Aku Mau Coba
Mengerjakan & Membahas
Ujian Tengah Semester & Ujian Akhir Semester

Pengantar Analisis 1

Semester Genap 2020/2021

Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Gadjah Mada

Mawi Wijna

Yogyakarta, 2022

Daftar Isi

Siapa Aku?

Halo!

Kenalin, nama aku Wijna.
Sering juga dipanggil Wisna.
Jarang-jarang dipanggil Mawi.

Aku dulu pernah jadi mahasiswa matematika UGM. Maksudnya, aku dulu itu pernah kuliah di Program Studi Matematika FMIPA UGM. Masuk September 2004. Lulus Februari 2009. Info lebih lanjut, *googling* saja namaku di Google.

Oh ya, kenapa aku kurang kerjaan bikin tulisan ini?

Sekadar pemberitahuan. Tulisan ini aku buat dalam rangka **mengisi waktu luang**. Berhubung si *bocil* kalau makan sukanya diemut, jadi ya iseng-iseng aku mengerjakan soal ujian sambil menunggu rongga mulutnya kosong lagi. Itu pun kalau aku sedang bosan membuka *manga online*, *marketplace*, *Instagram*, dan kawan-kawannya.

Jadi ya, sebetulnya tulisan ini hanyalah sebatas alih digital dari hasil *orat-oret* di sebarang kertas kosong di tengah proses menyuapi makan seorang *bocil*. Pengalihan ke format LaTeXaku lakukan sembari menunggu azan subuh berkumandang atau ketika *weekend* hanya di rumah saja. Sebagian besar *orat-oret* ini tercipta semasa Covid-19 masih mewabah.

Eh, sebelumnya, aku mohon maaf jikalau tulisan ini lebih banyak memuat hal-hal yang salah daripada hal-hal yang benarnya. Maklum, namanya juga sudah belasan tahun yang lalu jadi mahasiswa matematika. Jadi ya, mohon maaf kalau lupa-lupa ingat. Walaupun aku tetap berhati-hati dalam menulis supaya tidak terjadi cacat logika.

Terus terang, hampir sebagian besar isi tulisan ini aku sadur dari berbagai macam sumber di internet seperti math.stackexchange.com, Quora, dan Reddit. Jadi, aku bukan orang pintar nan jenius yang bisa mengerjakan semua soal ujian dengan lancar. Seperti, yang aku bilang tadi, aku cuma iseng mengerjakan soal ujian, mengalihkan *orat-oret* di kertas ke format LaTeX, kemudian meng-*upload*-nya ke jagat maya.

Ya, sudahlah. Bagian pengantar ini nggak usah panjang-panjang. Semoga ada yang bisa dipelajari dari tulisan ini. Semoga tulisan ini bisa menjadi bahan pelajaran buat aku, jika di waktu tuaku nanti aku mulai lupa dengan apa-apa yang aku pelajari semasa kuliah.

Oh yes! Last but not least, *matur nuwun* kepada teman-teman di HIMATIKA FMIPA UGM yang sudah menyediakan sumber soal-soal ujian yang bisa diakses secara cuma-cuma di *website* mereka, himatika.fmipa.ugm.ac.id.

Ah... somehow I felt nostalgic....

Diketik sambil diiringi OST-nya NieR.

Pengantar Analisis (Real) 1 Buat Aku

Pas zamanku kuliah (tahun 2004 s.d. 2009 silam), Pengantar Analisis (Real) 1 itu adalah mata kuliah wajib berbobot 2 SKS yang diselenggarakan pada semester 5 Program Studi Matematika FMIPA UGM. Aku sempat mengulang mata kuliah ini pada semester 9, semester terakhirku kuliah di UGM. Biasalah, memperbaiki nilai dari C menjadi A.

Dari semua mata kuliah bidang analisis, aku paling suka dengan mata kuliah Pengantar Analisis (Real) ini. Mungkin mata kuliah ini terasa mirip seperti mata kuliah Pengantar Logika Matematika dan Himpunan yang diberi bumbu analisis.

Heee... kalau boleh jujur, aku lebih senang dengan mata kuliah yang berkutat dengan pembuktian-pembuktian teorema daripada harus menghitung-hitung angka secara rinci dan teliti.

Masalah-masalah pembuktian teorema/sifat yang diajarkan di mata kuliah Pengantar Analisis (Real) 1 ini akan terasa "mudah" ketika kita sudah menguasai mata kuliah Pengantar Logika Matematika dan Himpunan dan Pengantar Struktur Aljabar. Beberapa "trik" untuk membantu proses pembuktian dapat kita peroleh dari mata kuliah Kalkulus 1. Tidak ketinggalan, mata kuliah Pengantar Topologi bisa membantu kita untuk "merasakan" bahwa teorema/sifat dalam lingkup sistem bilangan real itu *"make sense"*, walaupun umumnya mata kuliah Pengantar Topologi itu diselenggarakan pada semester lanjut.

Aku lupa-lupa ingat siapa dosen pengampu mata kuliah Pengantar Analisis (Real) 1 saat aku kuliah dahulu. Antara Pak Yusuf atau almarhumah Bu Ndaru. Oh ya, karena menyinggung almarhumah Bu Ndaru, kalau tidak sibuk, mungkin aku juga bakal membuat tulisan tentang ujian mata kuliah Pengantar Topologi.

Oke deh! Sebagai penutup, semoga tulisan ini membawa manfaat. Walaupun aku yakin kalau tulisan ini lebih banyak salahnya daripada benarnya. Maklum, kan sudah belasan tahun yang lalu jadi mahasiswa matematika. Jadi ya, mohon maaf kalau lupa-lupa ingat atau salah ketik notasi.

Aku nggak tahu apakah benar-benar ada orang yang membaca tulisan ini. Semisal Anda yang membaca tulisan ini adalah mahasiswa, aku doakan semoga Anda mendapat pencerahan dan sukses berkuliah. Semisal Anda yang membaca tulisan ini penasaran dengan soal-soal ujian kuliah matematika, aku harap Anda tidak *shock* dan bisa memahami tulisan ini dengan baik. Semisal Anda yang membaca tulisan ini hanya sekadar mengisi waktu luang, aku sarankan untuk membaca tulisan ini sebagai kawan *ngendog* di toilet.

Semoga tulisan ini bermanfaat bagi mahasiswa matematika. Khususnya mahasiswa yang kesulitan dan kebingungan memahami mata kuliah Pengantar Analisis (Real) 1 dan sungkan bertanya ke dosen atau kakak tingkat. Tulisan ini bisa diunduh secara cuma-cuma dan diam-diam. Silakan *googling* namaku untuk menemukan lebih banyak tulisan sejenis ini untuk beragam mata kuliah lain.

Akhir kata, selamat menikmati tulisan ini!

Yogyakarta, 2022
Wihikan "Mawi" Wijna

1

Soal-Soal Ujian Tengah Semester

1. Diketahui $A = \left\{1 - \frac{1}{n} \; : \; n \in \mathbb{N}\right\}$. Buktikan supremum himpunan A adalah 1 !

2. Diketahui $E \subseteq \mathbb{R}$ dan E' adalah koleksi semua titik limit himpunan E. Jika $x \in E'$ tunjukkan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$, $N_\epsilon(x)$ memuat tak hingga banyak elemen dari E.

3. (a) Jika barisan (x_n) terbatas dan barisan (y_n) konvergen ke 0, buktikan barisan $(x_n \cdot y_n)$ konvergen ke 0 !

   (b) Tunjukkan barisan $(\sqrt[n]{n})$ konvergen dan tentukan limit barisannya !

4. Diketahui $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Tunjukkan barisan (x_n) naik dan terbatas ke atas!

   (b) Tentukan $\sup\{x_n \; : \; n \in \mathbb{N}\}$!

5. Menggunakan definisi limit fungsi, tunjukkan bahwa:

   a. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - x - 3}{x + 2}\right) = -1$ b. $\lim\limits_{x \to c} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{c}}, \forall c > 0.$

6. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   (a) Suppose there exist constants L and $K > 0$ such that

   $$|f(x) - L| \leq K|x - c|, \text{ for } x \in \mathbb{R}$$

   Show that $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$!

   (b) If $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = L$ and $a > 0$, show that $\lim\limits_{x \to 0} f(ax) = L$!

2

Soal-Soal Ujian Akhir Semester

1. (a) Jika $E = \{x \ : \ x^2 - 4 < 3x\}$, tunjukkan E terbatas! Selanjutnya, tentukan $\sup(E)$ dan $\inf(E)$!

   (b) Diberikan himpunan terbatas dan tak kosong $A, B \subset \mathbb{R}$. Tunjukkan $A \cap B$ terbatas! Selanjutnya, tentukan $\sup(A \cap B)$ dan $\inf(A \cap B)$!

2. Diberikan barisan-barisan (x_n) dan (y_n).
   Diketahui $x_n, \ y_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ keduanya konvergen, selidiki apakah $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$ juga konvergen! Jelaskan jawaban Saudara!

3. Show that $A \subset \mathbb{R}$ is closed if and only A contains all of its limit point.

4. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(x + y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.
   Jika $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ada, tunjukkan:

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

   (b) $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ ada untuk setiap $c \in \mathbb{R}$.

5. (a) Jika fungsi $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ kontinu dan $g(0) = g(1)$, tunjukkan ada $c \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ sehingga $g(c) = g\left(c + \dfrac{1}{2}\right)$.

   (b) Tunjukkan $x^4 + 7x^2 - 9 = 0$ sekurang-kurangnya mempunyai 2 akar real !

3

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 1

Soal

Diketahui $A = \left\{1 - \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$. Buktikan supremum himpunan A adalah 1 !

Dikerjakan

Sebetulnya, ada banyak cara untuk menjawab soal ini. Tapi, kali ini kita pakai cara yang paling umum saja. Kita akan menggunakan sifat berikut untuk menunjukkan bahwa 1 adalah supremum himpunan A.

> **Supremum**
>
> Diketahui himpunan $A \subset \mathbb{R}$ dan $s \in \mathbb{R}$.
>
> Bilangan real s disebut sebagai supremum himpunan A jika dan hanya jika memenuhi 2 kondisi berikut.
>
> 1. Untuk setiap $a \in A$ berlaku pertidaksamaan $a \leq s$.
> 2. Untuk sebarang bilangan real positif ϵ berlaku $s - \epsilon$ bukan batas atas himpunan A.

Pertama-tama, karena $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$, maka syarat keanggotaan himpunan A bisa didefinisikan ulang menjadi:

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan bahwa:

- Bilangan 0 termuat di himpunan A (untuk $n = 1$).
- Semua elemen himpunan A adalah bilangan real positif.
- Untuk sebarang $a \in A$ akan berlaku $0 \leq a < 1$.
- Bilangan 1 tidak termuat di himpunan A.

Perhatikan! Untuk sebarang bilangan asli n, jelas akan berlaku pertidaksamaan $n > n - 1$. Perhatikan juga bahwa n juga bisa dipandang sebagai bilangan real positif. Akibatnya, $\frac{1}{n}$ juga adalah bilangan real positif.

Nah, jika kita mengalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{n}$, maka kita akan mendapatkan pertidaksamaan:

$$\frac{n}{n} \ > \ \frac{n-1}{n}$$

yang ekuivalen dengan:

$$\frac{n-1}{n} \ < \ 1$$

Berdasarkan pertidaksamaan di atas, karena n adalah sebarang bilangan asli, maka kita dapat menyatakan bahwa 1 adalah batas atas himpunan A.

***

Selanjutnya, kita akan menunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan real positif ϵ akan berlaku $1-\epsilon$ bukan batas atas himpunan A.

Perhatikan! Karena ϵ dan 1 adalah bilangan-bilangan real positif, maka menurut ***Archimedean Property*** akan terdapat bilangan asli n' sedemikian sehingga berlaku $\epsilon \cdot n' > 1$. Pertidaksamaan ini ekuivalen dengan:

$$\begin{aligned}
\epsilon \cdot n' > 1 \quad &\iff \quad \epsilon > \frac{1}{n'} \\
&\iff \quad \epsilon > \frac{n' - n' + 1}{n'} \\
&\iff \quad \epsilon > \frac{n'}{n'} - \frac{n' - 1}{n'} \\
&\iff \quad \epsilon > 1 - \frac{n' - 1}{n'} \\
&\iff \quad \frac{n' - 1}{n'} > 1 - \epsilon \\
&\iff \quad 1 - \epsilon \; < \; \frac{n' - 1}{n'}
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita dapat menyatakan bahwa untuk sebarang bilangan real positif ϵ, akan selalu ada bilangan asli n' sedemikian sehingga berlaku $1 - \epsilon \; < \; \dfrac{n'-1}{n'}$.

Dengan kata lain, kita dapat menyatakan bahwa untuk sebarang bilangan real positif ϵ, akan selalu terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga berlaku $1 - \epsilon \; < \; a$.

Dengan demikian, untuk sebarang bilangan real positif ϵ, kita dapat menyatakan bahwa $1 - \epsilon$ bukan batas atas himpunan A.

Jadi, menurut sifat **Supremum** di atas, kita dapat menyatakan bahwa 1 adalah supremum himpunan $A = \left\{ \dfrac{n-1}{n} \; : \; n \in \mathbb{N} \right\}$.

■

4

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 2

Soal

Diketahui $E \subseteq \mathbb{R}$ dan E' adalah koleksi semua titik limit himpunan E. Jika $x \in E'$ tunjukkan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$, $N_\epsilon(x)$ memuat tak hingga banyak elemen dari E.

Dikerjakan

Pertama-tama, kita paparkan dulu definisi $N_\epsilon(x)$. Mungkin, ada Pembaca yang belum terlalu akrab dengan $N_\epsilon(x)$.

Yang jelas, $N_\epsilon(x)$ itu adalah himpunan, yang definisinya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} N_\epsilon(x) &= \{r \in \mathbb{R} \mid |r - x| < \epsilon\} \\ &= \{r \in \mathbb{R} \mid -\epsilon < r - x < \epsilon\} \\ &= \{r \in \mathbb{R} \mid x - \epsilon < r < x + \epsilon\} \end{aligned}$$

Himpunan $N_\epsilon(x)$ umum disebut sebagai persekitaran (*neighborhood*) dari titik x dengan radius ϵ.

Perhatikan! Berdasarkan definisi himpunan $N_\epsilon(x)$ di atas, akan berlaku $x \in N_\epsilon(x)$.

Nah! Selanjutnya, ayo ingat definisi terkait himpunan terbuka dan tertutup berikut.

Himpunan Terbuka dan Tertutup

Himpunan bagian $A \subseteq \mathbb{R}$ disebut sebagai **himpunan terbuka (*open set*)** jika dan hanya jika untuk setiap $a \in A$ terdapat persekitaran V sedemikian sehingga berlaku $a \in V \subseteq A$.

Himpunan bagian $B \subseteq \mathbb{R}$ disebut sebagai **himpunan tertutup (*closed set*)** jika dan hanya jika himpunan B^c adalah himpunan terbuka.

Nah! Nah! Nah!

Berdasarkan definisi di atas, kita bisa menyatakan bahwa:

- Setiap persekitaran di $\mathbb{R}$ adalah himpunan terbuka.
- Untuk sebarang $x \in \mathbb{R}$, himpunan $\{x\}$ adalah himpunan tertutup.

Sebetulnya, dua pernyataan di atas itu bisa dibuktikan. Tapi, kali ini kita *skip* saja pembuktiannya.

Sebagai pelengkap, kita paparkan definisi titik limit.

Titik Limit

Diketahui himpunan $E \subseteq \mathbb{R}$.

Elemen x adalah titik limit himpunan E jika dan hanya jika untuk sebarang himpunan terbuka O yang memuat x akan berlaku:

$$(E \cap O) - \{x\} \neq \emptyset$$

Dengan kata lain, elemen x adalah titik limit himpunan E jika dan hanya jika setiap himpunan terbuka O yang memuat x juga memuat elemen lain dari himpunan E dan elemen tersebut berbeda dari x.

***

Oke! Kembali ke soal!

Pertama-tama, kita ambil sebarang bilangan real positif ϵ dan juga sebarang $x \in E'$. Dengan demikian, akan berlaku:

- Persekitaran $N_\epsilon(x)$ adalah himpunan terbuka. Eh iya, supaya mudah, kita akan menyebut $N_\epsilon(x)$ sebagai V.
- Elemen x adalah titik limit himpunan E.

Selanjutnya, kita akan menunjukkan kebenaran dari pernyataan:

> Jika x adalah titik limit himpunan E, maka persekitaran V memuat tak hingga banyak elemen dari E.

dengan metode ***Reductio ad Absurdum***. Caranya, kita akan mengandaikan bahwa ingkaran pernyataan di atas, yaitu:

> Diketahui x adalah titik limit himpunan E dan persekitaran V memuat berhingga banyak elemen dari E.

berlaku benar. Kemudian, kita akan melakukan serangkaian penalaran logis pada ingkaran pernyataan tersebut sehingga (semoga) pada akhirnya akan memunculkan kontradiksi. Dengan demikian, kita dapat menyatakan bahwa pernyataan yang berlaku benar adalah pernyataan awal.

Oke! Kita asumsikan bahwa pernyataan ini:

> Diketahui x adalah titik limit himpunan E dan persekitaran V memuat berhingga banyak elemen dari E.

berlaku benar. Dengan demikian, akan terdapat elemen-elemen $e_1, e_2, e_3, ..., e_n \in E$ sedemikian sehingga berlaku $\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\} \subset V$. Camkan baik-baik! Elemen-elemen di himpunan E yang termuat di persekitaran V **hanyalah** $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$.

Karena x adalah titik limit himpunan E dan persekitaran V adalah himpunan terbuka, maka berdasarkan definisi titik limit, persekitaran V akan memuat elemen dari himpunan E dan elemen tersebut berbeda dari x.

Ingat! Sebagaimana yang sudah dipaparkan di atas, elemen-elemen di himpunan E yang termuat di persekitaran V **hanyalah** $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$. Karena x adalah titik limit himpunan E, maka elemen-elemen e_i tersebut tidak sama dengan x, yaitu $e_1 \neq x$, $e_2 \neq x$, $e_3 \neq x$, ..., $e_n \neq x$.

Selanjutnya, berdasarkan sifat di dalam kotak abu-abu di atas, himpunan $\{e_1\}$, $\{e_2\}$, $\{e_3\}$, hingga $\{e_n\}$ adalah himpunan-himpunan tertutup.

Karena berlaku sifat bahwa *union* berhingga dari himpunan-himpunan tertutup juga adalah himpunan tertutup, maka:

$$\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup ... \cup \{e_n\} \;=\; \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$$

adalah himpunan tertutup. Akibatnya, $\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}^{\mathrm{c}}$ adalah himpunan terbuka. Karena $e_1 \neq x$, $e_2 \neq x$, $e_3 \neq x$, ..., $e_n \neq x$, maka pasti berlaku $x \in \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}^{\mathrm{c}}$

Perhatikan! Karena persekitaran V adalah himpunan terbuka dan berlaku sifat bahwa irisan dua himpunan terbuka juga adalah himpunan terbuka, maka:

$$V \cap \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}^{\mathrm{c}}$$

adalah himpunan terbuka.

Nah ini!

Perhatikan bahwa $V \cap \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}^{\mathrm{c}}$ adalah himpunan terbuka yang memuat x. Sebab, $x \in V$ dan $x \in \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}^{\mathrm{c}}$.

Berdasarkan definisi titik limit di atas, karena x adalah titik limit himpunan E, maka himpunan $V \cap \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}^{\mathrm{c}}$ akan memuat elemen dari himpunan E dan elemen tersebut berbeda dari x.

Sebagaimana yang sudah dipaparkan di atas, elemen-elemen dari himpunan E yang termuat di persekitaran V **hanyalah** $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$. Elemen-elemen tersebut juga berbeda dari x.

Akan tetapi, elemen-elemen $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ tersebut **tidak termuat** di dalam himpunan $\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}^{\mathrm{c}}$! Seharusnya kan elemen-elemen tersebut juga termuat di himpunan $\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}^{\mathrm{c}}$.

Nah lho!

Ini memunculkan **kontradiksi**, karena diketahui x adalah titik limit himpunan E.

Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa pernyataan:

Diketahui x adalah titik limit himpunan E dan persekitaran V memuat berhingga banyak elemen dari E.

adalah **salah**! Jadi, pernyataan yang benar adalah:

Jika x adalah titik limit himpunan E, maka persekitaran V memuat tak hingga banyak elemen dari E.

■

5

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 3 (a)

Soal

Jika barisan (x_n) terbatas dan barisan (y_n) konvergen ke 0, buktikan barisan $(x_n \cdot y_n)$ konvergen ke 0 !

Dikerjakan

Oke! Mari kita paparkan dulu apa-apa yang diketahui!

- Karena barisan (x_n) terbatas, maka terdapat bilangan real positif M sedemikian sehingga berlaku $|x_n| \leq M$ untuk setiap bilangan asli n.
- Karena barisan (y_n) konvergen ke 0, maka untuk sebarang bilangan real postif ϵ akan bisa ditetapkan suatu bilangan asli N sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli i yang lebih besar dari N $(i > N)$ akan berlaku $|y_i| < \epsilon$.

Nah, untuk menunjukkan bahwa barisan $(x_n \cdot y_n)$ konvergen ke 0, maka kita harus menunjukkan kebenaran pernyataan di bawah ini.

> Jika diberikan sebarang bilangan real postif ϵ, maka kita dapat menetapkan suatu bilangan asli K sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli i yang lebih besar dari K $(i > K)$ akan berlaku $|x_i \cdot y_i| < \epsilon$.

- **Langkah-1**

Kita ambil sebarang bilangan real positif ϵ_0.

- **Langkah-2**

Perhatikan bentuk $|x_i \cdot y_i|$! Menggunakan sifat harga mutlak, akan diperoleh persamaan berikut.

$$|x_i \cdot y_i| = |x_i| \cdot |y_i| \qquad (*1)$$

Karena (x_n) terbatas, maka terdapat bilangan real positif M sedemikian sehingga berlaku $|x_n| \leq M$ untuk setiap bilangan asli n. Dengan demikian akan berlaku pertidaksamaan:

$$|x_i| \cdot |y_i| \leq M \cdot |y_i| \qquad (*2)$$

- **Langkah-3**

Karena M dan ϵ_0 adalah bilangan-bilangan real positif, maka $\frac{\epsilon_0}{M}$ juga adalah bilangan real positif.

Karena barisan (y_n) konvergen ke 0, maka untuk bilangan real postif $\frac{\epsilon_0}{M}$ akan bisa ditetapkan suatu bilangan asli N_1 sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli i yang lebih besar dari N_1 $(i > N_1)$ akan berlaku $|y_i| < \frac{\epsilon_0}{M}$.

- **Langkah-4**

Jika kita tetapkan bilangan asli $K = N_1$, maka untuk setiap bilangan asli i yang lebih besar dari K $(i > K)$ akan berlaku pertidaksamaan:

$$M \cdot |y_i| < M \cdot \frac{\epsilon_0}{M}$$

yang ekuivalen dengan pertidaksamaan:

$$M \cdot |y_i| < \epsilon_0$$

Dengan merujuk pada pertidaksamaan (*2) di **Langkah-2**, akan berlaku pertidaksamaan:

$$|x_i| \cdot |y_i| < \epsilon_0$$

Ditambah lagi, dengan merujuk pada pertidaksamaan (*1) di **Langkah-2**, akan berlaku pertidaksamaan:

$$|x_i \cdot y_i| < \epsilon_0$$

- **Kesimpulan**

Jika diberikan sebarang bilangan real postif ϵ, maka kita dapat menetapkan suatu bilangan asli K dengan rumus $K = N_1$ sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli i yang lebih besar dari K $(i > K)$ akan berlaku $|x_i \cdot y_i| < \epsilon$.

Bilangan asli N_1 yang dimaksud adalah sebagaimana yang sudah dipaparkan di **Langkah-3**.

■

6

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 3 (b)

Soal

Tunjukkan barisan $(\sqrt[n]{n})$ konvergen dan tentukan limit barisannya !

Dikerjakan

Secara *feeling* sih... barisan $(\sqrt[n]{n})$ itu sepertinya konvergen ke 0.

Tapi itu **SALAH!**

Jadi, kalau kita membuktikan barisan $(\sqrt[n]{n})$ konvergen ke 0, apalagi pakai **Teorema *Squeeze***, itu ya salah besar!

Jadi, bagaimana dong?

Jujur ya, aku merasa kalau soal ini sebetulnya lumayan susah. Level kesusahannya 7 dari 10 lah.

Intinya, soal ini **tidak bisa lancar dikerjakan** dengan hanya bermodalkan hapalan catatan kuliah ataupun hapalan buku-buku teks kuliah. Supaya lancar mengerjakan soal ini dibutuhkan wawasan yang cukup luas perihal contoh-contoh permasalahan analisis real.

Jujur, inspirasi penyelesaian soal ini aku dapatkan dari pembahasan di internet. Soal ini lumayan susah untuk aku yang sudah lama tidak belajar analisis real.

Untuk mengerjakan soal ini, kita harus tahu beberapa karakteristik unik barisan $(\sqrt[n]{n})$. Misalnya, barisan $(\sqrt[n]{n})$ itu bukan barisan monoton dan memiliki titik absolut maksimum.

Dengan karakteristik yang unik itu, barisan $(\sqrt[n]{n})$ sebetulnya adalah barisan yang terbatas. Lebih tepatnya, barisan $(\sqrt[n]{n})$ itu terbatas ke bawah oleh 1 dan terbatas ke atas oleh 2. Sebagaimana yang sudah kita pelajari, karena barisan $(\sqrt[n]{n})$ terbatas, maka barisan $(\sqrt[n]{n})$ adalah barisan yang konvergen.

Kita bisa menunjukkan keterbatasan barisan $(\sqrt[n]{n})$ dengan cara menunjukkan (dengan induksi matematika) bahwa berlaku pertidaksamaan $1 \leq n$ dan $n \leq 2^n$ untuk setiap bilangan asli n. Demi ringkasnya tulisan, pembuktian hal ini tidak dijelaskan.

Nah, kan kita sudah tahu bahwa barisan $(\sqrt[n]{n})$ itu adalah barisan yang konvergen. Karenanya, sudah jelas, pasti bakal terlontar pertanyaan:

Barisan $(\sqrt[n]{n})$ konvergen ke apa?

Lha, ya mau bagaimana lagi?

Pertanyaan di atas itu adalah pertanyaan yang sangat lumrah ditanyakan. Semata-mata karena manusia adalah makhluk penasaran yang ingin kejelasan yang sejelas-jelasnya. Terutama para dosen mata kuliah Pengantar Analisis yang ingin kejelasan apakah mahasiswa yang diajarnya sudah memahami konsep limit barisan bilangan real.

Nah, untuk menjawab pertanyaan di atas, kita sudah harus tahu dulu bahwa barisan $(\sqrt[n]{n})$ itu konvergen ke 1.

Lha, kok bisa barisannya konvergen ke 1?

Ya, seperti yang aku bilang tadi. Dibutuhkan wawasan yang cukup luas perihal contoh-contoh permasalahan analisis real supaya lancar mengerjakan soal ini. Nggak cukup jika hanya bermodalkan hapalan catatan kuliah ataupun hapalan buku-buku teks kuliah. Kecuali soal ini sudah pernah dijelaskan oleh bapak/ibu dosen, menjadi tugas kuliah, atau dibahas di buku teks.

Oke! Untuk menunjukkan bahwa barisan $(\sqrt[n]{n})$ itu konvergen ke 1, maka kita harus menunjukkan kebenaran pernyataan berikut.

> Jika diberikan sebarang bilangan real postif ϵ, maka kita dapat menentukan suatu bilangan asli K sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli i yang lebih besar dari K $(i > K)$ akan berlaku $|\sqrt[i]{i} - 1| < \epsilon$.

Berikut ini adalah langkah-langkahnya.

- **Langkah-1**

Kita ambil sebarang bilangan real positif ϵ_0.

- **Langkah-2**

Perhatikan pertidaksamaan $|\sqrt[i]{i} - 1| < \epsilon_0$! Kita bisa "mengubah" bentuk pertidaksamaan tersebut menjadi seperti ini.

$$\begin{aligned} |\sqrt[i]{i} - 1| < \epsilon_0 &\iff \sqrt[i]{i} - 1 < \epsilon_0 \quad (*) \\ &\iff \sqrt[i]{i} < \epsilon_0 + 1 \\ &\iff (\sqrt[i]{i})^i < (1 + \epsilon_0)^i \\ &\iff i < (1 + \epsilon_0)^i \end{aligned}$$

Catatan (*):
Bisa seperti ini, karena barisan $(\sqrt[n]{n})$ itu terbatas ke bawah oleh 1. Oleh sebab itu, $\sqrt[i]{i} - 1$ selalu berupa bilangan real positif.

Berdasarkan penjabaran di atas, kita memperoleh hasil bahwa pertidaksamaan $|\sqrt[i]{i} - 1| < \epsilon_0$ ekuivalen dengan $i < (1 + \epsilon_0)^i$.

- **Langkah-3**

Karena i adalah bilangan asli, maka kita dapat menjabarkan $(1+\epsilon_0)^i$ menggunakan **ekspansi binomial Newton** seperti berikut.

$$(1+\epsilon_0)^i \;=\; \binom{i}{0}\cdot 1^i\cdot\epsilon^0+\binom{i}{1}\cdot 1^{(i-1)}\cdot\epsilon+\binom{i}{2}\cdot 1^{(i-2)}\cdot\epsilon^2+\ldots+\binom{i}{i}\cdot 1^0\cdot\epsilon^i$$

Persamaan di atas ekuivalen dengan:

$$(1+\epsilon_0)^i \;=\; 1+i\cdot\epsilon+\frac{i(i-1)}{2!}\cdot\epsilon^2+\ldots+\binom{i}{i}\cdot 1^0\cdot\epsilon^i$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(1+\epsilon_0)^i \;=\; 1+i\cdot\epsilon+\frac{i^2-i}{2}\cdot\epsilon^2+\ldots+\binom{i}{i}\cdot 1^0\cdot\epsilon^i$$

- **Langkah-4**

Ingat! **Misi utama** kita adalah menentukan suatu bilangan asli K sedemikian sehingga pernyataan di dalam kotak hijau di atas itu berlaku benar untuk setiap bilangan asli i yang lebih besar dari K $(i > K)$.

Perhatikan bahwa sebesar apapun bilangan asli K yang (semoga saja) nantinya kita tentukan, bilangan asli i tentu akan bisa jauh lebih besar dari K. Bilangan asli i akan menuju ke tak berhingga (*infinity*).

Nah, jika bilangan asli i bernilai sangat besar menuju ke tak berhingga, maka jelas nilai dari i^2 akan sangat jauh lebih besar dari i. Ya nggak?

Dengan demikian, jika bilangan asli i bernilai sangat besar menuju ke tak berhingga, maka jelas nilai dari i^2-i akan sangat jauh lebih besar dari i. Ya nggak?

Dengan demikian, jika bilangan asli i bernilai sangat besar menuju ke tak berhingga, maka kita cukup menunjukkan bahwa berlaku pertidaksamaan:

$$i < 1+i\cdot\epsilon+\frac{i^2-i}{2}\cdot\epsilon^2$$

untuk menunjukkan bahwa berlaku pertidaksamaan $i < (1+\epsilon_0)^i$.

- **Langkah-5**

Perhatikan jumlahan:

$$1 + i \cdot \epsilon + \frac{i^2 - i}{2} \cdot \epsilon^2$$

yang ekuivalen dengan jumlahan:

$$1 + i \cdot \epsilon + i \cdot \frac{(i-1)}{2} \cdot \epsilon^2$$

Nah, sekarang kita tetapkan K sebagai bilangan asli yang lebih besar dari $\frac{2}{\epsilon^2}$, yaitu:

$$K > \frac{2}{\epsilon^2}$$

Dengan demikian, untuk setiap bilangan asli i yang lebih besar dari K akan berlaku ekuivalensi-ekuivalensi berikut.

$$\begin{aligned} i > K &\iff i > \frac{2}{\epsilon^2} \\ &\iff i \cdot \frac{(i-1)}{2} \cdot \epsilon^2 > \frac{2}{\epsilon^2} \cdot \frac{(i-1)}{2} \cdot \epsilon^2 \\ &\iff \frac{i(i-1)}{2} \cdot \epsilon^2 > (i-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i > K &\iff i > \frac{2}{\epsilon^2} \\ &\iff i \cdot \epsilon > \frac{2}{\epsilon^2} \cdot \epsilon \\ &\iff i \cdot \epsilon > \frac{2}{\epsilon} \end{aligned}$$

Dengan demikian, untuk setiap bilangan asli i yang lebih besar dari K akan berlaku pertidaksamaan berikut.

$$1 + i \cdot \epsilon + i \cdot \frac{(i-1)}{2} \cdot \epsilon^2 \;>\; 1 + \frac{2}{\epsilon} + (i-1)$$

Pertidaksamaan di atas ekuivalen dengan:

$$1 + i \cdot \epsilon + i \cdot \frac{(i-1)}{2} \cdot \epsilon^2 \;>\; i + \frac{2}{\epsilon}$$

dan dengan demikian, jelas berlaku pertidaksamaan:

$$1 + i \cdot \epsilon + i \cdot \frac{(i-1)}{2} \cdot \epsilon^2 \;>\; i \quad \Longleftrightarrow \quad i < 1 + i \cdot \epsilon + i \cdot \frac{(i-1)}{2} \cdot \epsilon^2$$

- **Kesimpulan**

Berdasarkan penjabaran **Langkah-1** hingga **Langkah-5** di atas, jika kita diberikan sebarang bilangan real postif ϵ, maka kita dapat menentukan suatu bilangan asli K dengan "rumus":

$$K \text{ adalah bilangan asli yang lebih besar dari } \frac{2}{\epsilon^2}$$
$$\left(K \in \mathbb{N} \text{ dan } K > \frac{2}{\epsilon^2}\right)$$

sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli i yang lebih besar dari K $(i > K)$ akan berlaku $|\sqrt[i]{i} - 1| < \epsilon$.

Jadi, limit barisan $(\sqrt[n]{n})$ adalah 1.

■

7

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 4

Soal

Diketahui $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

(a) Tunjukkan barisan (x_n) naik dan terbatas ke atas!

(b) Tentukan $\sup\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$!

Dikerjakan

*Badalaaa... **Basel problem** cuy....*

Susah ini! Masalah pada soal ini dikenal secara internasional sebagai ***Basel problem***.

Jujur ya, aku merasa kalau soal ini sebetulnya lumayan susah. Level kesusahannya 9 dari 10 lah. Walaupun sebetulnya, mahasiswa matematika pada umumnya **setidaknya** harus bisa menunjukkan bahwa barisan (x_n) adalah barisan yang naik (*increasing sequence*). Aku sendiri cuma bisa bagian ini, hahaha 😃. Bagian pengerjaan soal yang lain aku dapatkan dari berbagai sumber di internet.

Intinya, soal ini **tidak bisa lancar dikerjakan** dengan hanya bermodalkan hapalan catatan kuliah ataupun hapalan buku-buku teks kuliah. Supaya lancar mengerjakan soal ini dibutuhkan wawasan yang sangat luas perihal contoh-contoh permasalahan analisis real. Kecuali, jika **Basel Problem** ini sudah pernah diulas di dalam kelas oleh bapak/ibu dosen tercinta.

• a.1 Menunjukkan (x_n) adalah barisan yang naik

Supaya lebih punya gambaran, ayo kita jabarkan suku x_1 hingga x_5 sebagaimana berikut.

- $x_1 = 1$
- $x_2 = 1 + \frac{1}{2^2}$
- $x_3 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$
- $x_4 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}$
- $x_5 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}$

Apa sudah dapat gambarannya?

Nah! Perhatikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, kita bisa "merumuskan" suku x_n sebagai berikut.

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{untuk } n = 1 \\ x_{n-1} + \dfrac{1}{n^2} & \text{untuk } n > 1 \end{cases}$$

Berdasarkan "rumus" di atas, kita dapat menyatakan bahwa berlaku pertidaksamaan $x_{n-1} < x_n$ untuk setiap bilangan asli n. Dengan kata lain, (x_n) adalah barisan yang naik.

• a.2 Menunjukkan (x_n) adalah barisan yang terbatas ke atas

Wew! Ini adalah soal yang lumayan "menantang" untuk dikerjakan. Mahasiswa yang baru belajar analisis real mungkin bakal *stuck* alias menjumpai jalan buntu dalam mengerjakan soal ini.

Oke! Kita akan menunjukkan bahwa barisan (x_n) terbatas ke atas. Berikut adalah langkah-langkahnya.

•• a.2.1 Langkah-1

Pertama-tama, kita akan membuat barisan (b_n) dengan definisi suku b_n sebagai berikut.

$$b_n = \text{nilai } \frac{1}{2^{(2m)}} \text{ yang paling kecil, sedemikian sehingga berlaku } x_n \leq \frac{1}{2^{(2m)}} \; (m \in \{0, 1, 2, 3, ...\})$$

Definisi suku b_n yang "sedikit" membingungkan di atas bisa kita jabarkan menjadi seperti ini.

- $b_1 =$ nilai $\frac{1}{2^{(2m)}}$ yang paling kecil, sedemikian sehingga berlaku $x_1 \leq \frac{1}{2^{(2m)}}$.
- $b_2 =$ nilai $\frac{1}{2^{(2m)}}$ yang paling kecil, sedemikian sehingga berlaku $x_2 \leq \frac{1}{2^{(2m)}}$.
- $b_3 =$ nilai $\frac{1}{2^{(2m)}}$ yang paling kecil, sedemikian sehingga berlaku $x_3 \leq \frac{1}{2^{(2m)}}$.
- dst...

Penjabaran di atas ekuivalen dengan ini.

- $b_1 =$ nilai $\frac{1}{2^{(2m)}}$ yang paling kecil, sedemikian sehingga berlaku $1 \leq \frac{1}{2^{(2m)}}$.
- $b_2 =$ nilai $\frac{1}{2^{(2m)}}$ yang paling kecil, sedemikian sehingga berlaku $\frac{1}{2^2} \leq \frac{1}{2^{(2m)}}$.
- $b_3 =$ nilai $\frac{1}{2^{(2m)}}$ yang paling kecil, sedemikian sehingga berlaku $\frac{1}{3^2} \leq \frac{1}{2^{(2m)}}$.
- dst...

Beberapa contoh suku pada barisan (b_n) adalah sebagai berikut.

- $b_1 = 1$, karena 1 adalah nilai $\frac{1}{2^{(2m)}}$ yang paling kecil (dipenuhi oleh $m = 0$) sedemikian sehingga berlaku:
$x_1 = 1 \leq b_1 = \frac{1}{2^{(2m)}} = \frac{1}{2^{(2\cdot 0)}} = \frac{1}{2^0} = 1.$

- $b_2 = \frac{1}{2^2}$, karena $\frac{1}{2^2}$ adalah nilai $\frac{1}{2^{(2m)}}$ yang paling kecil (dipenuhi oleh $m = 1$) sedemikian sehingga berlaku:
$x_2 = \frac{1}{2^2} \leq b_2 = \frac{1}{2^{(2m)}} = \frac{1}{2^{(2\cdot 1)}} = \frac{1}{2^2}.$

- $b_3 = \frac{1}{2^2}$, karena $\frac{1}{2^2}$ adalah nilai $\frac{1}{2^{(2m)}}$ yang paling kecil (dipenuhi oleh $m = 1$) sedemikian sehingga berlaku:
$x_3 = \frac{1}{3^2} \leq b_3 = \frac{1}{2^{(2m)}} = \frac{1}{2^{(2\cdot 1)}} = \frac{1}{2^2}.$

- $b_4 = \frac{1}{2^4}$, karena $\frac{1}{2^4}$ adalah nilai $\frac{1}{2^{(2m)}}$ yang paling kecil (dipenuhi oleh $m = 2$) sedemikian sehingga berlaku:
$x_4 = \frac{1}{4^2} \leq b_4 = \frac{1}{2^{(2m)}} = \frac{1}{2^{(2\cdot 2)}} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{4^2}.$

- $b_7 = \frac{1}{2^4}$, karena $\frac{1}{2^4}$ adalah nilai $\frac{1}{2^{(2m)}}$ yang paling kecil (dipenuhi oleh $m = 2$) sedemikian sehingga berlaku:
$x_7 = \frac{1}{7^2} \leq b_7 = \frac{1}{2^{(2m)}} = \frac{1}{2^{(2\cdot 2)}} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{4^2}.$

- $b_8 = \frac{1}{2^6}$, karena $\frac{1}{2^6}$ adalah nilai $\frac{1}{2^{(2m)}}$ yang paling kecil (dipenuhi oleh $m = 3$) sedemikian sehingga berlaku:
$x_8 = \frac{1}{8^2} \leq b_8 = \frac{1}{2^{(2m)}} = \frac{1}{2^{(2\cdot 3)}} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{8^2}.$

- $b_{15} = \frac{1}{2^6}$, karena $\frac{1}{2^6}$ adalah nilai $\frac{1}{2^{(2m)}}$ yang paling kecil (dipenuhi oleh $m = 3$) sedemikian sehingga berlaku:
$x_{15} = \frac{1}{15^2} \leq b_{15} = \frac{1}{2^{(2m)}} = \frac{1}{2^{(2\cdot 3)}} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{8^2}.$

•• a.2.1 Langkah-2

Hadeh... panjang... capek ngetiknya....

Berdasarkan **Langkah-1** di atas, kita akan punya barisan (b_n) yang suku-sukunya adalah seperti berikut.

$$(b_n) = \left(1,\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^4},\ \ldots,\ \frac{1}{2^4},\ \frac{1}{2^6},\ \ldots,\ \frac{1}{2^6},\ \frac{1}{2^8},\ \ldots,\ \frac{1}{2^8},\ \ldots\right)$$

Apabila diperhatikan lebih saksama, barisan (b_n) memiliki suku-suku yang berulang. Beberapa perulangan suku-suku ini bisa kita identifikasi sebagai berikut.

- Barisan (b_n) memuat 1 suku ($= 2^0$ suku) bernilai $\frac{1}{2^0} = 1$, yaitu b_1.
- Barisan (b_n) memuat 2 suku ($= 2^1$ suku) bernilai $\frac{1}{2^2}$, yaitu b_2 dan b_3.
- Barisan (b_n) memuat 4 suku ($= 2^2$ suku) bernilai $\frac{1}{2^4}$, yaitu b_4 hingga b_7.
- Barisan (b_n) memuat 8 suku ($= 2^3$ suku) bernilai $\frac{1}{2^6}$, yaitu b_8 hingga b_{15}.
- Barisan (b_n) memuat 16 suku ($= 2^4$ suku) bernilai $\frac{1}{2^8}$, yaitu b_{16} hingga b_{31}.
- dst...

•• a.2.1 Langkah-3

Selanjutnya, menggunakan barisan (b_n), kita dapat membentuk barisan (b'_n) dengan definisi suku b'_n sebagai berikut.

$$b'_n = \sum_{k=1}^{n} b_n$$

Dengan definisi sebagaimana di atas, berikut ini adalah suku-suku b'_1 hingga b'_5.

- $b'_1 = 1$
- $b'_2 = 1 + \dfrac{1}{2^2}$
- $b'_3 = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^2}$
- $b'_4 = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^4}$
- $b'_5 = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{2^4}$

•• a.2.1 Langkah-4

Untuk menyegarkan ingatan, kita tampilkan lagi suku-suku x_1 hingga x_n.

- $x_1 = 1$
- $x_2 = 1 + \frac{1}{2^2}$
- $x_3 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$
- $x_4 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}$
- $x_5 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}$

Nah! Berdasarkan definisi barisan (b_n) dan (b'_n) pada **Langkah-1** hingga **Langkah-3** yang juga diperjelas oleh contoh suku-suku di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa:

Untuk setiap bilangan asli n berlaku $x_n \leq b'_n$

•• a.2.1 Langkah-5

Selanjutnya, perhatikan bahwa ketika bilangan asli n bernilai sangaaat besar menuju tak berhingga, maka kita bisa menjabarkan $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ sebagai:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + ... + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + ... + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + ... + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{10}} + ...$$

Perhatikan bahwa penjabaran di atas ekuivalen dengan:

$$1 + 2^1 \cdot \left(\frac{1}{2^2}\right) + 2^2 \cdot \left(\frac{1}{2^4}\right) + 2^3 \cdot \left(\frac{1}{2^6}\right) + 2^4 \cdot \left(\frac{1}{2^8}\right) + 2^5 \cdot \left(\frac{1}{2^{10}}\right) + ...$$

yang mana ekuivalen juga dengan:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Dengan demikian, untuk bilangan asli n yang bernilai sangaaat besar menuju tak berhingga, maka akan berlaku persamaan:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

•• a.2.1 Langkah-6

Menggunakan notasi $\sum$, kita dapat menyatakan suku x_n sebagai:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Berdasarkan hasil pada **Langkah-4**, kita akan mendapatkan pertidaksamaan berikut.

$$x_n \leq b'_n \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} b_n$$

Berdasarkan hasil pada **Langkah-5**, untuk bilangan asli n yang bernilai sangaaat besar menuju tak berhingga, maka akan berlaku pertidaksamaan berikut.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Sekarang perhatikan persamaan deret $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ berikut!

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Sebagaimana yang (seharusnya) kita sudah tahu, deret $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ itu konvergen ke 1.

Dengan demikian akan berlaku:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

dan akibatnya:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2 \quad \Longrightarrow \quad x_n \leq 2$$

Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa barisan (x_n) terbatas ke atas oleh 2.

• b. Menentukan $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Naaah! Ini dia!

Ini dia soal yang **paling susah**!

Aku yakin, hanya akan ada sedikiiiiiit mahasiswa yang baru belajar analisis real yang bisa mengerjakan soal ini. Demi menghemat waktu pengerjaan ujian, sebaiknya soal ini tidak perlu dikerjakan, hahaha. 😀

Umumnya, setelah menunjukkan bahwa barisan (x_n) itu adalah barisan naik dan terbatas ke atas, maka kita akan teringat teorema berikut.

> Jika barisan bilangan real (x_n) adalah barisan naik monoton dan terbatas ke atas, maka barisan tersebut konvergen ke supremumnya.

Ya nggak?

Nah, jika setelah bersusah-payah mengerjakan soal poin (a) kita menyatakan bahwa:

Supremum barisan (x_n) adalah 2.

maka kita akan membuat pernyataan yang **SALAH!**

Haaah?

Ya, salah! Karena supremum barisan (x_n) itu **bukan** 2 !

Lha, terus apa dong?

•• b.1 Langkah-1

Ini adalah pembuktian orisinil **Basel problem** yang dipopulerkan oleh matematikawan **Leonhard Euler** pada tahun 1734. Pada intinya, permasalahan **Basel Problem** adalah:

$$\text{Tentukan limit deret } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \ !$$

•• b.1 Langkah-2

Pasti kita semua nggak akan kepikiran bahwa penyelesaian **Basel Problem** berawal dari fungsi trigonometri sederhana, yaitu $\sin(x)$.

Menggunakan ekspansi **deret Taylor**, kita bisa menyatakan $\sin(x)$ sebagai berikut.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - ...$$

Dengan membagi kedua ruas pada persamaan di atas dengan x, maka kita akan memperoleh hasil seperti berikut.

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - ...$$

•• b.1 Langkah-3

Kita balik lagi mengamati ekspansi **deret Taylor**, kita bisa menyatakan $\sin(x)$ sebagai berikut.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - ...$$

Perhatikan bahwa ruas kanan persamaan adalah polinomial. Kita tahu bahwa polinomial bisa difaktorkan dengan faktornya bersesuaian dengan pembuat nolnya.

Nah, pembuat nol fungsi $\sin(x)$ tidak lain adalah bilangan-bilangan real x yang memenuhi persamaan $\sin(x) = 0$.

Kita tahu bahwa $\sin(x) = 0$ jika dan hanya jika $x = z{\cdot}\pi$ dengan $z \in \mathbb{Z}$. Jadi, $x \in \{0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, ...\}$.
Dengan demikian, kita bisa menyatakan $\sin(x)$ sebagai berikut.

$$\sin(x) = x \cdot (x - \pi) \cdot (x + \pi) \cdot (x - 2\pi) \cdot (x + 2\pi) \cdot ...$$

Perhatikan! Selain sebagai $(x - \pi)$, kita dapat menyatakan faktor tersebut dalam bentuk $\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)$. Perhatikan bahwa jika $x = \pi$, maka $(x - \pi)$ dan $\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)$ akan sama-sama bernilai 0. Dengan demikian, secara umum, faktor $(x - z\pi)$ dapat kita nyatakan sebagai $\left(1 - \frac{x}{z\pi}\right)$ dan faktor $(x + z\pi)$ dapat kita nyatakan sebagai $\left(1 + \frac{x}{z\pi}\right)$.

Dengan demikian, kita juga bisa menyatakan $\sin(x)$ sebagai berikut.

$$\sin(x) = x \cdot \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \cdot \ldots$$

•• b.1 Langkah-4

Selanjutnya, kita substitusikan perkalian antar sesama faktor yang sekawan pada persamaan di atas dengan persamaan berikut.

$$\left(1 - \frac{x}{z\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{z\pi}\right) = \left(1 + \frac{x^2}{z^2\pi^2}\right)$$

Kita akan memperoleh hasil berupa persamaan berikut.

$$\sin(x) = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4^2\pi^2}\right) \cdot \ldots$$

•• b.1 Langkah-5

Nah langkah ini yang agak *njlimet*. Kita akan "mencoba" untuk mengalikan:

$$\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4^2\pi^2}\right) \cdot \ldots$$

Kita mulai dengan mengalikan $\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)$ terlebih dahulu.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) &= 1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2} - \frac{x^2}{\pi^2} + \frac{x^2}{\pi^2} \cdot \frac{x^2}{2^2\pi^2} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2} - \frac{x^2}{\pi^2} + \frac{x^4}{2^2\pi^4} \end{aligned}$$

So far, so good ya. Ternyata hasil perkaliannya tidak terlalu "mengerikan", hahaha. 😃

Itu sengaja suku-suku yang memuat perkalian dengan x^2 diberi warna merah karena kita akan "mengutak-atik"-nya nanti.

Oke! Ayo kita lanjutkan dengan mengalikan $\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4^2\pi^2}\right)$.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{3^2x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4^2\pi^2}\right) &= 1 - \frac{x^2}{4^2\pi^2} - \frac{x^2}{3^2\pi^2} + \frac{x^2}{3^2\pi^2} \cdot \frac{x^2}{4^2\pi^2} \\ &= 1 - \frac{x^2}{4^2\pi^2} - \frac{x^2}{3^2\pi^2} + \frac{x^4}{(3 \cdot 4)^2\pi^4} \end{aligned}$$

Oke! Sekarang ayo kita hitung $\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{x^2}{4^2\pi^2}\right)$

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}-\frac{x^2}{\pi^2}+\frac{x^4}{2^2\pi^4}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{4^2\pi^2}-\frac{x^2}{3^2\pi^2}+\frac{x^4}{(3\cdot 4)^2\pi^4}\right)=\ldots\\
&= 1-\frac{x^2}{4^2\pi^2}-\frac{x^2}{3^2\pi^2}-\frac{x^2}{2^2\pi^2}-\frac{x^2}{\pi^2}+P_4(x)+P_6(x)+P_8(x)\\
&= 1-\left(\frac{x^2}{\pi^2}+\frac{x^2}{2^2\pi^2}+\frac{x^2}{3^2\pi^2}+\frac{x^2}{4^2\pi^2}\right)+P_4(x)+P_6(x)+P_8(x)\\
&= 1-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{2^2\pi^2}+\frac{1}{3^2\pi^2}+\frac{1}{4^2\pi^2}\right)\cdot x^2+P_4(x)+P_6(x)+P_8(x)
\end{aligned}$$

dengan $P_n(x)$ adalah suku dengan derajat n (memuat perkalian dengan x^n)

Nah! Berdasarkan penjabaran di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa perkalian $\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{x^2}{4^2\pi^2}\right)\cdot\ldots$ akan memuat suku x^2 dengan koefisiennya adalah:

$$\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{2^2\pi^2}+\frac{1}{3^2\pi^2}+\frac{1}{4^2\pi^2}+\frac{1}{5^2\pi^2}+\ldots$$

•• b.1 Langkah-6

Ayo kita perhatikan kembali persamaan $\sin(x)$ berikut yang muncul pada **Langkah-4**.

$$\sin(x) = x\cdot\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{4^2\pi^2}\right)\cdot\ldots$$

Nah, berdasarkan hasil pada **Langkah-5**, maka persamaan di atas akan bisa kita ubah menjadi seperti ini.

$$\sin(x) = x\cdot\left(1-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{2^2\pi^2}+\frac{1}{3^2\pi^2}+\frac{1}{4^2\pi^2}+\frac{1}{5^2\pi^2}+\ldots\right)\cdot x^2+P_4(x)+P_6(x)+P_8(x)+\ldots\right)$$

Persamaan di atas akan ekuivalen dengan persamaan di bawah ini. Kita sebut persamaan ini sebagai Persamaan-A.

$$\sin(x) = x-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{2^2\pi^2}+\frac{1}{3^2\pi^2}+\frac{1}{4^2\pi^2}+\frac{1}{5^2\pi^2}+\ldots\right)\cdot x^3+P_5(x)+P_7(x)+P_9(x)+\ldots$$

Nah ini dia!

Ingat pada **Langkah-1**, menggunakan ekspansi **deret Taylor**, kita bisa menyatakan $\sin(x)$ sebagai persamaan di bawah. Kita sebut persamaan ini sebagai Persamaan-B.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

Perhatikan koefisien suku x^3 pada Persamaan-A dan Persamaan-B!

Karena Persamaan-A dan persamaan Persamaan-B **harus sama**, maka kita bisa menyatakan bahwa koefisien suku x^3 pada Persamaan-A sama dengan koefisien suku x^3 pada Persamaan-B.

Dengan kata lain, akan berlaku persamaan ini.

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \frac{1}{4^2\pi^2} + \frac{1}{5^2\pi^2} + \dots = \frac{1}{3!}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) = \frac{1}{6}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

•• b.1 Kesimpulan

Ya sudah.

Berdasarkan penjabaran panjang **Langkah-1** hingga **Langkah-6** di atas, kita bisa menyimpulkan bahwa limit deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ adalah $\frac{\pi^2}{6}$.

Ingat! $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ adalah suku x_n dari barisan (x_n).

Dengan demikian, karena (x_n) adalah barisan naik monoton yang terbatas ke atas, maka limit barisan (x_n) adalah supremumnya. Dengan kata lain:

$$\sup\{x_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Jadi, $\sup\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} = \frac{\pi^2}{6}$.

■

8

Ayo Kerjakan!
Ujian Tengah Semester
Soal Nomor 5 (a)

Soal

Menggunakan definisi limit fungsi, tunjukkan bahwa:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - x - 3}{x + 2} \right) = -1$$

Dikerjakan

Kita akan menunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2 - x - 3}{x + 2} \right) = -1$ dengan menggunakan definisi limit fungsi sebagaimana pernyataan di dalam kotak hijau berikut.

> **"Misi Utama"**
>
> Jika diberikan sebarang bilangan real positif ϵ, maka kita dapat menentukan suatu bilangan real positif δ sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real x yang memenuhi $0 < |x - 1| < \delta$ juga akan memenuhi $\left| \dfrac{x^2 - x - 3}{x + 2} - (-1) \right| < \epsilon$.

Oke deh! Ayo kita tunjukkan kebenaran **"Misi Utama"** di atas!

- **Langkah-1**

Kita ambil sebarang bilangan real positif ϵ.

- **Langkah-2**

Karena bentuk $\left|\dfrac{x^2-x-3}{x+2}-(-1)\right|$ terlihat bisa disederhanakan, jadi ayo kita sederhanakan!

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^2-x-3}{x+2}-(-1)\right| &= \left|\frac{x^2-x-3}{x+2}+\frac{x+2}{x+2}\right|\\ &= \left|\frac{x^2-x-3+x+2}{x+2}\right|\\ &= \left|\frac{x^2-1}{x+2}\right|\\ &= \left|\frac{(x-1)(x+1)}{x+2}\right|\\ &= |x-1|\cdot\frac{|x+1|}{|x+2|}\\ &= |x-1|\cdot|x+1|\cdot\frac{1}{|x+2|}\end{aligned}$$

Jadi, kita punya persamaan $\left|\dfrac{x^2-x-3}{x+2}-(-1)\right| \quad = \quad |x-1|\cdot|x+1|\cdot\dfrac{1}{|x+2|}$

- **Langkah-3**

Perhatikan lagi isi kotak hijau di atas!

Ingat bahwa **"Misi Utama"** kita adalah menentukan bilangan real positif δ sedemikian sehingga pernyataan di dalam kotak hijau di atas akan terbukti benar. Perhatikan bahwa bilangan real positif δ ini akan berhubungan dengan pertidaksamaan $0<|x-1|<\delta$.

Perhatikan! Pada **Langkah-2** kita mendapatkan hasil berupa persamaan:

$$\left|\frac{x^2-x-3}{x+2}-(-1)\right| \quad = \quad |x-1|\cdot|x+1|\cdot\frac{1}{|x+2|}$$

Perhatikan bahwa di ruas kanan persamaan memuat perkalian antara $|x-1|$, $|x+1|$, dan $\dfrac{1}{|x+2|}$.

Nah! Sekarang kita akan **"menyertakan misi tambahan"** sebagai berikut.

"Misi Tambahan"

Akan ditentukan suatu bilangan real positif δ, sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x-1| < \delta$ akan menyebabkan $x+1$ dan $x+2$ adalah bilangan-bilangan real positif.

Tentu saja, ada banyak bilangan real positif δ yang dapat memenuhi **"Misi Tambahan"** ini, misalnya $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{50.000}$, dan lain-lain.

Okelah! Misalkan kita tetapkan $\delta = \frac{1}{5}$.

Dengan demikian kita akan memperoleh ekuivalensi:

$$0 < |x-1| < \delta \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < |x-1| < \frac{1}{5}$$

yang ekuivalen dengan:

$$-\frac{1}{5} < x - 1 < \frac{1}{5} \text{ dan } x \neq 1$$

yang ekuivalen dengan:

$$\frac{4}{5} < x < \frac{6}{5} \text{ dan } x \neq 1$$

Nah, berdasarkan penjabaran di atas, setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x-1| < \frac{1}{5}$ adalah bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $\frac{4}{5} < x < \frac{6}{5}$ dan x bukan bilangan 1. Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa x adalah bilangan real positif.

Lebih lanjut, karena x adalah bilangan real positif, maka $x+1$ dan $x+2$ kedua-duanya juga adalah bilangan real positif. Lebih tepatnya:

- Karena $\frac{4}{5} < x < \frac{6}{5}$, akibatnya $\frac{9}{5} < x + 1 < \frac{11}{5}$ dan dengan demikian $|x+1| < \frac{11}{5}$
- Karena $\frac{4}{5} < x < \frac{6}{5}$, akibatnya $\frac{14}{5} < x + 2 < \frac{16}{5}$ dan dengan demikian $|x+2| < \frac{16}{5}$

- **Langkah-4**

Berdasarkan **Langkah-3**, kita memperoleh hasil sebagai berikut.

> **Hasil-1**
>
> Dengan menetapkan $\delta = \frac{1}{5}$, maka setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x-1| < \delta$ akan menyebabkan $|x+1| < \frac{11}{5}$ dan $|x+2| < \frac{16}{5}$.

Nah kembali ke persamaan:

$$\left|\frac{x^2-x-3}{x+2} - (-1)\right| = |x-1| \cdot |x+1| \cdot \frac{1}{|x+2|}$$

Jika x adalah bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x-1| < \frac{1}{5}$, maka kita akan memperoleh hasil berupa pertidaksamaan berikut.

$$|x-1| \cdot |x+1| \cdot \frac{1}{|x+2|} < \frac{1}{5} \cdot \frac{11}{5} \cdot \frac{5}{16}$$

yang ekuivalen dengan:

$$|x-1| \cdot |x+1| \cdot \frac{1}{|x+2|} < \frac{11}{80}$$

Nah, karena:

$$\left|\frac{x^2-x-3}{x+2} - (-1)\right| = |x-1| \cdot |x+1| \cdot \frac{1}{|x+2|}$$

maka, kita akan punya pertidaksamaan:

$$\left|\frac{x^2-x-3}{x+2} - (-1)\right| < \frac{11}{80}$$

Dengan demikian, kita bisa menyatakan hasil sebagai berikut.

> **Hasil-2**
>
> Dengan menetapkan $\delta = \frac{1}{5}$, maka setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x-1| < \delta$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $\left|\frac{x^2-x-3}{x+2} - (-1)\right| < \frac{11}{80}$.

- **Langkah-5**

Berdasarkan **Hasil-2** yang muncul di akhir **Langkah-4**, kita dapat menetapkan bilangan real positif $\delta = \dfrac{1}{5}$ ketika pada **Langkah-1** kita mendapatkan bilangan real positif ϵ yang bernilai lebih besar atau sama dengan $\dfrac{11}{80}$.

Ayo, kita nyatakan hasil ini sebagai berikut.

> **Hasil-3**
>
> Jika kita mendapatkan sebarang bilangan real positif ϵ yang nilainya lebih besar atau sama dengan $\dfrac{11}{80}$ (dengan kata lain $\epsilon \geq \dfrac{11}{80}$), maka kita bisa menetapkan bilangan real positif $\delta = \dfrac{1}{5}$
>
> sedemikian sehingga setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - 1| < \delta$
>
> juga akan memenuhi pertidaksamaan $\left|\dfrac{x^2 - x - 3}{x + 2} - (-1)\right| < \epsilon$.

Nah, pertanyannya adalah:

Jika bilangan real positif ϵ yang kita dapatkan pada **Langkah-1** bernilai kurang dari $\dfrac{11}{80}$, maka bagaimanakah cara kita menetapkan bilangan real positif δ?

Hmmm... bagaimana ya?

Yang jelas, pilihan kita satu-satunya adalah **memperkecil** nilai δ !

Sederhananya, jika bilangan real positif ϵ yang kita dapatkan pada **Langkah-1** bernilai kurang dari $\dfrac{11}{80}$, maka kita harus menetapkan bilangan real positif δ yang nilainya kurang dari $\dfrac{1}{5}$.

Kita misalkan r adalah bilangan real positif yang nilainya kurang dari $\frac{1}{5}$. Dengan kata lain, $r < \frac{1}{5}$.

Perhatikan! Setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x-1| < r$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $0 < |x-1| < \frac{1}{5}$. Kenapa bisa begitu? Ya karena r adalah bilangan real positif dengan sifat $r < \frac{1}{5}$.

Dengan demikian, setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x-1| < r$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $|x+1| < \frac{11}{5}$ dan $|x+2| < \frac{16}{5}$.

Akibatnya, jika x adalah bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x-1| < r$, maka kita akan memperoleh hasil berupa pertidaksamaan:

$$|x-1| \cdot |x+1| \cdot \frac{1}{|x+2|} \quad < \quad r \cdot \frac{11}{5} \cdot \frac{5}{16}$$

yang ekuivalen dengan:

$$|x-1| \cdot |x+1| \cdot \frac{1}{|x+2|} \quad < \quad r \cdot \frac{11}{16}$$

Nah, kita kan **ingin supaya** berlaku pertidaksamaan:

$$|x-1| \cdot |x+1| \cdot \frac{1}{|x+2|} \; < \; \epsilon$$

supaya nantinya akan berlaku pertidaksamaan:

$$\left| \frac{x^2 - x - 3}{x+2} - (-1) \right| \; < \; \epsilon$$

Dengan demikian, kita bisa menetapkan bilangan real positif r sebagai:

$$r \; = \; \frac{16}{11} \cdot \epsilon$$

Ingat! Pada kasus ini, nilai ϵ kan kurang dari $\frac{11}{80}$. Dengan demikian, nilai $r = \frac{16}{11} \cdot \epsilon$ akan kurang dari $\frac{1}{5}$.

- **Kesimpulan**

Jika kita diberikan sebarang bilangan real positif ϵ, maka kita dapat mengkategorikan nilai ϵ tersebut ke dalam 2 kasus sebagai berikut.

1. **Kasus Pertama.** Nilai ϵ lebih besar atau sama dengan $\frac{11}{80}$. Dengan kata lain, $\epsilon \geq \frac{11}{80}$.
2. **Kasus Kedua.** Nilai ϵ lebih kecil dari $\frac{11}{80}$. Dengan kata lain, $0 < \epsilon < \frac{11}{80}$.

Berdasarkan 2 kasus di atas, kita dapat menetapkan bilangan real positif δ sebagai berikut.

1. Jika yang terjadi adalah **Kasus Pertama**, maka kita bisa menetapkan $\delta = \frac{1}{5}$.
2. Jika yang terjadi adalah **Kasus Kedua**, maka kita bisa menetapkan $\delta = \frac{16}{11} \cdot \epsilon$.

Dengan demikian, untuk setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - 1| < \delta$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $\left| \frac{x^2 - x - 3}{x + 2} - (-1) \right| < \epsilon$.

Sekadar informasi, apabila ingin lebih ringkas tanpa perlu memandang adanya 2 kasus di atas, kita dapat menetapkan bilangan real positif δ sebagai yang terkecil di antara $\frac{1}{5}$ dan $\frac{16}{11} \cdot \epsilon$. Dengan kata lain:

$$\delta = \text{minimum} \left\{ \frac{1}{5}, \quad \frac{16}{11} \cdot \epsilon \right\}$$

Catatan:
Ada banyak jawaban dari soal ini. Semua bergantung dari penetapan δ di **"Misi Tambahan"** yang mana kita memilih untuk menetapkan $\delta = \frac{1}{5}$.

■

9

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 5 (b)

Soal

Menggunakan definisi limit fungsi, tunjukkan bahwa:

$$\lim_{x \to c} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{c}}, \forall c > 0$$

Dikerjakan

Kita akan menunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{c}}, \forall c > 0$ dengan menggunakan definisi limit fungsi sebagaimana pernyataan di dalam kotak hijau berikut.

> **"Misi Utama"**
>
> Jika diberikan sebarang bilangan real positif ϵ, maka kita dapat menentukan suatu bilangan real positif δ sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real x yang memenuhi $0 < |x - c| < \delta$ juga akan memenuhi $\left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{c}} \right| < \epsilon$.

Oke deh! Ayo kita tunjukkan kebenaran **"Misi Utama"** di atas!

• Langkah-1

Kita ambil sebarang bilangan real positif ϵ.

• Langkah-2

Karena bentuk $\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right|$ terlihat bisa disederhanakan, jadi ayo kita sederhanakan!

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right| &= \left|\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{c}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{c}\cdot\sqrt{x}}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{c}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{c}}\right| \\
&= \frac{|\sqrt{c}-\sqrt{x}|}{|\sqrt{x}\cdot\sqrt{c}|} \\
&= \frac{|\sqrt{c}-\sqrt{x}|}{|\sqrt{x}\cdot\sqrt{c}|} \cdot \frac{|\sqrt{c}+\sqrt{x}|}{|\sqrt{c}+\sqrt{x}|} \\
&= \frac{|c-x|}{|\sqrt{x}\cdot\sqrt{c}|\cdot|\sqrt{c}+\sqrt{x}|} \\
&= \frac{|x-c|}{|\sqrt{x}\cdot\sqrt{c}|\cdot|\sqrt{c}+\sqrt{x}|}
\end{aligned}$$

Jadi, kita punya persamaan $\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right| = \frac{|x-c|}{|\sqrt{x}\cdot\sqrt{c}|\cdot|\sqrt{c}+\sqrt{x}|}$

- **Langkah-3**

Perhatikan lagi isi kotak hijau di atas!

Ingat bahwa **"Misi Utama"** kita adalah menentukan bilangan real positif δ sedemikian sehingga pernyataan di dalam kotak hijau di atas akan terbukti benar. Perhatikan bahwa bilangan real positif δ ini akan berhubungan dengan pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta$.

Selain itu, kita ingin supaya setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x-c| < \delta$ adalah bilangan real positif. Kita bisa melakukannya dengan menetapkan nilai δ yang bergantung kepada nilai c.

Perhatikan! Jika kita tetapkan nilai $\delta = \frac{c}{2}$, maka kita akan memperoleh:

$$\begin{aligned} 0 < |x - c| < \delta &\iff 0 < |x - c| < \frac{c}{2} \\ &\iff -\frac{c}{2} < x - c < \frac{c}{2} \text{ dan } x \neq c \\ &\iff c - \frac{c}{2} < x < c + \frac{c}{2} \text{ dan } x \neq c \\ &\iff \frac{c}{2} < x < \frac{3c}{2} \text{ dan } x \neq c \end{aligned}$$

Karena c adalah bilangan real positif, maka $\frac{c}{2}$ dan $\frac{3c}{2}$ juga merupakan bilangan real positif. Karena x berada di antara $\frac{c}{2}$ dan $\frac{3c}{2}$, maka kita bisa menyatakan bahwa x adalah bilangan real positif.

> **Hasil-1**
>
> Diketahui c adalah bilangan real positif. Jika ditetapkan $\delta = \frac{c}{2}$, maka setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta$ adalah bilangan real positif.
>
> Lebih lanjut, setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta$ akan memenuhi pertidaksamaan $\frac{c}{2} < x < \frac{3c}{2}$.

- **Langkah-4**

Kita kembali ke persamaan $\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right| = \frac{|x-c|}{|\sqrt{x}\cdot\sqrt{c}|\cdot|\sqrt{c}+\sqrt{x}|}$.

Perhatikan! Berdasarkan **Hasil-1**, jika $\delta = \frac{c}{2}$, maka akibatnya setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x-c| < \delta$ akan memenuhi pertidaksamaan:

$$\frac{c}{2} < x < \frac{3c}{2} \iff \sqrt{\frac{c}{2}} < \sqrt{x} < \sqrt{\frac{3c}{2}} \iff \frac{1}{\sqrt{\frac{3c}{2}}} < \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{c}{2}}}$$

Dengan demikian, akan berlaku pula pertidaksamaan:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{3c}{2}}\cdot\sqrt{c}} < \frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{c}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{c}{2}}\cdot\sqrt{c}} \quad \text{dan} \quad \frac{1}{\sqrt{\frac{3c}{2}}+\sqrt{c}} < \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{c}{2}}+\sqrt{c}}$$

Akibatnya:

$$\frac{|x-c|}{|\sqrt{x}\cdot\sqrt{c}|\cdot|\sqrt{c}+\sqrt{x}|} < \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{c}{2}}\cdot\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{c}{2}}+\sqrt{c}}$$

$$\iff$$

$$\frac{|x-c|}{|\sqrt{x}\cdot\sqrt{c}|\cdot|\sqrt{c}+\sqrt{x}|} < \frac{c}{2}\cdot\frac{2\sqrt{c}}{c}\cdot\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\sqrt{c}$$

$$\iff$$

$$\frac{|x-c|}{|\sqrt{x}\cdot\sqrt{c}|\cdot|\sqrt{c}+\sqrt{x}|} < \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\cdot c$$

Dengan demikian, kita bisa menyatakan hasil sebagai berikut.

Hasil-2

Dengan menetapkan $\delta = \frac{c}{2}$, maka setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x-c| < \delta$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $\frac{|x-c|}{|\sqrt{x}\cdot\sqrt{c}|\cdot|\sqrt{c}+\sqrt{x}|} < \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\cdot c$.

- **Langkah-5**

Berdasarkan **Hasil-2** yang muncul di akhir **Langkah-4**, kita dapat menetapkan bilangan real positif $\delta = \dfrac{c}{2}$ ketika pada **Langkah-1** kita mendapatkan bilangan real positif ϵ yang bernilai lebih besar atau sama dengan $\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right) \cdot c$.

Ayo, kita nyatakan hasil ini sebagai berikut.

> **Hasil-3**
>
> Jika kita mendapatkan sebarang bilangan real positif ϵ yang nilainya lebih besar atau sama dengan $\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right) \cdot c$ (dengan kata lain $\epsilon \geq \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) \cdot c$), maka kita bisa menetapkan bilangan real positif $\delta = \dfrac{c}{2}$ sedemikian sehingga setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta$
>
> juga akan memenuhi pertidaksamaan $\left| \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{c}} \right| \ < \ \epsilon$.

Nah, pertanyannya adalah:

Jika bilangan real positif ϵ yang kita dapatkan pada **Langkah-1** bernilai kurang dari $\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right) \cdot c$, maka bagaimanakah cara kita menetapkan bilangan real positif δ?

Hmmm... bagaimana ya?

Yang jelas, pilihan kita satu-satunya adalah **memperkecil** nilai δ !

Sederhananya, jika bilangan real positif ϵ yang kita dapatkan pada **Langkah-1** bernilai kurang dari $\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right) \cdot c$, maka kita harus menetapkan bilangan real positif δ yang nilainya kurang dari $\dfrac{c}{2}$.

Kita misalkan r adalah bilangan real positif yang nilainya kurang dari $\frac{c}{2}$. Dengan kata lain, $r < \frac{c}{2}$.

Perhatikan! Setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < r$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \frac{c}{2}$. Kenapa bisa begitu? Ya karena r adalah bilangan real positif dengan sifat $r < \frac{c}{2}$.

Dengan demikian, setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < r$ juga akan memenuhi pertidaksamaan:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{3c}{2}} \cdot \sqrt{c}} < \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{c}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{c}{2}} \cdot \sqrt{c}} \quad \text{dan} \quad \frac{1}{\sqrt{\frac{3c}{2}} + \sqrt{c}} < \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{c}{2}} + \sqrt{c}}$$

Akibatnya, jika x adalah bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < r$, maka kita akan memperoleh hasil berupa pertidaksamaan:

$$\frac{|x - c|}{|\sqrt{x} \cdot \sqrt{c}| \cdot |\sqrt{c} + \sqrt{x}|} \; < \; r \cdot \frac{2\sqrt{c}}{c} \cdot \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right) \cdot \sqrt{c}$$

yang ekuivalen dengan:

$$\frac{|x - c|}{|\sqrt{x} \cdot \sqrt{c}| \cdot |\sqrt{c} + \sqrt{x}|} \; < \; r \cdot \left(2 + \sqrt{2} \right)$$

Nah, kita kan **ingin supaya** berlaku pertidaksamaan:

$$\frac{|x - c|}{|\sqrt{x} \cdot \sqrt{c}| \cdot |\sqrt{c} + \sqrt{x}|} \; < \; \epsilon$$

supaya nantinya akan berlaku pertidaksamaan:

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{c}} \right| \; < \; \epsilon$$

Dengan demikian, kita bisa menetapkan bilangan real positif r sebagai:

$$r \; = \; \frac{\epsilon}{2 + \sqrt{2}}$$

Ingat! Pada kasus ini, nilai ϵ kan kurang dari $\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right) \cdot c$. Dengan demikian, nilai $r \; = \; \frac{\epsilon}{2 + \sqrt{2}}$ akan kurang dari $\frac{c}{2}$.

- **Kesimpulan**

Jika kita diberikan sebarang bilangan real positif ϵ, maka kita dapat mengkategorikan nilai ϵ tersebut ke dalam 2 kasus sebagai berikut.

1. **Kasus Pertama.** Nilai ϵ lebih besar atau sama dengan $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) \cdot c$. Dengan kata lain, $\epsilon \geq \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) \cdot c$.
2. **Kasus Kedua.** Nilai ϵ lebih kecil dari $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) \cdot c$. Dengan kata lain, $0 < \epsilon < \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) \cdot c$.

Berdasarkan 2 kasus di atas, kita dapat menetapkan bilangan real positif δ sebagai berikut.

1. Jika yang terjadi adalah **Kasus Pertama**, maka kita bisa menetapkan $\delta = \frac{c}{2}$.
2. Jika yang terjadi adalah **Kasus Kedua**, maka kita bisa menetapkan $\delta = \frac{\epsilon}{2+\sqrt{2}}$.

Dengan demikian, untuk setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x - c| < \delta$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right| < \epsilon$.

Sekadar informasi, apabila ingin lebih ringkas tanpa perlu memandang adanya 2 kasus di atas, kita dapat menetapkan bilangan real positif δ sebagai yang terkecil di antara $\frac{c}{2}$ dan $\frac{\epsilon}{2+\sqrt{2}}$. Dengan kata lain:

$$\delta = \text{minimum}\left\{\frac{c}{2},\quad \frac{\epsilon}{2+\sqrt{2}}\right\}$$

$\blacksquare$

10

Ayo Kerjakan!
Ujian Tengah Semester
Soal Nomor 6 (a)

Soal

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Suppose there exist constants L and $K > 0$ such that

$$|f(x) - L| \leq K|x - c|, \text{ for } x \in \mathbb{R}$$

Show that $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$!

Dikerjakan

Kita akan menunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ dengan menggunakan definisi limit fungsi sebagaimana pernyataan di dalam kotak hijau berikut.

> **"Misi Utama"**
>
> Jika diberikan sebarang bilangan real positif ϵ, maka kita dapat menentukan suatu bilangan real positif δ sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real x yang memenuhi $0 < |x - c| < \delta$ juga akan memenuhi $|f(x) - L| < \epsilon$.

Oke deh! Ayo kita tunjukkan kebenaran **"Misi Utama"** di atas!

- **Langkah-1**

Kita ambil sebarang bilangan real positif ϵ.

- **Langkah-2**

Karena terdapat konstanta L dan $K > 0$ sedemikian sehingga berlaku persamaan:

$$|f(x) - L| \leq K|x - c| \text{ untuk setiap } x \in \mathbb{R}$$

maka kita akan "mencoba" untuk menetapkan bilangan real positif δ sebagai:

$$\delta = \frac{\epsilon}{K}$$

Ya, karena ϵ dan K adalah bilangan-bilangan real positif, maka $\frac{\epsilon}{K}$ juga adalah bilangan real positif.

Kemudian, jika x adalah sebarang bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan:

$$0 < |x - c| < \frac{\epsilon}{K}$$

maka bilangan real x tersebut juga akan memenuhi pertidaksamaan:

$$K|x - c| < K \cdot \frac{\epsilon}{K}$$

yang ekuivalen dengan:

$$|f(x) - L| \ \leq \ K|x - c| \ < \ \epsilon$$

- **Kesimpulan**

Jika diberikan sebarang bilangan real positif ϵ, maka kita dapat menentukan suatu bilangan real positif δ dengan "rumus" $\delta = \frac{\epsilon}{K}$ sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real x yang memenuhi $0 < |x - c| < \delta$ juga akan memenuhi $|f(x) - L| < \epsilon$.

■

11

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 6 (b)

Soal

If $\lim_{x \to 0} f(x) = L$ and $a > 0$, show that $\lim_{x \to 0} f(ax) = L$!

Dikerjakan

Hayoloh! Bingung mesti ketemu dengan $f(ax)$ dalam limit.

Daripada bingung, lebih baik kita paparkan dulu apa yang kita ketahui.

> Karena $\lim_{x \to 0} f(x) = L$, maka untuk sebarang bilangan real positif ϵ akan selalu terdapat bilangan real positif δ_1 sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real x yang memenuhi $0 < |x| < \delta_1$ juga akan memenuhi $|f(x) - L| < \epsilon$.

Nah, untuk menunjukkan bahwa $\lim_{x \to 0} f(ax) = L$, maka kita harus menunjukkan kebenaran pernyataan berikut.

> Jika kita diberikan sebarang bilangan real positif ϵ, maka kita akan selalu bisa menentukan suatu bilangan real positif δ_2 sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real x yang memenuhi $0 < |x| < \delta_2$ juga akan memenuhi $|f(ax) - L| < \epsilon$.

- **Langkah-1**

Perlu diketahui bahwa:

> Jika a adalah bilangan real positif, maka untuk sebarang bilangan real x akan selalu terdapat bilangan real y sedemikian sehingga berlaku persamaan:
>
> $$x = a \cdot y$$

- **Langkah-2**

Kita ambil sebarang bilangan real positif ϵ.

- **Langkah-3**

Karena $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = L$, maka untuk bilangan real positif ϵ yang diambil secara sebarang di **Langkah-2** di atas, akan terdapat bilangan real positif δ_1 sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real x yang memenuhi $0 < |x| < \delta_1$ juga akan memenuhi $|f(x) - L| < \epsilon$.

Ingat ya! Bilangan real positif δ_1 yang kita dapatkan itu bisa berbeda-beda, tergantung dari bilangan real positif ϵ yang kita ambil secara sebarang di **Langkah-2**. Sebagai contoh, ketika $\epsilon = 100$, maka kita akan mendapatkan $\delta_1 = 1$. Sedangkan ketika $\epsilon = 0,001$, maka kita akan mendapatkan $\delta_1 = 0,5$.

Biasanya, pada pembuktian limit fungsi, kita dihadapkan dengan "misi" untuk menentukan "rumus" δ, seperti $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ atau $\delta = \min(1, \frac{1}{\epsilon^2})$. Tapi, karena sudah diketahui bahwa $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = L$, maka untuk sebarang bilangan real positif ϵ yang diambil di **Langkah-2** di atas, kita dipastikan akan selalu mendapatkan δ_1 sebagai "pasangannya".

- **Langkah-4**

Misalkan x' adalah bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x'| < \delta_1$. Dengan demikian, akan berlaku $|f(x') - L| < \epsilon$.

Nah, berdasarkan **Langkah-1**, kita akan selalu bisa menemukan bilangan real y' sedemikian sehingga berlaku $x' = a \cdot y'$.

Dengan demikian, jika bilangan real $a \cdot y'$ memenuhi pertidaksamaan $0 < |a \cdot y'| < \delta_1$, maka juga akan memenuhi pertidaksamaan $|f(a \cdot y') - L| < \epsilon$.

- **Langkah-5**

Kita tetapkan bilangan real positif δ_2 dengan "rumus":

$$\delta_2 = \frac{\delta_1}{a}$$

Dengan demikian, jika x adalah bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan:

$$0 < |x| < \delta_2$$

maka secara ekuivalen (*duh, bahasanya*) bilangan real x tersebut memenuhi pertidaksamaan:

$$0 < |x| < \frac{\delta_1}{a}$$

Nah, akibatnya, jika x adalah bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan:

$$0 < |x| < \delta_2$$

maka akan ada bilangan real z yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |z| < \delta_1$ dan juga memenuhi persamaan $z = a \cdot x$.

Akibatnya (lagi), karena bilangan bilangan real z ini memenuhi pertidaksamaan $0 < |z| < \delta_1$, maka bilangan bilangan real z ini juga akan memenuhi pertidaksamaan $|f(z) - L| < \epsilon$. Karena berlaku persamaan $z = a \cdot x$, maka dengan demikian akan berlaku pertidaksamaan $|f(a \cdot x) - L| < \epsilon$.

- **Kesimpulan**

Jika diketahui $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = L$, maka untuk setiap bilangan real positif ϵ akan selalu terdapat "pasangannya" yaitu bilangan real positif δ_1 sedemikian sehingga setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x| < \delta_1$ juga akan memenuhi pertidaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$.

Dengan demikian, dengan memanfaatkan pasangan (ϵ, δ_1) yang diketahui di atas, jika ditetapkan bilangan real positif δ_2 dengan "rumus":

$$\delta_2 = \frac{\delta_1}{a}$$

maka, setiap bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $0 < |x| < \delta_2$ akan memenuhi pertidaksamaan $|f(a \cdot x) - L| < \epsilon$.

Dengan kata lain, jika $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = L$ dan $a > 0$, maka $\lim\limits_{x \to 0} f(ax) = L$.

■

12

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 1 (a)

Soal

Jika $E = \{x \;:\; x^2 - 4 < 3x\}$, tunjukkan E terbatas! Selanjutnya, tentukan $\sup(E)$ dan $\inf(E)$!

Dikerjakan

Pertama-tama, syarat keanggotaan himpunan E dapat kita definisikan ulang sebagai berikut.

$$E = \{x \;:\; x^2 - 4 < 3x\} \;=\; \{x \;:\; x^2 - 4 - 3x < 0\}$$

Nah, dengan demikian kita bisa menyatakan $x^2 - 4 - 3x$ sebagai fungsi polinomial $P(x)$ sedemikian sehingga:

$$P(x) = x^2 - 4 - 3x$$

dan dengan begitu:

$$E = \{x \;:\; x^2 - 4 - 3x < 0\} \;=\; \{x \;:\; P(x) < 0\}$$

Oke! Jelas kita tahu bahwa polinomial $P(x)$ berderajat 2. Dengan demikian, grafik fungsinya akan berwujud parabola.

Selanjutnya, kita bisa memfaktorkan polinomial $P(x)$ menjadi:

$$P(x) = x^2 - 4 - 3x \;=\; x^2 - 3x - 4 \;=\; (x-4)(x+1)$$

dengan demikian bilangan-bilangan real x yang memenuhi persamaan $P(x) = 0$ tidak lain adalah $x = -1$ dan $x = 4$.

Karena parabola berbentuk simetris, maka titik ekstremum polinomial $P(x)$ pasti berada di tengah-tengah $x = -1$ dan $x = 4$. Kita belum tahu apakah titik ekstremum tersebut adalah titik maksimum ataukah titik minimum.

Salah satu cara untuk menyelidiki apakah titik ekstremum tersebut adalah titik maksimum atau titik minimum adalah dengan cara mengambil sebarang bilangan real x' yang berada di antara $x = -1$ dan $x = 4$ kemudian mengevaluasi nilai dari $P(x')$. Jika diperoleh $P(x') < 0$, maka titik ekstremum tersebut adalah titik minimum. Sebaliknya, jika diperoleh $P(x') > 0$, maka titik ekstremum tersebut adalah titik maksimum. Perhatikan bahwa $P(x') = 0$ tidak mungkin terjadi, karena hanya ada dua titik di mana berlaku $P(x) = 0$, yaitu $x = -1$ dan $x = 4$.

Oke! Kita pilih $x' = 0$ karena bilangan 0 berada di antara -1 dan 4. Kemudian:

$$P(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 - 4 = -4$$

Karena diperoleh hasil $P(x') < 0$, maka kita bisa menyimpulkan bahwa titik ekstremum dari fungsi polinomial $P(x)$ adalah titik minimum. Akibatnya, untuk setiap $x \in (-1, 4)$ akan berlaku $P(x) < 0$.

Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa:

$$E = \{x \ : \ x^2 - 4 - 3x < 0\} \ = \ \{x \ : \ P(x) < 0\} \ = \ \{x \in \mathbb{R} \ : \ -1 < x < 4\} \ = \ (-1, 4)$$

Ya sudah. Karena himpunan E ekuivalen dengan interval $(-1, 4)$, maka kita dapat menyatakan bahwa:

1. Himpunan E terbatas oleh 4, karena untuk setiap $x \in (-1, 4)$ akan berlaku $x < 4$.
2. Supremum himpunan E adalah 4, karena untuk setiap $x \in (-1, 4)$ akan berlaku $x < 4$.
3. Infimum himpunan E adalah -1, karena untuk setiap $x \in (-1, 4)$ akan berlaku $x > -1$.

■

13

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 1 (b)

Soal

Diberikan himpunan terbatas dan tak kosong $A, B \subset \mathbb{R}$. Tunjukkan $A \cap B$ terbatas! Selanjutnya, tentukan $\sup(A \cap B)$ dan $\inf(A \cap B)$!

Dikerjakan

Diketahui himpunan A dan himpunan B tidak kosong. Eh, ingat ya! Walaupun himpunan A dan himpunan B tidak kosong, tetap ada kemungkinan himpunan $A \cap B$ itu kosong lho! Ini untuk kasus ketika himpunan A dan himpunan B saling asing.

Nah, oleh sebab itu kita **asumsikan** himpunan A dan himpunan B tidak saling asing. Dengan demikian, bakal ada suatu elemen x yang termuat di himpunan A sekaligus juga termuat di himpunan B.

Karena himpunan A terbatas, maka akan ada suatu bilangan real positif M_A sedemikian sehingga $a \leq M_A$ untuk setiap $a \in A$. Karena himpunan B terbatas, maka akan ada suatu bilangan real positif M_B sedemikian sehingga $b \leq M_B$ untuk setiap $b \in B$. Ingat ya! M_A dan M_B ini mungkin saja berbeda dan mungkin saja sama.

Nah, karena elemen x yang termuat di himpunan A sekaligus juga termuat di himpunan B, maka akan berlaku $x \leq M_A$ dan $x \leq M_B$. Lebih tepatnya, untuk sebarang $x \in A \cap B$ akan berlaku $x \leq M_A$ dan $x \leq M_B$. Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa himpunan $A \cap B$ terbatas.

Karena himpunan $A \cap B$ terbatas, maka himpunan $A \cap B$ memiliki supremum dan infimum. Kita akan membahas untuk kasus supremum terlebih dahulu. Sebelumnya, karena diketahui himpunan A dan himpunan B terbatas, maka himpunan A dan himpunan B memiliki supremum dan juga infimum.

Sekarang kita ambil sebarang $x \in A \cap B$. Dengan demikian, akan berlaku $x \in A$ dan juga $x \in B$.

Karena himpunan A dan himpunan B memiliki supremum, maka akan berlaku $x \leq \sup(A)$ dan juga $x \leq \sup(B)$. Perhatikan! Baik $\sup(A)$ dan $\sup(B)$ adalah bilangan-bilangan real, yang mana antara keduanya mungkin saja bernilai sama atau mungkin juga bernilai tidak sama.

Nah, jika kita tetapkan bilangan real α sebagai:

$$\alpha = \sup(A), \text{ jika } \sup(A) = \sup(B)$$
atau
$$\alpha = \text{yang terkecil di antara } \sup(A) \text{ dan } \sup(B), \text{ jika } \sup(A) \neq \sup(B)$$

maka α akan menjadi supremum himpunan $A \cap B$.

Kenapa bisa begitu? Khususnya untuk kasus pemilihan sebagai yang terkecil?

Tanpa mengurangi keumuman, kita asumsikan $\sup(A) < \sup(B)$. Dengan demikian, $\alpha = \sup(A)$ dan akibatnya untuk sebarang $x \in A \cap B$ akan berlaku $x < \alpha < \sup(B)$. Ingat! $\sup(A)$ dan $\sup(B)$ adalah batas-batas atas (terkecil). Jika $\sup(A)$ dan $\sup(B)$ berlaku untuk suatu elemen yang sama, maka dengan memilih α sebagai yang terkecil di antara keduanya akan menjadikan α sebagai batas atas yang terkecil sebagaimana definisi dari supremum.

Sebagaimana yang mungkin bisa ditebak, untuk infimum, kita bisa menetapkan bilangan real β sebagai:

$$\beta = \inf(A), \text{ jika } \inf(A) = \inf(B)$$
atau
$$\beta = \text{yang terbesar di antara } \inf(A) \text{ dan } \inf(B), \text{ jika } \inf(A) \neq \inf(B)$$

maka β akan menjadi infimum himpunan $A \cap B$.

■

14

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 2

Soal

Diberikan barisan-barisan (x_n) dan (y_n).
Diketahui $x_n,\ y_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ dan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ keduanya konvergen, selidiki apakah $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$ juga konvergen! Jelaskan jawaban Saudara!

Dikerjakan

Ayo kita perhatikan barisan (a_n) berikut.

$$(a_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \ :\ n \in \mathbb{N} \right) = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, ... \right)$$

Karena n adalah bilangan asli, maka akan berlaku $\sqrt{n+1} > \sqrt{n} > 0$. Akibatnya, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{n+1}$. Dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa barisan (a_n) adalah barisan bilangan real positif yang turun monoton.

Selain itu, barisan (a_n) juga konvergen ke 0 karena untuk sebarang bilangan real positif ϵ, kita dapat menetapkan bilangan asli M sebagai bilangan asli yang memenuhi pertidaksamaan $\epsilon \cdot M > 1$, sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli n yang lebih besar dari M akan berlaku $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$.

Selanjutnya, menggunakan barisan (a_n) kita akan bentuk barisan (x_n) sebagai berikut.

$$(x_n) = \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \;:\; n \in \mathbb{N}\right) = \left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, ...\right)$$

Nah, kita akan menyelidiki apakah deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen atau tidak.

Sebagaimana yang kita tahu, deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen jika dan hanya jika barisan:

$$\left(\sum_{n=1}^{1} x_n,\ \sum_{n=1}^{2} x_n,\ \sum_{n=1}^{3} x_n,\ \sum_{n=1}^{4} x_n,\ ....\right)$$

konvergen.

Akan tetapi, kali ini kita akan menyelidiki apakah deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen atau tidak dengan menggunakan **Leibniz's Test** sebagaimana berikut.

Leibniz's Test

Deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ konvergen jika dan hanya jika 2 syarat berikut dipenuhi.

1. Untuk setiap bilangan asli n berlaku $|a_n| \geq |a_{n+1}|$.
2. Barisan (a_n) konvergen ke 0.

Nah, berdasarkan **Leibniz's Test** di atas, kita bisa menyatakan bahwa deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen.

Kemudian, jika kita tetapkan barisan (y_n) sebagai barisan yang identik dengan barisan (x_n), maka kita akan mendapatkan dua barisan yang konvergen.

Kemudian lagi, jika kita bentuk barisan $(x_n \cdot y_n)$ maka kita akan mendapatkan hasil:

$$\begin{aligned}(x_n \cdot y_n) &= (x_n \cdot y_n \ : \ n \in \mathbb{N}) \\ &= \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ : \ n \in \mathbb{N}\right) \\ &= \left(\frac{(-1)^{2n}}{(\sqrt{n})^2} \ : \ n \in \mathbb{N}\right) \\ &= \left(\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right)\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen. Oleh sebab itu, berdasarkan contoh di atas, jika diketahui barisan-barisan konvergen (x_n) dan (y_n) dengan $x_n, \ y_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$ **belum tentu konvergen!**

Catatan:
Penjelasan mengapa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen ada di halaman berikutnya.

■

15

Ekstra 1

Soal

Buktikan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen!

Dikerjakan

Pembuktian deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen sebagaimana yang dijelaskan di tulisan ini disadur dari pembuktian elegan oleh matematikawan Prancis pada abad ke-14 yang bernama **Nicolas Oresme**.

Sekedar informasi, deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ dikenal secara internasional sebagai ***Harmonic Series***.

Kita akan memakai **Comparison Test** untuk membuktikan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen.

Comparison Test

Diketahui deret $\sum a_n$ dan $\sum b_n$ dengan $a_n, b_n \geq 0$ dan $b_n \leq a_n$ untuk setiap bilangan asli n.

1. Jika deret $\sum a_n$ konvergen, maka deret $\sum b_n$ juga konvergen.
2. Jika deret $\sum b_n$ divergen, maka deret $\sum a_n$ juga divergen.

Sebagai awalan, kita bentuk barisan $(a_n) = \left(\dfrac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right) = \left(1, \ \dfrac{1}{2}, \ \dfrac{1}{3}, \ \dfrac{1}{4}, \ \dfrac{1}{5}, \ ....\right)$

Dengan demikian, kita peroleh $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_3 = \dfrac{1}{3}$, dst atau dengan kata lain $a_n = \dfrac{1}{n}$ untuk setiap bilangan asli n.

Nah, selanjutnya (ini yang menarik!) kita akan buat barisan (b_n) yang didefinisikan sebagai:

$$(b_n) = \left(\text{nilai } \tfrac{1}{2^m} \text{ yang paling besar sedemikian sehingga } \tfrac{1}{2^m} \leq a_n \ (m \in \mathbb{Z}^+) \ : \ n \in \mathbb{N}\right)$$

Definisi suku b_n yang "sedikit" membingungkan di atas bisa kita jabarkan menjadi seperti ini.

- $b_1 :=$ nilai $\frac{1}{2^m}$ yang paling besar sedemikian sehingga berlaku $\frac{1}{2^m} \leq a_1$.
- $b_2 :=$ nilai $\frac{1}{2^m}$ yang paling besar sedemikian sehingga berlaku $\frac{1}{2^m} \leq a_2$.
- $b_3 :=$ nilai $\frac{1}{2^m}$ yang paling besar sedemikian sehingga berlaku $\frac{1}{2^m} \leq a_3$.
- $b_4 :=$ nilai $\frac{1}{2^m}$ yang paling besar sedemikian sehingga berlaku $\frac{1}{2^m} \leq a_4$.
- $b_5 :=$ nilai $\frac{1}{2^m}$ yang paling besar sedemikian sehingga berlaku $\frac{1}{2^m} \leq a_5$.
- dst...

Penjabaran di atas ekuivalen dengan ini.

- $b_1 :=$ nilai $\frac{1}{2^m}$ yang paling besar sedemikian sehingga berlaku $\frac{1}{2^m} \leq 1$.
- $b_2 :=$ nilai $\frac{1}{2^m}$ yang paling besar sedemikian sehingga berlaku $\frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2}$.
- $b_3 :=$ nilai $\frac{1}{2^m}$ yang paling besar sedemikian sehingga berlaku $\frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{3}$.
- $b_4 :=$ nilai $\frac{1}{2^m}$ yang paling besar sedemikian sehingga berlaku $\frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{4}$.
- $b_5 :=$ nilai $\frac{1}{2^m}$ yang paling besar sedemikian sehingga berlaku $\frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{5}$.
- dst...

"Penyelesaian" dari penjabaran di atas adalah seperti di bawah ini.

- $b_1 = 1$, karena 1 adalah nilai $\frac{1}{2^m}$ yang paling besar (dipenuhi oleh $m = 0$) sedemikian sehingga berlaku:
  $b_1 = \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^0} = 1 \quad \leq \quad a_1 = 1$.
- $b_2 = \frac{1}{2}$, karena $\frac{1}{2}$ adalah nilai $\frac{1}{2^m}$ yang paling besar (dipenuhi oleh $m = 1$) sedemikian sehingga berlaku:
  $b_2 = \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} \quad \leq \quad a_2 = \frac{1}{2}$.
- $b_3 = \frac{1}{4}$, karena $\frac{1}{4}$ adalah nilai $\frac{1}{2^m}$ yang paling besar (dipenuhi oleh $m = 2$) sedemikian sehingga berlaku:
  $b_3 = \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad \leq \quad a_3 = \frac{1}{3}$.
- $b_4 = \frac{1}{4}$, karena $\frac{1}{4}$ adalah nilai $\frac{1}{2^m}$ yang paling besar (dipenuhi oleh $m = 2$) sedemikian sehingga berlaku:
  $b_4 = \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad \leq \quad a_4 = \frac{1}{4}$.
- $b_5 = \frac{1}{8}$, karena $\frac{1}{8}$ adalah nilai $\frac{1}{2^m}$ yang paling besar (dipenuhi oleh $m = 3$) sedemikian sehingga berlaku:
  $b_5 = \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad \leq \quad a_5 = \frac{1}{5}$.

  ...
- $b_8 = \frac{1}{8}$, karena $\frac{1}{8}$ adalah nilai $\frac{1}{2^m}$ yang paling besar (dipenuhi oleh $m = 3$) sedemikian sehingga berlaku:
  $b_8 = \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad \leq \quad a_8 = \frac{1}{8}$.
- $b_9 = \frac{1}{16}$, karena $\frac{1}{16}$ adalah nilai $\frac{1}{2^m}$ yang paling besar (dipenuhi oleh $m = 4$) sedemikian sehingga berlaku:
  $b_9 = \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \quad \leq \quad a_9 = \frac{1}{9}$.

  ...
- $b_{16} = \frac{1}{16}$, karena $\frac{1}{16}$ adalah nilai $\frac{1}{2^m}$ yang paling besar (dipenuhi oleh $m = 4$) sedemikian sehingga berlaku:
  $b_{16} = \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \quad \leq \quad a_{16} = \frac{1}{16}$.
- $b_{17} = \frac{1}{16}$, karena $\frac{1}{32}$ adalah nilai $\frac{1}{2^m}$ yang paling besar (dipenuhi oleh $m = 5$) sedemikian sehingga berlaku:
  $b_{17} = \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} \quad \leq \quad a_{17} = \frac{1}{32}$.

  ...
- $b_{32} = \frac{1}{16}$, karena $\frac{1}{32}$ adalah nilai $\frac{1}{2^m}$ yang paling besar (dipenuhi oleh $m = 5$) sedemikian sehingga berlaku:
  $b_{32} = \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} \quad \leq \quad a_{32} = \frac{1}{32}$.
- dst...

Hadeh... panjang... capek ngetiknya....

Singkat cerita, kita akan punya barisan (b_n) seperti berikut.

$$(b_n) = \left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ ...,\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ ...,\ \frac{1}{16},\ ...\right)$$

Apabila diperhatikan lebih saksama, suku-suku barisan (b_n) bisa kita identifikasi lagi sebagai berikut.

- Barisan (b_n) memuat 2 suku bernilai $\frac{1}{4}$, yaitu b_3 dan b_4.
- Barisan (b_n) memuat 4 suku bernilai $\frac{1}{8}$, yaitu b_5 hingga b_8.
- Barisan (b_n) memuat 8 suku bernilai $\frac{1}{16}$, yaitu b_9 hingga b_{16}.
- Barisan (b_n) memuat 16 suku bernilai $\frac{1}{32}$, yaitu b_{17} hingga b_{32}.
- Barisan (b_n) memuat 32 suku bernilai $\frac{1}{64}$, yaitu b_{33} hingga b_{64}.
- dst...

Kemudian, apabila deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ dijabarkan akan diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} b_n &= b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + ... \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + ... + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + ... + \frac{1}{16}\right) + ... \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \frac{16}{32} + \frac{32}{64} + ... \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergen.

Jadi, berdasarkan **Comparison Test**, karena deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergen, maka deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ juga divergen.

■

16

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 3

Soal

Show that $A \subset \mathbb{R}$ is closed if and only A contains all of its limit point.

Dikerjakan

Ayo kita jawab soal ini menggunakan dasar-dasar ilmu **Topologi** yang berlaku umum, tidak hanya terbatas di $\mathbb{R}$!

Sebelumnya ayo kita paparkan dulu definisi-definisi yang dipakai!

Definisi dan Sifat Umum

Himpunan A adalah himpunan tertutup jika dan hanya jika himpunan A^c adalah himpunan terbuka.

Elemen $x \in A$ disebut sebagai ***interior point*** atau **titik interior** himpunan A jika dan hanya jika terdapat himpunan terbuka O sedemikian sehingga $x \in O$ dan $O \subseteq A$.

Himpunan A adalah himpunan terbuka jika dan hanya jika setiap elemennya adalah *interior point* himpunan A.

Elemen x disebut sebagai ***limit point*** atau **titik limit** himpunan A jika dan hanya jika setiap himpunan terbuka yang memuat elemen x juga memuat elemen himpunan A dan elemen yang termuat di himpunan A tersebut bukan x.

Oke! Kita akan menunjukkan bahwa:

Himpunan A adalah himpunan tertutup jika dan hanya jika A memuat semua titik limitnya.

dengan cara menunjukkan kebenaran dua pernyataan berikut.

1. Jika himpunan A adalah himpunan tertutup, maka himpunan A memuat semua titik limitnya.
2. Jika himpunan A memuat semua titik limitnya, maka himpunan A adalah himpunan tertutup.

- **1. Menunjukkan kebenaran pernyataan 1.**

Kita akan menunjukkan kebenaran pernyataan berikut:

Jika himpunan A adalah himpunan tertutup, maka himpunan A memuat semua titik limitnya.

dengan metode **Reductio ad Absurdum**. Caranya, kita akan mengandaikan bahwa ingkaran pernyataan di atas, yaitu:

Himpunan A adalah himpunan tertutup dan himpunan A tidak memuat semua titik limitnya.

berlaku benar. Kemudian, kita akan melakukan serangkaian penalaran sedemikian sehingga memunculkan suatu kontradiksi dan dengan demikian pernyataan aslinya akan terbukti benar.

Oke! Kita andaikan pernyataan di bawah ini berlaku benar.

Himpunan A adalah himpunan tertutup dan himpunan A tidak memuat semua titik limitnya.

Karena semua titik limit himpunan A tidak termuat di dalam himpunan tersebut, maka ada suatu titik limit himpunan A, sebut saja y, sedemikian sehingga $y \in A^c$. Berdasarkan **Definisi dan Sifat Umum** di atas, karena y adalah titik limit himpunan A, maka setiap himpunan terbuka yang memuat elemen y juga memuat elemen himpunan A dan elemen yang termuat di himpunan A tersebut bukan y. (*1)

Nah, sekarang kita beralih mengamati himpunan A. Karena himpunan A adalah himpunan tertutup, maka himpunan A^c adalah himpunan terbuka. Dengan demikian, berdasarkan **Definisi dan Sifat Umum** di atas, semua elemen di dalam himpunan A^c adalah *interior point* himpunan A^c. Dengan demikian, untuk sebarang $x \in A^c$ akan terdapat suatu himpunan terbuka O sedemikian sehingga $x \in O$ dan $O \subseteq A^c$. (*2)

Naaah, sekarang balik lagi kita ke elemen $y \in A^c$ yang merupakan titik limit himpunan A. Berdasarkan (*2) akan terdapat suatu himpunan terbuka O sedemikian sehingga $y \in O$ dan $O \subseteq A^c$. Karena $O \subseteq A^c$, maka semua elemen di himpunan O adalah elemen di himpunan A^c. Dengan kata lain lagi, himpunan O **sama sekali tidak memuat** satu pun elemen himpunan A.

Nah ini! **Muncul kontradiksi!**

Menurut (*1), setiap himpunan terbuka yang memuat elemen y juga memuat elemen himpunan A dan elemen yang termuat di himpunan A tersebut bukan y. Perhatikan! Himpunan O itu kan himpunan terbuka yang memuat y. Menurut (*1), himpunan O akan memuat elemen himpunan A dan elemen yang termuat di himpunan A tersebut bukan y. **Padahal**, menurut (*2), himpunan O **sama sekali tidak memuat** satu pun elemen himpunan A.

Kontradiksi kan?

Oleh sebab itu, pernyataan bahwa:

Himpunan A adalah himpunan tertutup dan himpunan A tidak memuat semua titik limitnya.

adalah **salah**. Jadi yang benar adalah pernyataan:

Jika himpunan A adalah himpunan tertutup, maka himpunan A memuat semua titik limitnya.

- **2. Menunjukkan kebenaran pernyataan 2.**

Kita akan menunjukkan kebenaran pernyataan berikut:

Jika himpunan A memuat semua titik limitnya, maka himpunan A adalah himpunan tertutup.

dengan cara menunjukkan bahwa himpunan A^{c} adalah himpunan terbuka.

Oke, kita ambil sebarang $x \in A^{c}$. Dengan demikian akan berlaku $x \notin A$.

Karena diketahui bahwa himpunan A memuat semua titik limitnya, maka elemen x ini bukan titik limit himpunan A. Dengan demikian, akan ada suatu himpunan terbuka O yang memuat elemen x, akan tetapi... himpunan O ini tidak memuat elemen lain di himpunan A selain x. Dengan kata lain, kemungkinan hasil dari $O \cap A$ kalau tidak $\{x\}$ ya himpunan kosong.

Seandainya, hasil dari $O \cap A$ adalah $\{x\}$, maka akan berakibat elemen x termuat di himpunan O dan himpunan A. Akan tetapi, karena x adalah sebarang elemen di A^{c}, akibatnya elemen x tidak mungkin termuat di dalam himpunan A. Oleh sebab itu, kemungkinan hasil dari $O \cap A$ adalah $\{x\}$ **tidak mungkin terjadi**! Dengan demikian, satu-satunya kemungkinan yang terjadi adalah hasil dari $O \cap A$ adalah himpunan kosong, yang berarti himpunan O dan himpunan A saling asing.

Naaah ini! Karena himpunan O dan himpunan A saling asing, itu artinya himpunan O termuat di dalam himpunan A^{c}. Dengan kata lain, $O \subseteq A^{c}$.

Jadi, kita bisa menyimpulkan bahwa:

Untuk sebarang elemen $x \in A^{c}$ akan terdapat himpunan terbuka O sedemikian sehingga elemen x termuat di O dan $O \subseteq A^{c}$.

dengan kata lain berdasarkan **Definisi dan Sifat Umum** di atas, kita dapat menyatakan bahwa:

Sebarang elemen $x \in A^{c}$ adalah titik interior himpunan A^{c}.

dengan demikian, kita bisa menyatakan bahwa A^{c} adalah himpunan terbuka dan akibatnya himpunan A adalah himpunan tertutup.

■

17

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 4

Soal

Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(x+y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Jika $\lim_{x \to 0} f(x)$ ada, tunjukkan:

(a) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

(b) $\lim_{x \to c} f(x)$ ada untuk setiap $c \in \mathbb{R}$.

Dikerjakan

Hmmm...

Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(x+y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

Kok jadi definisi homomorfisma ya?

Eh, tapi ini kan mata kuliah analisis ya? Jadi, jawabnya harus pakai "cara-cara" analisis ya?

Boleh nggak sih pakai "sedikit" teorema struktur aljabar?

Okelah. Pertama-tama, karena diketahui $\lim_{x\to 0} f(x)$ ada, maka $\lim_{x\to 0} f(x) = L$ untuk suatu bilangan real L.

Kemudian, menggunakan sifat penjumlahan limit, kita akan memperoleh persamaan:

$$\lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (f(x) + f(x)) \quad (*\ 1)$$

Karena $f(x+y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$, maka kita akan memperoleh persamaan:

$$\lim_{x\to 0} (f(x) + f(x)) \;=\; \lim_{x\to 0} f(x+x)$$

Perhatikan!

Ketika $x \to 0$, maka $x + x \to 0$.

Dengan demikian, $\lim_{x\to 0} f(x+x)$ akan ekuivalen dengan $\lim_{x\to 0} f(x)$, atau dengan kata lain:

$$\lim_{x\to 0} f(x+x) = \lim_{x\to 0} f(x) = L$$

Kembali ke persamaan (* 1), maka kita akan memperoleh persamaan:

$$\lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x)$$

atau dengan kata lain:

$$L + L = L$$

yang tidak lain adalah:

$$L = L - L \iff L = 0$$

Jadi, kita bisa menyatakan bahwa $\lim_{x\to 0} f(x) = L = 0$.

***

Kemudian untuk $\lim_{x \to c} f(x)$, maka kita bisa melakukan substitusi $y = x - c$. Sehingga, apabila $x \to c$ akan berakibat $x - c \to 0$, atau dengan kata lain $y \to 0$.

Dengan demikian, kita akan memperoleh persamaan:

$$\lim_{x \to c} f(x) \;=\; \lim_{y \to 0} f(y + c)$$

Karena $f(x + y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$, maka kita akan memperoleh persamaan:

$$\lim_{y \to 0} f(y + c) \;=\; \lim_{y \to 0} (f(y) + f(c))$$

Kemudian, menggunakan sifat penjumlahan limit, kita akan memperoleh persamaan:

$$\lim_{y \to 0} (f(y) + f(c)) \;=\; \lim_{y \to 0} f(y) + \lim_{y \to 0} f(c)$$

Karena berdasarkan pengerjaan poin (a), kita memperoleh persamaan $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, maka kita akan memperoleh persamaan:

$$\lim_{y \to 0} (f(y) + f(c)) \;=\; \lim_{y \to 0} f(y) + \lim_{y \to 0} f(c) = 0 + \lim_{y \to 0} f(c) = \lim_{y \to 0} f(c)$$

Jelas bahwa $\lim_{y \to 0} f(c) = f(c)$. Dengan demikian, pada akhirnya kita akan punya persamaan:

$$\lim_{x \to c} f(x) \;=\; \lim_{y \to 0} f(y + c) = \lim_{y \to 0} (f(y) + f(c)) = \lim_{y \to 0} f(c) = f(c)$$

Jelas $f(c)$ ada karena kan diketahui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang menjamin $f(x)$ akan selalu terdefinisi dengan baik untuk sebarang $x \in \mathbb{R}$.

Jadi, kita bisa menyatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x)$ itu ada dan terdefinisi dengan baik karena $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ dan domain fungsi f adalah $\mathbb{R}$.

■

18

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 5 (a)

Soal

Jika fungsi $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ kontinu dan $g(0) = g(1)$, tunjukkan ada $c \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ sehingga $g(c) = g\left(c + \dfrac{1}{2}\right)$.

Dikerjakan

Pertama-tama, supaya mudah, kita notasikan $g(0) = g(1) = L$ untuk suatu bilangan real L.

Karena fungsi g kontinu di interval $[0, 1]$, maka $g\left(\frac{1}{2}\right)$ ada dan terdefinisi dengan baik. Supaya mudah, kita notasikan $g\left(\frac{1}{2}\right) = M$ untuk suatu bilangan real M.

Terkait nilai dari L dan M, akan ada 2 kemungkinan yang bisa terjadi, yaitu:

- $L = M$, atau
- $L \neq M$.

Jika kemungkinan yang terjadi $L = M$, maka akan berlaku persamaan $g(0) = g(1) = g\left(\frac{1}{2}\right)$. Dengan demikian, kita dapat menetapkan $c = 0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ sedemikian sehingga berlaku:

$$g(c) = g(0) \text{ dan } g\left(c + \tfrac{1}{2}\right) = g\left(0 + \tfrac{1}{2}\right) = g\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

Jika kemungkinan yang terjadi $L \neq M$, maka akan berlaku pertidaksamaan $L < M$ atau $M < L$.

Sekarang, kita misalkan yang berlaku adalah pertidaksamaan $L < M$. Eh iya, tulisan ini tidak akan menjelaskan ketika yang berlaku adalah pertidaksamaan $M < L$ karena penjelasannya kurang-lebihnya mirip jika yang berlaku adalah pertidaksamaan $L < M$.

Oke!

Jika yang berlaku adalah pertidaksamaan $L < M$, maka akan berlaku pertidaksamaan:

- $g(0) < g\left(\frac{1}{2}\right)$, dan
- $g(1) < g\left(\frac{1}{2}\right)$.

Kemudian, kita bentuk fungsi h dengan definisi:

$$h(x) = g(x) - g\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

untuk setiap $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Karena fungsi g kontinu di interval $[0, 1]$, maka selisihnya juga merupakan fungsi kontinu. Dengan demikian, fungsi h kontinu di interval $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Selanjutnya, kita akan menyelidiki nilai dari $h(0)$ dan $h\left(\frac{1}{2}\right)$ sebagai berikut.

- $h(0) = g(0) - g\left(0 + \frac{1}{2}\right) = g(0) - g\left(\frac{1}{2}\right)$. Karena $g(0) < g\left(\frac{1}{2}\right)$, maka kita bisa menyimpulkan bahwa $g(0) - g\left(\frac{1}{2}\right)$ adalah bilangan negatif. Dengan kata lain, $h(0) < 0$.
- $h\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) - g(1)$. Karena $g(1) < g\left(\frac{1}{2}\right)$, maka kita bisa menyimpulkan bahwa $g\left(\frac{1}{2}\right) - g(1)$ adalah bilangan positif. Dengan kata lain, $h\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

Nah! Karena:

- h adalah fungsi kontinu di interval $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$,
- berlaku pertidaksamaan $h(0) < 0$ serta $h\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, dan
- bilangan 0 berada di antara $h(0)$ dan $h\left(\frac{1}{2}\right)$ (yaitu, $h(0) < 0 < h\left(\frac{1}{2}\right)$)

maka berdasarkan teorema berikut:

Intermediate Value Theorem

Diketahui fungsi real f kontinu di interval $[a, b]$. Jika $f(a) \neq f(b)$ dan L adalah bilangan real yang berada di antara $f(a)$ dan $f(b)$ (yaitu, $f(a) < L < f(b)$), maka terdapat $c \in [a, b]$ sedemikian sehingga berlaku $L = f(c)$.

akan terdapat $c \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ sedemikian sehingga berlaku $h(c) = 0$.

Karena $h(x) = g(x) - g\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$, maka $h(c) = 0 \iff g(c) - g\left(c + \dfrac{1}{2}\right) = 0$. Dengan kata lain berlaku persamaan $g(c) = g\left(c + \dfrac{1}{2}\right)$.

■

19

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 5 (b)

Soal

Tunjukkan $x^4 + 7x^2 - 9 = 0$ sekurang-kurangnya mempunyai 2 akar real !

Dikerjakan

Nah, ini ceritanya aku sedang **sangat malas untuk menghitung hingga detil** dan juga **sangat malas untuk menggambar lengkap grafik fungsi polinomial**.

Tapi, aku masih ingin mengerjakan soal ini.

Lha, terus gimana dong?

Ya coba kita kerjakan dengan cara yang "ringkas".

Hmmm... hmmm... hmmm...

Kita substitusikan $y = x^2$. Dengan demikian, kita akan punya persamaan:

$$y^2 + 7y - 9 = 0$$

Kita sebut $y^2 + 7y - 9$ sebagai polinomial P sedemikian sehingga $P(y) = y^2 + 7y - 9$.

Sebagaimana yang jelas kita tahu, polinomial P berderajat 2. Artinya, grafik fungsi polinomial P berbentuk **parabola**. Kita tahu bahwa grafik parabola **pasti** akan memotong sumbu X di dua titik. Ya nggak?

Ya... masalahnya ya karena **aku sedang sangat malas untuk menghitung hingga detil**, jadi kita nggak akan mencari tahu secara pasti titik potong grafik fungsi polinomial P dengan sumbu X.

Kita akan mencari tahu karakteristik yang "gampang" saja, yaitu:

Parabola fungsi polinomial P ini **terbuka ke atas** atau **ke bawah** ya?

Pertama-tama, kita cari tahu dulu **titik ekstremum** fungsi P dengan menggunakan teorema berikut.

Titik Ekstremum dan Derivatif

Diketahui fungsi f memiliki derivatif pertama di titik c.

Jika c adalah titik ekstremum fungsi real f, maka akan berlaku $f'(c) = 0$.

Ayo kita tentukan derivatif pertama dari fungsi polinomial P, yaitu P'.

$$P'(y) = \frac{d}{dy}P(y) = \frac{d}{dy}\left(y^2 + 7y - 9\right) = 2y + 7$$

Kemudian, berdasarkan teorema di atas, jika titik c adalah titik ekstremum fungsi polinomial P, maka akan berlaku $P'(c) = 0$.

Apakah ada $c \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $P'(c) = 0$?

Ya ada dong!

$$P'(c) = 0 \iff 2c + 7 = 0 \iff c = -\frac{7}{2}$$

Nah, sekarang kita tahu bahwa $c = -\frac{7}{2}$ adalah titik ekstremum fungsi polinomial P.

Sekarang pertanyannya:

Titik ekstremum $c = -\frac{7}{2}$ ini apakah **titik maksimum** atau **titik minimum** ya?

Coba kita masukkan titik $c = -\frac{7}{2}$ ke fungsi polinomial P sebagai berikut.

$$P\left(-\frac{7}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 7\left(-\frac{7}{2}\right) - 9 = \frac{49 - 98 - 36}{4}$$

Oke, tanpa perlu diselesaikan hitungannya, kita tahu bahwa $P\left(-\frac{7}{2}\right)$ bernilai negatif. Yang artinya, "puncak atau dasar" parabola fungsi polinomial P berada di bawah sumbu X.

Selanjutnya, kita akan menyelidiki apakah parabola fungsi polinomial P memotong sumbu Y dengan cara menghitung $P(0)$.

$$P(0) = 0^2 + 7 \cdot 0 - 9 = -9$$

Jadi, parabola fungsi polinomial P memotong sumbu Y di koordinat $(0, -9)$.

Iseng-iseng, kita hitung $P(100) = 100^2 + 7 \cdot 100 - 9 = 10.000 + 700 - 9$. Tanpa perlu menyelesaikan perhitungan, kita bisa menyimpulkan bahwa $P(100)$ adalah bilangan real positif.

Nah!

Karena $-\frac{7}{2} < 0 < 100$ dan berlaku $P(0) < P(100)$, maka kita bisa menyimpulkan bahwa fungsi polinomial P naik dari titik ekstremum $c = -\frac{7}{2}$. Jadi, titik ekstremum c adalah titik minimum fungsi polinomial P dan dengan demikian parabola fungsi polinomial P terbuka ke atas.

Dengan demikian, menurut teorema berikut:

> ***Intermediate Value Theorem***
>
> Diketahui fungsi real f kontinu di interval $[a, b]$. Jika $f(a) \neq f(b)$ dan L adalah bilangan real yang berada di antara $f(a)$ dan $f(b)$ (yaitu, $f(a) < L < f(b)$), maka terdapat $c \in [a, b]$ sedemikian sehingga berlaku $L = f(c)$.

karena:

- Fungsi polinomial P kontinu di $\mathbb{R}$, termasuk di interval $[0, 100]$.
- $P(0) = -9 < 0$ dan $P(100) > 0$. Akibatnya, bilangan 0 berada di antara $P(0)$ dan $P(100)$.

maka, berdasarkan ***Intermediate Value Theorem*** di atas, akan terdapat $d \in [0, 100]$ sedemikian sehingga berlaku $P(d) = 0$.

Perhatikan!

Karena $d \in [0, 100]$, maka d adalah bilangan real positif.

Karena berlaku $P(d) = 0$, maka ekuivalen dengan berlakunya persamaan $d^2 + 7d - 9 = 0$.

Karena polinomial $P(y) = y^2 + 7y - 9$ terbentuk dengan mensubstitusikan $y = x^2$, maka akan berlaku persamaan $d = (\bar{x})^2$ untuk suatu $\bar{x} \in \mathbb{R}$.

Karena d adalah bilangan real positif, maka kita dapat menetapkan bilangan real $\bar{x}_1 = \sqrt{d}$ dan $\bar{x}_2 = -\sqrt{d}$ sedemikian sehingga akan berlaku persamaan $d = (\bar{x}_1)^2 = (\bar{x}_2)^2$.

Jadi, terbukti bahwa $x^4 + 7x^2 - 9 = 0$ sekurang-kurangnya mempunyai 2 akar real, yaitu $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ sebagaimana yang sudah dipaparkan di atas itu.

$\blacksquare$