}{n+1} < \dfrac{\gamma_1}{n}$. Akibatnya, untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$ akan berlaku $x + \dfrac{\gamma_1}{n+1} < x + \dfrac{\gamma_1}{n}$.

Dengan kata lain, untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$ akan berlaku $x_{n+1} < x_n$ atau dengan kata lain barisan (x_n) adalah barisan yang turun monoton.

Selanjutnya, perhatikan kelima hal berikut!

1. x adalah batas bawah terbesar himpunan A,
2. γ_1 adalah bilangan real positif,
3. $x + \gamma_1 \in A$,
4. Untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$ akan berlaku $x + \dfrac{\gamma_1}{n+1} < x + \dfrac{\gamma_1}{n}$, dan
5. $x < x + \gamma_1$.

Berdasarkan kelima hal di atas, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ akan berlaku $x < x + \dfrac{\gamma_1}{n} \leq x + \gamma_1$. Ingat lagi! A adalah himpunan tak hingga dan x adalah batas bawah terbesar himpunan A.

Dengan demikian, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ akan berlaku $x + \dfrac{\gamma_1}{n} \in A$. Dengan kata lain, barisan (x_n) termuat di himpunan A.

Nah, sejauh ini kita sudah menunjukkan bahwa barisan (x_n) yang kita buat itu adalah barisan turun monoton yang termuat di himpunan A. Dengan demikian, "misi" kita tinggal menunjukkan bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ alias barisan (x_n) konvergen ke x.

Oke! Ayo kita tunjukkan bahwa barisan (x_n) konvergen ke x!

Sebelumnya, perhatikan tiga hal berikut!

Hal pertama.

Perhatikan bahwa untuk sebarang bilangan asli m, akan berlaku:

$$|x_m - x| = \left|x + \frac{\gamma_1}{m} - x\right| = \left|\frac{\gamma_1}{m}\right|$$

Karena γ_1 dan m adalah bilangan-bilangan real positif, maka $\left|\frac{\gamma_1}{m}\right|$ akan ekuivalen dengan $\frac{\gamma_1}{m}$.

Jadi, kita bisa menyimpulkan bahwa untuk sebarang bilangan asli m, akan berlaku $|x_m - x| = \frac{\gamma_1}{m}$.

Hal kedua.

Menurut **Hukum Archimedes**, jika x dan y adalah bilangan-bilangan real positif, maka akan terdapat bilangan asli M sedemikian sehingga berlaku $M \cdot x > y$ yang ekuivalen dengan $x > \frac{y}{M}$.

Hal ketiga.

Diketahui n dan m adalah bilangan asli. Jika $n \geq m$, maka akan berlaku $\frac{1}{m} \geq \frac{1}{n}$.

Oke! Berdasarkan tiga hal di atas, kita akan menunjukkan bahwa barisan (x_n) konvergen ke x dengan caran menunjukkan kebenaran pernyataan berikut.

Pernyataan 1
Barisan (x_n) konvergen ke x jika dan hanya jika untuk sebarang bilangan real positif ϵ, akan terdapat bilangan asli M sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli n yang memenuhi $n \geq M$ akan berlaku $\epsilon > |x_n - x|$.

Nah, berdasarkan **Hal Pertama**, **Pernyataan 1** di atas akan berubah menjadi seperti ini.

Pernyataan 1 ***(modified)***
Barisan (x_n) konvergen ke x jika dan hanya jika untuk sebarang bilangan real positif ϵ, akan terdapat bilangan asli M sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli n yang memenuhi $n \geq M$ akan berlaku $\epsilon > \frac{\gamma_1}{n}$.

Nah, berdasarkan **Hal Kedua**, dengan memilih $x = \epsilon$ dan $y = \gamma_1$, akan diperoleh bilangan asli M sedemikian sehingga berlaku $\epsilon > \frac{\gamma_1}{M}$. Kita notasikan fakta ini sebagai **P2**.

Kemudian, berdasarkan **Hal Ketiga**, untuk setiap bilangan asli n yang memenuhi $n \geq M$ akan berlaku $\frac{1}{M} \geq \frac{1}{n}$. Karena γ_1 adalah bilangan real positif, maka pernyataan ini dapat "dimodifikasi" menjadi untuk setiap bilangan asli n yang memenuhi $n \geq M$ maka akan berlaku $\frac{\gamma_1}{M} \geq \frac{\gamma_1}{n}$. Kita notasikan fakta ini sebagai **P3**.

Nah, berdasarkan **P2** dan **P3**, kita bisa menyimpulkan bahwa untuk sebarang bilangan real positif ϵ, akan terdapat bilangan asli M sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli n yang memenuhi $n \geq M$ akan berlaku $\epsilon > \frac{\gamma_1}{M} \geq \frac{\gamma_1}{n}$.

Jadi, berdasarkan **Pernyataan 1** ***(modified)***, kita bisa menyimpulkan bahwa bahwa barisan (x_n) konvergen ke x.

■

10

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 4

Soal

Diketahui $x_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen dan $|y_n| \leq x_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, tunjukkan $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergen!

Dikerjakan

Sebelumnya, kita tampilkan dulu definisi deret yang konvergen.

Definisi Deret Konvergen

Diketahui barisan bilangan real (x_n).

Diketahui juga barisan bilangan real $S = (s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ ..., s_n,\ ...)$ dengan $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Deret $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika barisan S konvergen.

Berdasarkan soal, diketahui bahwa deret $\sum x_n$ konvergen. Dengan demikian, terdapat suatu bilangan real L, sedemikian sehingga $\lim_{n\to\infty} s_n = L$. Karena $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$, maka bentuk $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ akan ekuivalen dengan bentuk $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = L$. Supaya penulisannya lebih ringkas, kita akan menyatakan bahwa bentuk $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = L$ itu ekuivalen dengan bentuk $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i = L$.

Berdasarkan soal, diketahui bahwa $x_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan kata lain, kita bisa menyatakan bahwa $s_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Selanjutnya, perhatikan bahwa:

- $s_1 = \sum\limits_{i=1}^{1} x_i = x_1$
- $s_2 = \sum\limits_{i=1}^{2} x_i = x_1 + x_2 = s_1 + x_2$
- $s_3 = \sum\limits_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3 = s_2 + x_3$
- ...
- $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x_1 + ... + x_{n-1} + x_n = s_{n-1} + x_n$
- ... dst.

Berdasarkan penjabaran di atas, kita bisa menyimpulkan bahwa barisan S adalah barisan naik monoton karena berlaku $s_{n+1} \geq s_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Selanjutnya, perhatikan teorema berikut.

Teorema Konvergensi Barisan Monoton 1

Diketahui X adalah barisan bilangan real yang naik monoton. Jika barisan X konvergen, maka barisan X konvergen ke supremumnya.

Berdasarkan **Teorema Konvergensi Barisan Monoton 1** di atas, kita dapat menyatakan bahwa L adalah supremum barisan S. Dengan demikian, akan berlaku $s_n \leq L$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan kata lain, akan berlaku $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq L$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Kita sebut ini sebagai Hasil-1.

Sekarang, kita bentuk barisan bilangan real $T = (t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ ..., t_n,\ ...)$ dengan $t_n = \sum_{i=1}^{n} |y_i|$. Karena $|y_i|$ adalah bilangan real positif, maka kita dapat menyatakan bahwa bahwa $\sum_{i=1}^{n} |y_i| \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan kata lain, kita bisa menyatakan bahwa $t_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Serupa seperti barisan S, kita juga dapat menyatakan bahwa barisan T adalah barisan yang naik monoton.

Selanjutnya, pada soal diketahui bahwa $|y_n| \leq x_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, itu berarti akan berlaku pertidaksamaan: $|y_1| \leq x_1$, $|y_2| \leq x_2$, $|y_3| \leq x_3$, ..., $|y_n| \leq x_n$, ... dst. Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{n} |y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} x_i$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Nah, berdasarkan Hasil-1, kita akan memperoleh pertidaksamaan $\sum_{i=1}^{n} |y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq L$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan kata lain, akan berlaku pertidaksamaan $t_n \leq s_n \leq L$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Selanjutnya, perhatikan teorema berikut.

Teorema Konvergensi Barisan Monoton 2

Diketahui X adalah barisan bilangan real yang naik monoton. Jika barisan X terbatas ke atas, maka barisan X adalah barisan yang konvergen.

Berdasarkan **Teorema Konvergensi Barisan Monoton 2** di atas, kita dapat menyatakan bahwa barisan T adalah barisan yang konvergen karena barisan T terbatas ke atas oleh L.

Karena barisan T adalah barisan yang konvergen, maka kita dapat menyatakan bahwa deret $\sum |y_n|$ adalah deret yang konvergen.

Selanjutnya, perhatikan teorema berikut.

Teorema Konvergen Absolut

Diketahui $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real. Jika deret $\sum |x_n|$ konvergen, maka deret $\sum x_n$ juga konvergen.

Berdasarkan **Teorema Konvergen Absolut** di atas, karena deret $\sum |y_n|$ adalah deret yang konvergen, maka deret $\sum y_n$ juga adalah deret yang konvergen.

$\blacksquare$

11

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 5

Soal

Tentukan suatu bilangan $\delta > 0$ sehingga apabila $|x - 2| < \delta$, maka akan berakibat $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < 1$.

Dikerjakan

Heee... soal ini itu bakal terasa "gampang banget" kalau kita sudah terbiasa membuktikan limit fungsi memakai ϵ dan δ, khususnya membuktikan bahwa $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

Oke! Sebagai permulaan, ayo kita utak-atik dulu bentuk $\frac{1}{x} - \frac{1}{2}$ sebagaimana di bawah ini.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2x} - \frac{x}{2x} = \frac{2-x}{2x} = \frac{1}{2}\left(\frac{2-x}{x}\right)$$

Selanjutnya, kita substitusikan persamaan $\frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2-x}{x}\right)$ ke pertidaksamaan $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < 1$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < 1 &= \left|\frac{1}{2}\left(\frac{2-x}{x}\right)\right| < 1 \\
&= \left|\frac{1}{2}\right| \cdot \left|\frac{2-x}{x}\right| < 1 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{|2-x|}{|x|} < 1 \\
&= \frac{|x-2|}{|x|} < 2
\end{aligned}$$

Nah ini! Terlihat bahwa bagian penyebut memuat $|x|$. Ini "lumayan menarik" untuk dicermati.

Perhatikan! Soal kan meminta kita untuk menentukan suatu bilangan $\delta > 0$ sehingga apabila $|x - 2| < \delta$, maka akan bla bla bla....

Begitu kan?

Dengan kata lain, soal meminta kita untuk **menentukan suatu persekitaran (*neighborhood*) yang berpusat di 2** sehingga apabila bilangan real x termuat di persekitaran tersebut, maka akan berakibat bla bla bla ....

Begitu lho.

Nah, persekitaran yang berpusat di 2 itu biasa aku notasikan sebagai $V(2)$.

Nah lagi, karena ini adalah mata kuliah Pengantar Analisis (Real) yang diajarkan di tingkat sarjana, maka persekitaran yang berpusat di 2 itu akan memiliki **jarak (*distance*)** yang nilainya adalah bilangan real positif. Notasikan saja jarak ini sebagai d.

Dengan demikian, persekitaran yang berpusat di 2 dengan jarak d itu akan kita notasikan sebagai $V_d(2)$ dan didefinisikan dengan $V_d(2) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - 2| < d\}$.

Sekadar Informasi 1
Secara umum, untuk sebarang $c \in \mathbb{R}$, kita bisa mendefinisikan persekitaran yang berpusat di c dengan jarak d itu sebagai $V_d(c)$ dengan definisi $V_d(c) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - c| < d\}$.

Sekadar Informasi 2
Jika nanti sudah belajar konsep **metrik** pada mata kuliah Analisis Abstrak atau Topologi, definisi persekitaran pada sistem bilangan real itu bisa bermacam-macam lho. Misalnya, persekitaran $L_d(c) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \sqrt{|x-c|} < d\}$.

Cuma ya itu. Karena ini adalah mata kuliah Pengantar Analisis (Real) yang diajarkan di tingkat sarjana, maka persekitaran yang dipakai adalah persekitaran yang umum dipakai, yaitu $V_d(c)$ sebagaimana yang didefinisikan di atas itu.

Selanjutnya, jika persekitaran $V_d(2)$ kita visualisasikan dalam garis bilangan, maka penampakannya akan seperti ini.

Sebagai contoh, penampakan persekitaran $V_{3,5}(2) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x-2| < 3,5\}$ dalam garis bilangan adalah seperti ini.

Seperti yang bisa dilihat pada gambar di atas, bilangan-bilangan seperti -1, 2, dan 5 termuat di dalam persekitaran $V_{3,5}(2)$ karena $x = -1, 2$, dan 5 akan memenuhi pertidaksamaan $|x-2| < 3,5$.

Paham ya?

Nah, sekarang mari kita cermati lagi pertidaksamaan $\dfrac{|x-2|}{|x|} < 2$.

Karena di ruas kanan pertidaksamaan tersebut ada bilangan 2, maka...

Hmmm...

Ayo kita selidiki bilangan-bilangan $x \in \mathbb{R}$, yang memenuhi pertidaksamaan $|x| < 2023$. 😃

Lha!?

Kenapa tiba-tiba muncul angka 2023?

Ya *mbuh* ya! 😃

Mungkin alasannya karena tulisan ini dibuat tahun 2023?

Nggak jelas banget ya? Hahaha. 😃

Oke. Oke. Oke. Fokus lagi ke pertidaksamaan $|x| < 2023$ yuk!

Jelas bahwa semua bilangan $x \in \mathbb{R}$ yang memenuhi pertidaksamaan ini berada di antara -2023 dan 2023. Jadi ya bilangan-bilangan real semacam e^{2023} atau $-\pi \times 10^{2023}$ tidak akan memenuhi pertidaksamaan tersebut.

Nah, perhatikan bahwa jika $x \in \mathbb{R}$ memenuhi pertidaksamaan $|x| < 2023$, maka bilangan x tersebut juga akan memenuhi pertidaksamaan $2021 < x - 2 < 2025$.

Iya nggak?

Perhatikan bahwa pertidaksamaan $2021 < x - 2 < 2025$ memiliki batas atas, yaitu 2025.

Nah, jika kita bentuk persekitaran $V_{2025}(2)$, maka...

persekitaran $V_{2025}(2)$ akan punya ukuran yang lumayan besaaaaar!

Weh!

Jadi, sepertinya menyelidiki pertidaksamaan $|x| < 2023$ bukan ide yang bagus....

Coba, berapa banyak waktumu yang terbuang hingga membaca barisan ini? Hehehe. 😀

Lha iya! Namanya juga **mencoba untuk mengerjakan soal ujian**!

Ketemu jalan buntu itu lumrah. Makanya, setiap ujian kan diberi kertas buram untuk coret-coret. 😃

Toh, ini juga bukan ujian *beneran* kan?

Oke jadi begini, kita itu mau menyelidiki pertidaksamaan $|x| < \alpha$ untuk suatu bilangan real positif α sedemikian sehingga semua $x \in \mathbb{R}$ yang memenuhi pertidaksamaan tersebut juga akan memenuhi pertidaksamaan $\beta_1 < x - 2 < \beta_2$ untuk suatu $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Tapi... kali ini kita ingin supaya $\beta_1 = 0$.

Eh, kenapa β_1 harus bernilai 0?

Sabar ah! 😃 Tunggu saja akhir pengerjaan soal ini!

Jadi, misi kita kali ini adalah **menemukan** suatu suatu $\alpha \in \mathbb{R}^+$ sedemikian sehingga semua $x \in \mathbb{R}$ yang memenuhi pertidaksamaan $|x| < \alpha$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $0 < x - 2 < \beta_2$ untuk suatu $\beta_2 \in \mathbb{R}$.

Eh, kenapa juga pertidaksamaannya harus menyertakan suku $x - 2$?

Nah, itu karena pertidaksamaan utama kita, yaitu $\dfrac{|x-2|}{|x|} < 2$, kan memuat suku $x - 2$ di bagian pembilangnya.

Nah! Ayo sekarang kita temukan bilangan α tersebut!

Perhatikan! Pertidaksamaan $|x| < \alpha$ akan ekuivalen dengan pertidaksamaan $-\alpha < x < \alpha$. Ya nggak?

Kemudian, jika suatu $x \in \mathbb{R}$ memenuhi pertidaksamaan $-\alpha < x < \alpha$, maka bilangan x tersebut juga akan memenuhi pertidaksamaan $-\alpha - 2 < x - 2 < \alpha - 2$. Ya nggak?

Ingat ya! α itu bilangan real positif. Dengan demikian, $-\alpha - 2$ adalah bilangan real negatif dan $\alpha + 2$ adalah bilangan real positif.

Tapi... kan kita ingin supaya $\beta_1 = -\alpha - 2 = 0$, dengan demikian kita akan mendapatkan $\alpha = -2$.

...

Bukannya tadi itu dibilangnya α harus bilangan real positif ya?

Kok jadi kontradiksi begini?

Aaaargh! Ini pertidaksamaan $|x| < \alpha$ *nggawe runyam wae*!

Oke! Ayo deh kita kembali ke jalan yang "benar", seperti yang diinginkan soal.

Jadi, misi (asli) kita kali ini adalah **menemukan** suatu suatu $\delta \in \mathbb{R}^+$ sedemikian sehingga semua $x \in \mathbb{R}$ yang memenuhi pertidaksamaan $|x-2| < \delta$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $0 < x < \beta_2$ untuk suatu $\beta_2 \in \mathbb{R}$.

Itu toh yang diinginkan soal?

Perhatikan bahwa jika suatu bilangan real x memenuhi pertidaksamaan $0 < x < \beta_2$, maka bilangan real x tersebut juga akan memenuhi pertidaksamaan $|x| < \beta_2$.

Oke! Ayo perhatikan bahwa pertidaksamaan $|x-2| < \delta$ akan ekuivalen dengan pertidaksamaan $-\delta < x-2 < \delta$ yang ekuivalen juga dengan $-\delta + 2 < x < \delta + 2$. Ya nggak?

Karena kita ingin supaya bilangan x memenuhi pertidaksamaan $0 < x < \beta_2$, maka akan berlaku $-\delta + 2 = 0$ dan $\delta + 2 = \beta_2$.

Ingat ya! δ itu bilangan real positif. Dengan demikian, $-\delta$ adalah bilangan real negatif.

Oke! Karena $-\delta+2 = 0$, maka kita akan memperoleh $\delta = 2$. Dengan begitu, $\beta_2 = \delta+2 = 2+2 = 4$.

Jadi, jika bilangan real x memenuhi pertidaksamaan $|x-2| < 2$ $(2 = \delta)$, maka bilangan real x tersebut juga akan memenuhi $|x| < 4$ $(4 = \beta_2)$.

Dengan demikian, akan berlaku juga:

$$\frac{|x-2|}{|x|} < \frac{2}{4}$$

yang ekuivalen dengan:

$$\frac{|x-2|}{|x|} < \frac{1}{2}$$

dan karena $\dfrac{1}{2} < 2$, maka (pada akhirnya) akan berlaku:

$$\frac{|x-2|}{|x|} < 2.$$

Jadi, berdasarkan apa yang diminta oleh soal, jika kita memilih $\delta = 2$, maka untuk setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $|x - 2| < \delta$, maka akan berakibat bilangan real x tersebut juga memenuhi pertidaksamaan $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\right| < 1$.

Fiuh... akhirnya selesai juga pengerjaan soal ini.

Eh iya, sekadar informasi, 2 itu **bukan satu-satunya** nilai δ yang bisa kita pilih lho!

Kita juga bisa memilih nilai δ sebagai 2,5 atau 1 atau $\frac{1}{2023}$ dan sebagainya. Jadi, mungkin saja jawaban kamu dan teman-temanmu untuk soal ini bisa berbeda-beda. Tapi, hanya ada satu jawaban yang bakal sama, yaitu apabila yang ditanyakan adalah:

Tentukan bilangan $\delta > 0$ **terbesar** sehingga apabila bla bla bla....

Oh, sebetulnya pengerjaan soal ini bisa diringkas dengan menghilangkan paragraf-paragraf "jalan buntu" di atas. Tapi, karena akunya malas, jadi ya sudah begini sajalah. 😀

$\blacksquare$

12

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 1

Soal

Diberikan fungsi $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, c titik limit A, serta $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ ada dan bernilai tak nol. Dengan menggunakan definisi limit, buktikan bahwa terdapat $\delta > 0$ sehingga

$$f(x)f(y) > 0$$

untuk setiap $x, y \in A$ dengan $0 < |x - c| < \delta$ dan $0 < |y - c| < \delta$.

Dikerjakan

Karena c adalah titik limit himpunan A maka setiap himpunan terbuka yang memuat c akan memuat elemen yang berasal himpunan A dan elemen tersebut bukan c. Dengan kata lain, irisan setiap himpunan terbuka yang memuat c dengan himpunan A akan menghasilkan suatu himpunan tidak kosong yang elemen-elemennya adalah $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ dengan $x_i \neq c$ dan $x_i \in A$.

Kemudian, untuk sebarang bilangan real positif δ, jika kita bentuk himpunan $V_c(\delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < \delta\}$, maka himpunan $V_c(\delta)$ ini disebut sebagai persekitaran dari titik c dengan jari-jari δ dan merupakan himpunan terbuka. Karena c adalah titik limit himpunan A, maka himpunan $A \cap (V_c(\delta) - \{c\})$ bukan himpunan kosong.

Selanjutnya, perhatikan! Himpunan $A \cap (V_c(\delta) - \{c\})$ itu ekuivalen dengan himpunan $\{x \in A \ : \ 0 < |x - c| < \delta\}$. Pada teks-teks pembahasan selanjutnya, jika disebutkan bahwa bilangan real $x \in A$ memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta$, itu artinya bilangan real x adalah elemen dari himpunan $\{x \in A \ : \ 0 < |x - c| < \delta\}$ yang sudah dipastikan tidak kosong.

Kemudian, karena $\lim_{x \to c} f(x)$ ada dan bernilai tak nol, maka terdapat suatu bilangan real L dengan $L \neq 0$ sedemikian sehingga untuk sebarang bilangan real positif ϵ akan selalu dapat ditentukan bilangan real positif δ sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real $x \in A$ yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$.

Karena $L \neq 0$, maka ada 2 kemungkinan yang bisa terjadi:

1. $L > 0$, atau
2. $L < 0$

Ayo kita selidiki dua kemungkinan tersebut!

• 1. Kemungkinan yang terjadi adalah $L > 0$

Misalkan kemungkinan yang terjadi adalah $L > 0$. Dengan demikian, akan berlaku $\frac{L}{2} > 0$.

Dengan demikian, jika kita tetapkan $\epsilon = \frac{L}{2}$, maka kita bisa menetapkan bilangan bilangan real positif δ_1 sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real $x \in A$ yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta_1$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $|f(x) - L| < \frac{L}{2}$.

Perhatikan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \frac{L}{2}$ berikut.

$$\begin{aligned} |f(x) - L| < \frac{L}{2} &\iff -\frac{L}{2} < f(x) - L < \frac{L}{2} \\ &\iff L - \frac{L}{2} < f(x) < L + \frac{L}{2} \\ &\iff \frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2} \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, pertidaksamaan $|f(x) - L| < \frac{L}{2}$ akan ekuivalen dengan pertidaksamaan $\frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2}$.

Selanjutnya, karena $L > 0$, maka akan berlaku pertidaksamaan $\dfrac{L}{2} > 0$ dan $\dfrac{3L}{2} > 0$. Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa $f(x) > 0$.

Jadi, untuk setiap bilangan real $x \in A$ yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta_1$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $f(x) > 0$. Akibatnya, untuk setiap bilangan real x dan y yang berasal dari himpunan A dan memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta_1$ dan $0 < |y - c| < \delta_1$ akan memenuhi pertidaksamaan $f(x)f(y) > 0$.

- **2. Kemungkinan yang terjadi adalah $L < 0$**

Misalkan kemungkinan yang terjadi adalah $L < 0$. Dengan demikian, $|L| > 0$ dan juga akan berlaku $\dfrac{|L|}{2} > 0$.

Dengan demikian, jika kita tetapkan $\epsilon = \dfrac{|L|}{2}$, maka kita bisa menetapkan bilangan bilangan real positif δ_2 sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real $x \in A$ yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta_2$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $|f(x) - L| < \dfrac{|L|}{2}$.

Perhatikan pertidaksamaan $|f(x) - L| < \dfrac{|L|}{2}$ berikut.

$$
\begin{aligned}
|f(x) - L| < \frac{|L|}{2} &\iff -\frac{|L|}{2} < f(x) - (-|L|) < \frac{|L|}{2} \\
&\iff -\frac{|L|}{2} < f(x) + |L| < \frac{|L|}{2} \\
&\iff -\frac{|L|}{2} - |L| < f(x) < \frac{|L|}{2} - |L| \\
&\iff -\frac{3|L|}{2} < f(x) < -\frac{|L|}{2}
\end{aligned}
$$

Berdasarkan penjabaran di atas, pertidaksamaan $|f(x) - L| < \dfrac{|L|}{2}$ akan ekuivalen dengan pertidaksamaan $-\dfrac{3|L|}{2} < f(x) < -\dfrac{|L|}{2}$.

Selanjutnya, karena $|L| > 0$, maka akan berlaku pertidaksamaan $-\dfrac{3|L|}{2} < 0$ dan $-\dfrac{|L|}{2} > 0$. Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa $f(x) < 0$.

Jadi, untuk setiap bilangan real $x \in A$ yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta_2$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $f(x) < 0$. Akibatnya, untuk setiap bilangan real x dan y yang berasal dari himpunan A dan memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta_2$ dan $0 < |y - c| < \delta_2$ akan memenuhi pertidaksamaan $f(x)f(y) > 0$.

- **Kesimpulan**

Karena $\lim_{x \to c} f(x)$ ada dan bernilai tak nol, maka terdapat suatu bilangan real $L \neq 0$ sedemikian sehingga $\lim_{x \to c} f(x) = L$ dan berlaku salah satu dari 2 kemungkinan di bawah.

1. Jika $L > 0$, maka kita bisa menetapkan suatu bilangan real positif δ_1, sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real $x \in A$ yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta_1$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $f(x) > 0$.

2. Jika $L < 0$, maka kita bisa menetapkan suatu bilangan real positif δ_2, sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real $x \in A$ yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta_2$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $f(x) < 0$.

Akibatnya:

1. Jika $L > 0$, maka untuk setiap bilangan real x dan y yang berasal dari himpunan A dan memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta_1$ dan $0 < |y - c| < \delta_1$ akan memenuhi pertidaksamaan $f(x)f(y) > 0$.

2. Jika $L < 0$, maka untuk setiap bilangan real x dan y yang berasal dari himpunan A dan memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta_2$ dan $0 < |y - c| < \delta_2$ akan memenuhi pertidaksamaan $f(x)f(y) > 0$.

■

13

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 2

Soal

Diberikan fungsi $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan c titik limit A dengan $\lim_{x \to c} f(x) = 0$. Jika $f(x) > 0$ untuk setiap $x \in A$, buktikan bahwa $\lim_{x \to c} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

Dikerjakan

Karena c adalah titik limit himpunan A maka setiap himpunan terbuka yang memuat c akan memuat elemen yang berasal himpunan A dan elemen tersebut bukan c. Dengan kata lain, irisan setiap himpunan terbuka yang memuat c dengan himpunan A akan menghasilkan suatu himpunan tidak kosong yang elemen-elemennya adalah $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ dengan $x_i \neq c$ dan $x_i \in A$.

Kemudian, untuk sebarang bilangan real positif δ, jika kita bentuk himpunan $V_c(\delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < \delta\}$, maka himpunan $V_c(\delta)$ ini disebut sebagai persekitaran dari titik c dengan jari-jari δ dan merupakan himpunan terbuka. Karena c adalah titik limit himpunan A, maka himpunan $A \cap (V_c(\delta) - \{c\})$ bukan himpunan kosong.

Selanjutnya, perhatikan! Himpunan $A \cap (V_c(\delta) - \{c\})$ itu ekuivalen dengan himpunan $\{x \in A : 0 < |x - c| < \delta\}$. Pada teks-teks pembahasan selanjutnya, jika disebutkan bahwa bilangan real $x \in A$ memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta$, itu artinya bilangan real x adalah elemen dari himpunan $\{x \in A : 0 < |x - c| < \delta\}$ yang sudah dipastikan tidak kosong.

Kemudian, karena $\lim_{x \to c} f(x) = 0$, maka untuk sebarang bilangan real positif ϵ akan selalu dapat ditentukan bilangan real positif δ sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real $x \in A$ yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $|f(x)| < \epsilon$. Akan tetapi, karena $f(x) > 0$ untuk setiap $x \in A$, maka akan berlaku $|f(x)| = f(x)$ untuk setiap $x \in A$. Akibatnya, untuk setiap bilangan real $x \in A$ yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $0 < f(x) < \epsilon$. Kita tandai pernyataan ini sebagai **Hasil-1** sebagaimana berikut.

Hasil-1

Jika kita diberikan sebarang bilangan real positif ϵ, maka kita dapat mendapatkan suatu bilangan real positif δ, sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real $x \in A$ yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta$ akan memenuhi pertidaksamaan $0 < f(x) < \epsilon$.

Selanjutnya, ayo kita paparkan definisi $\lim_{x \to c} \frac{1}{f(x)} = \infty$ sebagaimana di bawah ini.

Definisi $\lim_{x \to c} \frac{1}{f(x)} = \infty$

$\lim_{x \to c} \frac{1}{f(x)} = \infty$ jika dan hanya jika untuk sebarang bilangan real positif M akan selalu dapat ditentukan bilangan real positif γ sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real $x \in A$ yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \gamma$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $\frac{1}{f(x)} > M$.

Oke! Kita ambil sebarang bilangan real positif M. Dengan demikian, salah satu dari tiga kemungkinan berikut akan berlaku.

1. $0 < M < 1$, atau
2. $M = 1$, atau
3. $M > 1$

Ayo kita selidiki tiga kemungkinan tersebut!

- **Jika yang berlaku adalah $M = 1$**

Oke! Kita akan menyelidiki jika yang berlaku adalah $M = 1$.

Berdasarkan **Hasil-1**, jika kita tetapkan $\epsilon = M = 1$, maka kita bisa mendapatkan suatu bilangan real positif δ_1, sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real $x \in A$ yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta_1$ akan memenuhi pertidaksamaan $0 < f(x) < 1$.

Perhatikan! Karena berlaku pertidaksamaan $0 < f(x) < 1$, akibatnya akan berlaku pertidaksamaan $\dfrac{1}{f(x)} > 1$. Ingat! Karena $M = 1$, maka hal ini ekuivalen berlakunya pertidaksamaan $\dfrac{1}{f(x)} > M$.

Dengan demikian, kita dapat menetapkan $\gamma = \delta_1$, sedemikian sehingga **Definisi** $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$ pada kotak kuning di atas itu berlaku benar.

- **Jika yang berlaku adalah $M > 1$**

Oke! Kita akan menyelidiki jika yang berlaku adalah $M > 1$.

Perhatikan! Jika $M > 1$, maka akan berlaku pertidaksamaan $0 < \dfrac{1}{M} < 1$. Dengan kata lain, $\dfrac{1}{M}$ adalah bilangan real positif.

Berdasarkan **Hasil-1**, jika kita tetapkan $\epsilon = \dfrac{1}{M}$, maka kita bisa mendapatkan suatu bilangan real positif δ_2, sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real $x \in A$ yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta_2$ akan memenuhi pertidaksamaan $0 < f(x) < \dfrac{1}{M}$.

Perhatikan! Karena berlaku pertidaksamaan $0 < f(x) < \dfrac{1}{M}$, akibatnya akan berlaku pertidaksamaan $\dfrac{1}{f(x)} > M$.

Dengan demikian, kita dapat menetapkan $\gamma = \delta_2$, sedemikian sehingga **Definisi** $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$ pada kotak kuning di atas itu berlaku benar.

- **Jika yang berlaku adalah** $0 < M < 1$

Oke! Kita akan menyelidiki jika yang berlaku adalah $0 < M < 1$.

Perhatikan! Jika $0 < M < 1$, maka akan berlaku pertidaksamaan $\dfrac{1}{M} > 1$. Dengan kata lain, $\dfrac{1}{M}$ adalah bilangan real positif.

Oh iya! Perhatikan juga, bahwa karena $\dfrac{1}{M} > 1$, maka akan berlaku pertidaksamaan $\dfrac{1}{M} > M$. Lha, kan $0 < M < 1$ toh?

Berdasarkan **Hasil-1**, jika kita tetapkan $\epsilon = M$, maka kita bisa mendapatkan suatu bilangan real positif δ_3, sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real $x \in A$ yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta_3$ akan memenuhi pertidaksamaan $0 < f(x) < M$.

Perhatikan! Karena $0 < M < 1$, akibatnya untuk setiap bilangan real $x \in A$ yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta_3$ akan memenuhi pertidaksamaan $0 < f(x) < 1$.
Perhatikan! Karena berlaku pertidaksamaan $0 < f(x) < 1$, akibatnya akan berlaku pertidaksamaan $\dfrac{1}{f(x)} > 1$.

Dengan demikian, berdasarkan **Hasil-1**, jika kita tetapkan $\epsilon = M$, maka kita bisa mendapatkan suatu bilangan real positif δ_3, sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real $x \in A$ yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta_3$ akan memenuhi pertidaksamaan $\dfrac{1}{f(x)} > 1$. Karena $0 < M < 1$, maka hal ini ekuivalen dengan berlakunya pertidaksamaan $\dfrac{1}{f(x)} > M$.

Dengan demikian, kita dapat menetapkan $\gamma = \delta_3$, sedemikian sehingga **Definisi** $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$ pada kotak kuning di atas itu berlaku benar.

- **Kesimpulan**

Jika kita mengambil sebarang bilangan real positif M, maka salah satu dari tiga kemungkinan berikut akan berlaku.

1. $0 < M < 1$, atau
2. $M = 1$, atau
3. $M > 1$

Berdasarkan tiga kemungkinan di atas, maka kita akan mendapatkan salah satu dari δ_1, δ_2, atau δ_3 yang berupa bilangan real positif sebagaimana **tiga penjelasan kemungkinan** di atas.

Dengan menetapkan γ sebagai δ_i yang kita dapatkan tersebut, maka **Definisi** $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$ pada kotak kuning di atas itu akan berlaku benar.

■

14

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 3 (a)

Soal

Buktikan bahwa setiap fungsi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi kontinu seragam.

Dikerjakan

Ayo kita tampilkan dulu definisi fungsi yang kontinu seragam.

Definisi Fungsi yang Kontinu Seragam

Diketahui f adalah fungsi real dari dengan domain $A \subseteq \mathbb{R}$. Fungsi f disebut sebagai fungsi yang kontinu seragam jika dan hanya jika untuk setiap bilangan real positif ϵ akan selalu bisa didapatkan bilangan real positif δ, sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real $x \in A$ dan $y \in A$ yang memenuhi pertidaksamaan $|x - y| < \delta$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Selanjutnya, untuk yang "lupa", $\mathbb{Z}$ itu adalah himpunan semua bilangan bulat, yang bisa dijabarkan sebagai:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Karena ini adalah mata kuliah Pengantar Analisis (Real) I yang (umumnya) diperuntukkan bagi mahasiswa semester-semester tengah, maka kita akan memandang $\mathbb{Z}$ sebagai himpunan bagian dari $\mathbb{R}$. Dengan demikian, definisi mengenai himpunan terbuka, titik limit, persekitaran, dll (yang "nantinya" dikenal dengan istilah topologi) yang akan kita gunakan pada elemen-elemen di $\mathbb{Z}$ adalah definisi-definisi yang sudah kita pelajari pada mata kuliah Pengantar Analisis (Real) I, yaitu definisi-definisi yang berlaku di sistem bilangan real.

***

Oke! Kembali ke soal!

Misi kita pada soal ini adalah menentukan bilangan real positif δ yang memenuhi **Definisi Fungsi yang Kontinu Seragam** pada kotak kuning di atas.

Nah! Ayo kita ambil sebarang fungsi f yang memetakan elemen-elemen $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{R}$. Dengan kata lain, domain fungsi f adalah $\mathbb{Z}$ dan kodomain fungsi f adalah $\mathbb{R}$. Dengan demikian, $f(z)$ akan terdefinisi dengan baik untuk sebarang $z \in \mathbb{Z}$.

Ingat! Karena domain fungsi f adalah $\mathbb{Z}$, maka $f(r)$ dengan $r \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$ semacam $f(1,4), f(\pi), f(\sqrt{3})$ dll itu **tidak mungkin dapat terjadi!**

Misalkan kita tetapkan $\delta = \frac{1}{n}$ dengan n adalah sebarang bilangan asli yang lebih besar dari 1. Dengan demikian, δ akan berupa bilangan real positif. Dengan $\delta = \frac{1}{n}$, maka pertidaksamaan $|x - y| < \delta$ akan menjadi ekuivalen dengan $|x - y| < \dfrac{1}{n}$.

Nah, jika x dan y adalah elemen-elemen bilangan real, maka jelas ada banyak x dan y yang akan memenuhi pertidaksamaan $|x - y| < \dfrac{1}{n}$ tersebut. Akan tetapi, jika x dan y adalah elemen-elemen bilangan bulat, maka x dan y yang akan memenuhi pertidaksamaan $|x - y| < \dfrac{1}{n}$ tersebut akan sangat terbatas.

Jika $H \subseteq \mathbb{Z}$ adalah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|x - y| < \dfrac{1}{n}$, sedemikian sehingga untuk sebarang $x, y \in H$ akan memenuhi pertidaksamaan $|x - y| < \dfrac{1}{n}$, maka himpunan H tersebut akan berbentuk $H = \{z\}$ dengan z adalah suatu bilangan bulat.

Kenapa bisa begitu?

Sebab, jika x dan y adalah sebarang bilangan bulat yang berbeda ($x \neq y$), maka nilai harga mutlak dari selisih x dan y pasti akan lebih besar dari 1. Lebih jelasnya, karena x dan y adalah bilangan-bilangan bulat yang berbeda, maka di antara x dan y akan ada yang nilainya paling besar. Misalkan berlaku $x > y$. Dengan demikian, $x - y$ akan berupa bilangan bulat positif yang nilainya lebih besar atau sama dengan 1 dikarenakan berlaku pertidaksamaan $x > y$.

Oleh sebab itu, pertidaksamaan $|x - y| < \dfrac{1}{n}$ **tidak akan bisa dipenuhi** jika x dan y adalah bilangan-bilangan bulat yang berbeda. Dengan kata lain, pertidaksamaan $|x - y| < \dfrac{1}{n}$ **hanya akan bisa dipenuhi** jika x dan y adalah bilangan-bilangan bulat yang sama, yaitu berlaku $x = y$.

Dengan demikian, jika $H \subseteq \mathbb{Z}$ adalah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|x - y| < \dfrac{1}{n}$, maka himpunan H tersebut akan ada banyak sekali, tak terhingga banyaknya. Contoh himpunan H adalah $\{0\}$, $\{1\}$, $\{-1\}$, $\{2\}$, $\{-2\}$, dan seterusnya.

Selanjutnya, jika H adalah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|x - y| < \dfrac{1}{n}$, maka untuk sebarang $x, y \in H$ akan berlaku $x = y$. Akibatnya, untuk sebarang $x, y \in H$ akan berlaku $f(x) = f(y) \iff f(x) - f(y) = 0$.

Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa jika H adalah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|x - y| < \dfrac{1}{n}$, maka untuk sebarang bilangan real positif ϵ dan sebarang $x, y \in H$ akan berlaku pertidaksamaan $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Jadi, dengan menetapkan $\delta = \dfrac{1}{n}$ dengan n adalah sebarang bilangan asli, maka **Definisi Fungsi yang Kontinu Seragam** pada kotak kuning di atas akan berlaku benar. Tentu saja, ini berarti nilai δ dapat bermacam-macam, seperti $\delta = 1$ atau $\delta = \frac{1}{2022}$.

■

15

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 3 (b)

Soal

Diketahui fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi kontinu seragam. Jika terdapat $p > 0$ sehingga $|f(x)| \geq p$ berlaku untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, buktikan bahwa fungsi $\dfrac{1}{f}$ merupakan fungsi kontinu seragam.

Dikerjakan

Ayo kita tampilkan dulu definisi fungsi yang kontinu seragam.

> **Definisi Fungsi yang Kontinu Seragam**
>
> Diketahui f adalah fungsi real dari dengan domain $\mathbb{R}$. Fungsi f disebut sebagai fungsi yang kontinu seragam jika dan hanya jika untuk setiap bilangan real positif ϵ akan selalu bisa didapatkan bilangan real positif δ, sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real $x \in \mathbb{R}$ dan $y \in \mathbb{R}$ yang memenuhi pertidaksamaan $|x - y| < \delta$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Nah, sekarang... **seandainya**, **seandainya** lho! **Seandainya** fungsi $\frac{1}{f}$ adalah fungsi yang kontinu seragam, maka pernyataan di bawah ini akan berlaku benar.

Pernyataan yang Harus Dibuktikan Kebenarannya

Diketahui f adalah fungsi real dari dengan domain $\mathbb{R}$. Fungsi $\frac{1}{f}$ adalah fungsi yang kontinu seragam jika untuk setiap bilangan real positif ϵ, kita akan selalu bisa mendapatkan bilangan real positif γ, sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real $x \in \mathbb{R}$ dan $y \in \mathbb{R}$ yang memenuhi pertidaksamaan $|x - y| < \gamma$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right| < \epsilon$.

Nah, **misi kita** pada soal ini adalah menentukan bilangan real positif γ sedemikian sehingga **Pernyataan yang Harus Dibuktikan Kebenarannya** di kotak hijau di atas itu berlaku benar.

- **Langkah-1**

Oke! Ayo kita ambil sebarang bilangan real positif ϵ.

- **Langkah-2**

Perhatikan! Karena terdapat $p > 0$ sehingga $|f(x)| \geq p$ berlaku untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, maka dengan demikian akan berlaku $\frac{1}{|f(x)|} \leq p$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Dengan demikian, $\frac{1}{|f(x)|}$ akan selalu terdefinisi dengan baik untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

- **Langkah-3**

Sekarang ayo kita "utak-atik" bentuk $\left|\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{f(y)}\right|$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right| &= \left|\frac{f(y)}{f(x)f(y)} - \frac{f(x)}{f(x)f(y)}\right| \\ &= \left|\frac{f(y) - f(x)}{f(x)f(y)}\right| \\ &= \left|\frac{-(f(x) - f(y))}{f(x)f(y)}\right| \\ &= \frac{|-(f(x) - f(y))|}{|f(x)f(y)|} \\ &= \frac{|f(x) - f(y)|}{|f(x)f(y)|} \\ &= \frac{|f(x) - f(y)|}{|f(x)| \cdot |f(y)|}\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita memperoleh persamaan $\left|\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{f(y)}\right| = \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|f(x)| \cdot |f(y)|}$. Kita sebut persamaan ini sebagai (Persamaan-1).

- **Langkah-4**

Berdasarkan **Langkah-2**, karena berlaku pertidaksamaan $\dfrac{1}{|f(x)|} \leq p$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, maka kita akan memperoleh pertidaksamaan berikut.

$$\frac{1}{|f(x)| \cdot |f(y)|} \leq p^2, \text{ untuk setiap } x, y \in \mathbb{R}$$

Kita sebut pertidaksamaan di atas sebagai (Pertidaksamaan-1).

- **Langkah-5**

Perhatikan! Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ akan berlaku pertidaksamaan $|f(x) - f(y)| > 0$. Dengan demikian, menggunakan (Pertidaksamaan-1), kita akan mendapatkan pertidaksamaan berikut.

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|f(x)| \cdot |f(y)|} \leq |f(x) - f(y)| \cdot p^2$$

Kita sebut pertidaksamaan di atas sebagai (Pertidaksamaan-2).

- **Langkah-6**

Perhatikan! p^2 adalah bilangan real positif! Dengan demikian, untuk bilangan real positif ϵ yang kita ambil di **Langkah-1** itu, kita akan memperoleh $\dfrac{\epsilon}{p^2}$ juga adalah bilangan real positif. Kita notasikan $\dfrac{\epsilon}{p^2} = \epsilon_1$.

Karena fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi kontinu seragam, maka untuk bilangan real positif ϵ_1 akan bisa kita dapatkan suatu bilangan real positif δ_1, sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real $x \in \mathbb{R}$ dan $y \in \mathbb{R}$ yang memenuhi pertidaksamaan $|x - y| < \delta_1$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $|f(x) - f(y)| < \epsilon_1$ (ekuivalen dengan memenuhi pertidaksamaan $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\epsilon}{p^2}$).

- **Langkah-7**

Nah, jika kita tetapkan $\gamma = \delta_1$ sebagaimana nilai δ_1 yang muncul di **Langkah-6** dan juga (Pertidaksamaan-2) di **Langkah-5**, maka untuk setiap bilangan real $x \in \mathbb{R}$ dan $y \in \mathbb{R}$ yang memenuhi pertidaksamaan $|x - y| < \gamma$ juga akan memenuhi pertidaksamaan berikut.

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|f(x)| \cdot |f(y)|} \leq |f(x) - f(y)| \cdot p^2 \iff \frac{|f(x) - f(y)|}{|f(x)| \cdot |f(y)|} \leq \frac{\epsilon}{p^2} \cdot p^2 \iff \frac{|f(x) - f(y)|}{|f(x)| \cdot |f(y)|} \leq \epsilon$$

- **Langkah-8**

Ingat! Di **Langkah-3** kita punya persamaan (Persamaan-1), yaitu $\left| \dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{f(y)} \right| = \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|f(x)| \cdot |f(y)|}$.

Dengan demikian, jika kita tetapkan $\gamma = \delta_1$ sebagaimana nilai δ_1 yang muncul di **Langkah-6** dan juga berdasarkan hasil di **Langkah-7**, maka untuk setiap bilangan real $x \in \mathbb{R}$ dan $y \in \mathbb{R}$ yang memenuhi pertidaksamaan $|x - y| < \gamma$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $\left| \dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{f(y)} \right| < \epsilon$.

- **Kesimpulan**

Jika kita tetapkan $\gamma = \delta_1$ sebagaimana nilai δ_1 yang muncul di **Langkah-6**, maka **Pernyataan yang Harus Dibuktikan Kebenarannya** di dalam kotak hijau di atas itu akan berlaku benar.

■

16

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 4 (a)

Soal

Buktikan bahwa terdapat $c \in [0, 1]$ yang memenuhi $c + \tan c = 1$.

Dikerjakan

Mari kita bentuk fungsi real f yang didefinisikan sebagai:

$$f(x) = x + \tan x - 1$$

Dengan demikian, jika ada bilangan real c yang memenuhi persamaan $c + \tan c = 1$, maka bilangan real c tersebut juga akan membuat $f(c)$ bernilai 0.

Selanjutnya, kita akan menentukan domain fungsi f sedemikian sehingga fungsi f terdefinisi dengan baik di domain tersebut. Berhubung soal meminta kita untuk menunjukkan eksistensi bilangan real c yang berada di dalam interval $[0, 1]$, dengan demikian domain fungsi f harus memuat interval $[0, 1]$. Paling tidak, domain fungsi f adalah interval $[0, 1]$ itu sendiri.

Pertanyannya adalah, "Apakah fungsi f terdefinisi dengan baik di interval $[0, 1]$?"

Pertanyaan di atas itu mungkin lebih tepat diubah menjadi, "Apakah fungsi $\tan x$ terdefinisi dengan baik di interval $[0, 1]$?"

Sebagaimana yang kita tahu, secara *default* domain fungsi trigonometri itu adalah himpunan sudut-sudut yang anggota-anggotanya adalah seperti $30°$, $-15°$, $44,51°$ dan lain sebagainya.

Akan tetapi, domain fungsi trigonometri dapat "diganti" menjadi himpunan bilangan real dan dengan demikian akan mempermudah dalam pekerjaan-pekerjaan yang menyangkut Kalkulus. Kita biasa menyebut ini sebagai fungsi trigometri atas radian.

Pada dasarnya, jika x adalah suatu bilangan real, maka nilai dari fungsi.trigonometri(x) akan ekuivalen dengan nilai dari fungsi.trigonometri($\theta°$) untuk suatu sudut $\theta°$. Sebagaimana yang kita tahu, karena berlaku persamaan $360° = 2\pi$, maka untuk sebarang bilangan real x, kita dapat menentukan sudut $\theta°$ yang bersesuaian dengan "rumus" $\theta° = x \cdot \dfrac{360°}{2\pi}$.

Kembali ke soal yang mana meminta kita untuk menunjukkan eksistensi bilangan real c yang berada di dalam interval $[0, 1]$. Jika kita tetapkan bilangan-bilangan real $x_1 = 0$ dan $x_2 = 1$, maka kita dapat menentukan sudut θ_1° dan θ_2° yang bersesuaian dengan x_1 dan x_2 tersebut sedemikian sehingga berlaku persamaan $\tan x_1 = \tan \theta_1^\circ$ dan $\tan x_2 = \tan \theta_2^\circ$.

- $\theta_1^\circ = x_1 \cdot \dfrac{360°}{2\pi} = 0 \cdot \dfrac{360°}{2\pi} = 0°$
- $\theta_2^\circ = x_2 \cdot \dfrac{360°}{2\pi} = 1 \cdot \dfrac{360°}{2\pi} = \dfrac{180\,°}{\pi} \approx 57,3°$

Oke, kita jelas tahu bahwa $\tan 0° = 0$. Akan tetapi, bagaimana cara kita menghitung $\tan 57,3°$?

Nah, ini kita pakai perkiraan saja. Karena sudut $57,3°$ itu lumayan dekat dengan $60°$, maka "mungkin" nilai dari $\tan 57,3°$ lumayan dekat dengan $\tan 60°$. Sebagaimana yang kita tahu, $\tan 60° = \sqrt{3} \approx 1,73$. Ingat bahwa grafik fungsi $\tan x$ itu kontinu dan naik dari $0°$ menuju $60°$. Dengan demikian, kita dapat "mengira-ngira" nilai $\tan 57,3°$ itu sekitar $1,6$.

Ingat! Kita dapat "mengubah" sebarang bilangan real x menjadi bentuk derajat $\theta°$ dengan "rumus" $\theta° = x \cdot \dfrac{360°}{2\pi}$. Jika bilangan real $x \in [0, 1]$, maka akibatnya akan berlaku pertidaksamaan $0° \leq \theta° < 60°$. Karena fungsi $\tan \theta°$ terdefinisi dengan baik untuk $\theta° \in [0°, 60°]$, maka kita dapat menyatakan bahwa fungsi f terdefinisi dengan baik di interval $[0, 1]$. Jadi, kita bisa memilih interval $[0, 1]$ sebagai domain fungsi f.

Secara umum, jika suatu fungsi trigonometri terdefinisi dengan baik di suatu interval I, maka fungsi trigonometri tersebut kontinu pada interval I. Lebih lanjut, karena fungsi $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \tan x$, dan $f_3(x) = 1$ adalah fungsi-fungsi yang kontinu di interval $[0, 1]$, maka kita bisa menyatakan bahwa fungsi $f = f_1 + f_2 - f_3$ juga adalah fungsi yang kontinu di interval $[0, 1]$.

Selanjutnya, ayo kita hitung $f(0)$ dan $f(1)$.

- $f(0) = 0 + \tan 0 - 1 = 0 + 0 - 1 = -1$
- $f(1) = 1 + \tan 1 - 1 = \tan 1 \approx \tan 57,3° \approx 1,6$

Berdasarkan penjabaran dua poin di atas, terlihat bahwa $f(0)$ berupa bilangan real negatif, sementara $f(1)$ adalah bilangan real positif.

Teorema *Location of Roots*

Diketahui fungsi real f kontinu pada interval $[a, b]$ jika $f(a)$ dan $f(b)$ berbeda tanda, maka akan terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga $f(c) = 0$.

Karena fungsi f kontinu di interval $[0, 1]$, maka berdasarkan **Teorema *Location of Roots*** di atas, akan terdapat bilangan real $c \in (0, 1)$ sedemikian sehingga $f(c) = 0$. Dengan kata lain, akan terdapat bilangan real $c \in [0, 1]$ sedemikian sehingga $c + \tan c = 1$.

■

17

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 4 (b)

Soal

Tunjukkan bahwa persamaan $x^4 - x^3 + x - 2 = 0$ memiliki minimal dua solusi.

Dikerjakan

Supaya penyebutannya mudah, kita notasikan polinomial $x^4 - x^3 + x - 2$ sebagai fungsi P atas peubah x, yaitu $P(x) = x^4 - x^3 + x - 2$. Akan tetapi, dalam pembahasan ini, kita akan lebih sering menyebut polinomial $x^4 - x^3 + x - 2$ sebagai P saja.

Selanjutnya, ingat bahwa solusi dari polinomial P adalah bilangan real α yang memenuhi persamaan $P(\alpha) = 0$. Dengan kata lain, solusi dari polinomial P adalah bilangan real α yang memenuhi persamaan $\alpha^4 - \alpha^3 + \alpha - 2 = 0$.

Nah, soal memerintahkan kita untuk **menunjukkan** bahwa terdapat bilangan real α_1 dan α_2 (yang saling berbeda) sedemikian sehingga berlaku persamaan $P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = 0$.

Walaupun bentuk polinomial P terlihat "sederhana", akan tetapi kita tidak akan mencari nilai pasti dari bilangan real α_1 dan α_2 tersebut. Kita akan menggunakan **Pendekatan Kurva** untuk menyelidiki eksistensi dari bilangan real α_1 dan α_2 tersebut.

Omong-omong, setelah sekian tahun lamanya kita belajar matematika, pastilah kita sudah bisa membayangkan seperti apa kira-kira wujud grafik suatu fungsi polinomial. Akan tetapi, pada Pendekatan Kurva ini, kita tidak akan secara detil menggambarkan keseluruhan grafik fungsi polinomial P. Oleh sebab itu, kita tidak terlalu detil menyelidiki hal-hal yang dibutuhkan untuk menggambar grafik sebagaimana yang diajarkan pada mata kuliah Kalkulus I.

Eeeh, sebelumnya, tentu kita sudah paham bahwa fungsi polinomial atas satu peubah adalah fungsi yang kontinu di $\mathbb{R}$. Dengan demikian, nilai $P(r)$ akan selalu terdefinisi dengan baik untuk sebarang $r \in \mathbb{R}$.

Oke!

Kita akan menyelidiki gradien kurva fungsi polinomial P!

Sebagaimana yang kita tahu, gradien sebuah kurva menentukan "kemiringan" kurva tersebut. Gradien sebuah kurva adalah suatu bilangan real. Dengan demikian, gradien sebuah kurva dapat berupa bilangan real negatif, bilangan real positif, atau 0.

Oh iya, secara *"default"* kita asumsikan bahwa kurva fungsi polinomial P "bergerak" dari sumbu X negatif menuju sumbu X positif. Dengan demikian:

- Jika disebut **"kurva fungsi polinomial** P **sedang naik di titik** c**"** itu berarti gradien kurva fungsi polinomial P di titik c adalah bilangan real positif dan terdapat suatu persekitaran V_1 dengan c sebagai titik pusatnya sedemikian sehingga berlaku $f(x_1) \leq f(x_2)$ untuk setiap $x_1, x_2 \in V_1$ dengan $x_1 \leq x_2$.

- Jika disebut **"kurva fungsi polinomial** P **sedang turun di titik** c**"** itu berarti gradien kurva fungsi polinomial P di titik c adalah bilangan real negatif dan terdapat suatu persekitaran V_2 dengan c sebagai titik pusatnya sedemikian sehingga berlaku $f(x_1) \geq f(x_2)$ untuk setiap $x_1, x_2 \in V_2$ dengan $x_1 \leq x_2$.

- Jika disebut **"kurva fungsi polinomial** P **sedang stagnan di titik** c**"** itu berarti gradien kurva fungsi polinomial P di titik c adalah 0 dan terdapat suatu persekitaran V_3 dengan c sebagai titik pusatnya sedemikian sehingga berlaku $f(x_1) = f(x_2)$ untuk setiap $x_1, x_2 \in V_3$ dengan $x_1 \neq x_2$.

Sebagaimana yang kita tahu, jika m adalah gradien kurva fungsi polinomial P di titik c, maka kita bisa menghitung nilai m dengan "rumus" $m = P'(c)$ dengan P' adalah turunan pertama fungsi polinomial P terhadap peubah x. Secara umum, kita dapat membentuk fungsi polinomial P', yaitu fungsi gradien dari fungsi polinomial P sebagaimana berikut.

$$P'(x) = \frac{dP(x)}{dx} = \frac{d(x^4 - x^3 + x - 2)}{dx} = 4x^3 - 3x^2 + 1 = x^2(4x - 3) + 1$$

Nah! Perhatikan bahwa fungsi polinomial P' juga terdefinisi dengan baik di setiap $r \in \mathbb{R}$!

Perhatikan juga bahwa x^2 akan selalu berupa bilangan real positif untuk sebarang bilangan real x.

Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa nilai $P'(x)$ dapat berupa bilangan real positif, bilangan real negatif, atau pun 0 itu akan sangat bergantung pada nilai $4x - 3$.

Well, secara umum, jika sebarang bilangan real x memenuhi pertidaksamaan $4x - 3 > 0$ (yang ekuivalen dengan $x > 3/4$), maka nilai dari $P'(x)$ akan berupa bilangan real positif. Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa fungsi polinomial P memiliki kurva naik untuk titik-titik x yang memenuhi pertidaksamaan $x > 3/4$. Ayo kita nyatakan hal ini sebagai **Hasil-1** berikut.

Hasil-1

Jika x_1 dan x_2 adalah bilangan-bilangan real yang lebih besar dari $3/4$ (dengan kata lain, memenuhi pertidaksamaan $x_1 > 3/4$ dan $x_2 > 3/4$) dan juga memenuhi pertidaksamaan $x_1 < x_2$, maka akan berlaku $P(x_1) < P(x_2)$.

Sekarang, ayo kita hitung $P(100)$ dan $P(-100)$ karena... sepertinya nilai $P(100)$ dan $P(-100)$ itu lumayan besar. Sebab, kan ada suku x^4 di dalam polinomial P.

$$\begin{aligned} P(100) &= (100)^4 - (100)^3 + 10 - 2 \\ &= 100.000.000 - 1.000.000 + 8 \\ &= \text{pokoknya bilangan positif yang nilainya lumayan besar} \quad (\textit{malas ngitung}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(-100) &= (-100)^4 - (-100)^3 + (-10) - 2 \\ &= 100.000.000 - (-1.000.000) - 10 - 2 \\ &= 100.000.000 + 1.000.000 - 12 \\ &= \text{pokoknya bilangan positif yang nilainya lumayan besar} \quad (\textit{malas ngitung}) \end{aligned}$$

Hmmm, sekarang coba kita hitung $P(1)$, $P(-1)$, dan $P(0)$.

$$\begin{aligned} P(1) &= (1)^4 - (1)^3 + 1 - 2 \\ &= 1 - 1 + 1 - 2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^4 - (-1)^3 + (-1) - 2 \\ &= 1 - (-1) - 1 - 2 \\ &= 1 + 1 - 1 - 2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(0) &= (0)^4 - (0)^3 + (0) - 2 \\ &= 0 - 0 + 0 - 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Oke!

Karena bilangan 1 dan 100 kedua-duanya lebih besar dari 3/4 (dengan kata lain, $1 > 3/4$ dan $100 > 3/4$), maka menurut **Hasil-1** kita akan mendapatkan pernyataan sebagaimana berikut.

Hasil-2

Fungsi polinomial P memiliki kurva yang naik dari titik $x = 1$ hingga titik $x = 100$.

Kemudian, berdasarkan penjabaran $P(1)$ dan $P(100)$ di atas, kita akan memperoleh pernyataan berikut.

Hasil-3

Karena $P(1)$ adalah bilangan real negatif dan $P(100)$ adalah bilangan real positif, maka akan berlaku pertidaksamaan $P(1) < 0 < P(100)$.

Nah! Berdasarkan sifat bahwa setiap fungsi polinomial adalah fungsi yang kontinu di $\mathbb{R}$ dan juga **Hasil-2** dan **Hasil-3**, kita dapat menyatakan pernyataan berikut.

Hasil yang Dicari-1

Kurva fungsi polinomial P **pasti** memotong sumbu-X di suatu titik α_1 yang berada di antara 1 dan 100. Akibatnya, **pasti** akan terdapat $\alpha_1 \in (1, 100)$ sedemikian sehingga berlaku persamaan $P(\alpha_1) = 0$.

Oke!

So far, kita sudah menemukan eksistensi bilangan real α_1 yang merupakan solusi dari polinomial P. Selanjutnya, kita akan mencari tahu eksistensi bilangan real α_2.

Hmmm, kira-kira di mana ya α_2 berada?

Nah, jika tadi kita menyelidiki bilangan real $x > 3/4$ yang menyebabkan nilai dari $P'(x) = x^2(4x - 3) + 1$ akan selalu berupa bilangan real positif, maka sekarang kita akan mencari tahu bilangan real x yang seperti apa sedemikian sehingga nilai dari $P'(x)$ akan selalu berupa bilangan real negatif.

Sekali lagi. Berdasarkan penjabaran di halaman-halaman sebelum ini, setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $x > 3/4$ akan mengakibatkan nilai dari $P'(x)$ berupa bilangan real positif (dengan kata lain $P'(x) > 0$).

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (x > 3/4 \implies P'(x) > 0)$$

Nah, boleh jadi kita penasaran, jika bilangan real x memenuhi pertidaksamaan $x < 3/4$, kira-kira nilai $P'(x)$ akan seperti apa ya?

Karena $P'(x) = x^2(4x - 3) + 1$, maka jelas terlihat bahwa $P'(3/4) = P'(0) = 1$. Karena $0 < 3/4$ dan $P'(0) = 1$, maka kita **tidak bisa** menyatakan bahwa setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $x < 3/4$ akan mengakibatkan $P'(x) < 0$. Lha itu, buktinya $P'(0) = 1$. Ini artinya, kurva fungsi polinomial P di titik 0 itu sedang naik.

Hal yang terlintas di benak mungkin akan mencari penyelesaian dari persamaan $P'(x) = 0$ yang ekuivalen dengan $x^2(4x - 3) + 1 = 0$. Akan tetapi, sepertinya ini adalah suatu hal yang sangat membuang-buang waktu. Apalagi, bukan sesuatu yang wajib untuk dilakukan.

Nah, sekarang ayo kita selidiki nilai $P'(-1)$! Karena $P'(0) = 1$, mungkin saja $P'(-1)$ akan berupa bilangan real negatif.

$$\begin{aligned} P'(-1) &= (-1)^2(4 \cdot (-1) - 3) + 1 \\ &= 1 \cdot (-4 - 3) + 1 \\ &= -7 + 1 \\ &= -6 \end{aligned}$$

Oh! Ternyata kurva fungsi polinomial P di titik -1 itu sedang turun karena $P'(-1)$ bernilai negatif!

Akan tetapi, karena $P(-1) = -1$ dan $P(0) = -2$ kedua-duanya adalah bilangan real negatif, maka kita tidak bisa menarik kesimpulan apapun mengenai eksistensi α_2 di dalam interval $(-1, 0)$. Kita mungkin bisa "sedikit" menyimpulkan bahwa terdapat titik $c \in (-1, 0)$ sedemikian sehingga $P'(c) = 0$. Akan tetapi, hal ini tidak banyak membantu kita dalam menyelidiki eksistensi α_2.

Oke! Ayo kita cermati lagi persamaan $P'(x) = x^2(4x - 3) + 1$.

Terus-terang, keberadaan suku $+1$ di ujung itu agak menyulitkan proses pencarian α_2. *Nevertheless*, ayo kita selidiki bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $4x - 3 < -1$. Harapannya, jika x adalah bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan $4x - 3 < -1$, maka $x^2(4x - 3)$ akan menjadi bilangan real negatif yang nilainya lebih besar dari $+1$.

Oke! Jika x adalah bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan $4x - 3 < -1$, maka secara ekuivalen x akan memenuhi pertidaksamaan $x < 1/2$. *Well*, terus terang ini nggak begitu bagus karena bisa jadi akan membuat $x^2(4x - 3) + 1$ bernilai kurang dari 1 ketika $0 < x < 1/2$. Oleh sebab itu, ayo kita selidiki bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $x < -1$. Dengan demikian, jika x adalah bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan $x < -1$, maka akan berlaku $x^2 > 1$ dan $4x - 3 < -7$. Sehingga dengan demikian, jika x adalah bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan $x < -1$, maka akan berlaku $x^2(4x - 3) + 1 < -6$.

Oke, kita dapat jaminan bahwa jika x adalah bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan $x < -1$, maka akan berlaku $P'(x) < -6$. Lebih tepatnya, jika $x = -1$, maka $P'(-1) = (-1)^2(4(-1) - 3) + 1 = -6$. Dengan demikian jika x adalah bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan $x \leq -1$, maka akan berlaku $P'(x) \leq -6$.

Nah, berdasarkan penjabaran di atas dan di halaman-halaman sebelum ini, kita akan punya:

1. $P(-1) = -1$ dan $P'(-1) = -6$
2. $P(-100)$ =bilangan real positif yang lumayan besar dan $P'(-100) < -6$

Naah, berdasarkan dua poin di atas, kita dapat menyimpulkan pernyataan berikut.

Hasil-4

Fungsi polinomial P memiliki kurva yang turun dari titik $x = -100$ hingga titik $x = -1$.

Kemudian, karena nilai $P(-100)$ dan $P(-1)$ saling berbeda tanda, maka kita akan memperoleh pernyataan berikut.

Hasil-5

Karena $P(-100)$ adalah bilangan real positif dan $P(-1)$ adalah bilangan real negatif, maka akan berlaku pertidaksamaan $P(-1) < 0 < P(-100)$.

Nah! Berdasarkan sifat bahwa setiap fungsi polinomial adalah fungsi yang kontinu di $\mathbb{R}$ dan juga **Hasil-4** dan **Hasil-5**, kita dapat menyatakan pernyataan berikut.

Hasil yang Dicari-2

Kurva fungsi polinomial P **pasti** memotong sumbu-X di suatu titik α_2 yang berada di antara -1 dan -100. Akibatnya, **pasti** akan terdapat $\alpha_2 \in (-100, -1)$ sedemikian sehingga berlaku persamaan $P(\alpha_2) = 0$.

Jadi, berdasarkan **Hasil yang Dicari-1** dan **Hasil yang Dicari-2**, eksistensi bilangan real α_1 dan α_2 sedemikian sehingga $\alpha_1 \neq \alpha_2$ dan berlaku $P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = 0$ telah terbukti kebenarannya.

■

18

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 5

Soal

Let $s, t \in \mathbb{R}$ such that $1 < 3s < 3t < 9$.

Show that $\dfrac{|s-t|}{3} < \left|\ln\left(\dfrac{s}{t}\right)\right| < 3|s-t|$.

Dikerjakan

Asli, ini soal bikin ngakak banget. Dulu, pas pertama kali liat soal ini, sempat kepikiran berhari-hari karena nggak nemu-nemu cara buat nyelesaiinnya. Nyari-nyari di internet juga nggak nemu contoh soal yang mirip. Be-te deh. Jadi ya ditinggalin deh! Lebih baik mikir hal-hal berfaedah yang lain. Toh, tulisan yang aku bikin ini kan bukan buat ujian, cuma kerjaan mengisi waktu senggang.

Nah, berbulan-bulan kemudian, *ndilalah* nyoba mikir soal ini lagi. Eh, malah ketemu cara nyelesaiinnya pas lagi nostalgia ndengerin lagu-lagunya Backstreet Boys!

Alhasil, sambil diiringi lagu-lagunya mbak-mbak TWICE (eh?), inilah caraku mengerjakan soal ini.

Pertama-tama, untuk mengerjakan soal ini kita harus tahu dulu ***Mean Value Theorem*** sebagaimana di bawah ini.

Mean Value Theorem

Diketahui f adalah fungsi real yang kontinu di interval tertutup $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
Jika derivatif pertama fungsi f terdefinisi dengan baik di interval (a, b), maka akan terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga berlaku persamaan:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Nah, dengan segala kebingungan yang pernah terjadi beberapa bulan yang lalu itu, kita definisikan fungsi f dengan bentuk yang sangat "sederhana", yaitu $f(x) = \ln(x)$. Selanjutnya, ingat bahwa:

1. Fungsi $\ln x$ hanya akan terdefinisi dengan baik untuk setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $x > 0$. Lebih lanjut, fungsi $\ln(x)$ adalah fungsi yang kontinu di interval $(0, +\infty)$. Dengan demikian, jika kita tetapkan bilangan real positif a dan b yang memenuhi pertidaksamaan $0 < a < b$, maka fungsi $\ln(x)$ akan kontinu di interval $[a, b]$.

2. Derivatif pertama fungsi $\ln(x)$ adalah $\dfrac{1}{x}$. Derivatif pertama tersebut juga terdefinisi dengan baik di interval $(0, +\infty)$. Dengan demikian, jika kita tetapkan bilangan real positif a dan b yang memenuhi pertidaksamaan $0 < a < b$, maka fungsi $\dfrac{1}{x}$ akan kontinu di interval $[a, b]$.

Selanjutnya, berdasarkan ***Mean Value Theorem*** dan dua poin di atas, jika kita tetapkan $f(x) = \ln(x)$, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut.

Hasil-1

Diketahui fungsi $f(x) = \ln(x)$ adalah fungsi real yang kontinu di interval tertutup $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dengan $0 < a < b$.
Berdasarkan ***Mean Value Theorem***, akan terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga berlaku persamaan:

$$\frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} = \frac{1}{c}.$$

Selanjutnya, pada soal diketahui pertidaksamaan $1 < 3s < 3t < 9$. Perhatikan bahwa pertidaksamaan ini ekuivalen dengan pertidaksamaan $\frac{1}{3} < s < t < 3$. Perhatikan bahwa s dan t pada pertidaksamaan tersebut adalah bilangan real positif.

Nah, jika kita tetapkan $a = s$ dan $b = t$, maka **Hasil-1** di atas akan berubah menjadi seperti ini.

Hasil-2

Diketahui fungsi $f(x) = \ln(x)$ adalah fungsi real yang kontinu di interval tertutup $[s, t] \subset \mathbb{R}$ dengan $0 < s < t$.
Berdasarkan ***Mean Value Theorem***, akan terdapat $c \in (s, t)$ sedemikian sehingga berlaku persamaan:

$$\frac{\ln(t) - \ln(s)}{t - s} = \frac{1}{c}.$$

Perhatikan!

Karena berlaku pertidaksamaan $\frac{1}{3} < s < t < 3$, maka kita bisa menyatakan bahwa $(s, t) \subset \left(\frac{1}{3}, 3\right)$.

Dengan demikian, berdasarkan **Hasil-2** di atas, karena $c \in (s, t)$, maka akan berlaku $c \in \left(\frac{1}{3}, 3\right)$.

Perhatikan! Karena $c \in \left(\frac{1}{3}, 3\right)$, maka akan berlaku juga $\frac{1}{c} \in \left(\frac{1}{3}, 3\right)$.

Berdasarkan **Hasil-2**, kita punya persamaan $\frac{\ln(t) - \ln(s)}{t - s} = \frac{1}{c}$.

Karena $\frac{1}{c} \in \left(\frac{1}{3}, 3\right)$, maka kita bisa menyatakan bahwa $\frac{\ln(t) - \ln(s)}{t - s} \in \left(\frac{1}{3}, 3\right)$.

Karena $\frac{\ln(t) - \ln(s)}{t - s} \in \left(\frac{1}{3}, 3\right)$, maka itu artinya berlaku pertidaksamaan $\frac{1}{3} < \frac{\ln(t) - \ln(s)}{t - s} < 3$.
Akibatnya, $\frac{\ln(t) - \ln(s)}{t - s}$ adalah bilangan real positif.

Karena $\frac{\ln(t) - \ln(s)}{t - s}$ merupakan bilangan real positif, maka akan berlaku persamaan:

$$\frac{\ln(t) - \ln(s)}{t - s} = \left|\frac{\ln(t) - \ln(s)}{t - s}\right| = \frac{|\ln(t) - \ln(s)|}{|t - s|} = \frac{|\ln(s) - \ln(t)|}{|s - t|}$$

Karena berlaku:

- persamaan $\dfrac{\ln(t) - \ln(s)}{t - s} = \dfrac{|\ln(s) - \ln(t)|}{|s - t|}$,
- dan juga pertidaksamaan $\dfrac{1}{3} < \dfrac{\ln(t) - \ln(s)}{t - s} < 3$,

maka kita bisa menyimpulkan bahwa berlaku pertidaksamaan:

$$\frac{1}{3} < \frac{|\ln(s) - \ln(t)|}{|s - t|} < 3$$

yang ekuivalen dengan pertidaksamaan:

$$\frac{1}{3} \cdot |s - t| < |\ln(s) - \ln(t)| < 3 \cdot |s - t|$$

Ya sudah. Selesai toh?

Kalau mau pertidaksamaannya mirip dengan soal, substitusikan saja $\ln(s) - \ln(t)$ dengan $\ln\left(\dfrac{s}{t}\right)$. Kan di bangku sekolah kita sudah diajari sifat logaritma bahwasanya $\ln(s) - \ln(t) = \ln\left(\dfrac{s}{t}\right)$.

$\blacksquare$