Pembahasan Ujian Tengah Semester TA 2019/2020 untuk Mata Kuliah:

Aljabar Linear Elementer

Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Gadjah Mada
Yogyakarta

Mawi Wijna *

Desember 2020

*Walaupun pembahasan soal ujian ini belum tentu benar, akan tetapi semoga ada manfaatnya meskipun sedikit. Dibuat untuk mengisi waktu luang sambil menidurkan bayi. :p

Soal

1. Diberikan sistem persamaan linear yang disajikan dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2-a \\ 0 & 0 & a-2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3a-3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

   (a) Tentukan semua nilai a sehingga SPL di atas **tidak memiliki penyelesaian**!

   (b) Tentukan semua nilai a sehingga SPL di atas **memiliki tak hingga banyak penyelesaian**!

2. Diberikan

   - Matriks A berukuran $n \times n$ dengan entri-entri bilangan Real, dan
   - Vektor $\bar{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$.

   Jika diketahui $\bar{\boldsymbol{x}}_1, \bar{\boldsymbol{x}}_2 \in \mathbb{R}^n$ berturut-turut merupakan penyelesaian dari sistem persamaan linear $A\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{b}}$ dan $A\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{0}}$, buktikan bahwa untuk setiap $r \in \mathbb{R}$, $\bar{\boldsymbol{x}}_1 + r\bar{\boldsymbol{x}}_2$ merupakan penyelesaian dari sistem persamaan linear $A\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{b}}$!

3. Use Cramer's rule to solve the following system of linear equation.

$$\begin{aligned} 2a + 3b - c &= 7 \\ 3a - 2b + c &= 0 \\ a + b + 2c &= 5 \end{aligned}$$

4. Diberikan matriks A dan B sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 3 & 11 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

   Tentukan matriks invertibel E sehingga $EA = B$!

5. Diberikan vektor-vektor $\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{c}} \in \mathbb{R}^3$ sebagai berikut.

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} 4 \\ x+2 \\ y \end{bmatrix}, \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -z \end{bmatrix}, \text{ dan } \bar{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Diketahui bahwa vektor $\bar{\boldsymbol{a}}$ sejajar dengan vektor $\bar{\boldsymbol{b}}$ dan $\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} 8 \\ -28 \\ -24 \end{bmatrix}$.

   (a) Tentukan nilai x,y, dan z!

   (b) Jika vektor $\bar{\boldsymbol{d}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, tentukan $\bar{\boldsymbol{b}} \cdot \bar{\boldsymbol{d}}$!

Pembahasan Soal Nomor 1

Soal
Diberikan sistem persamaan linear yang disajikan dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2-a \\ 0 & 0 & a-2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3a-3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1. Tentukan semua nilai a sehingga SPL di atas **tidak memiliki penyelesaian**!
2. Tentukan semua nilai a sehingga SPL di atas **memiliki tak hingga banyak penyelesaian**!

Pembahasan
Suatu SPL memiliki penyelesaian tunggal jika determinan matriks koefisien tersebut $\neq 0$.
Sebaliknya, suatu SPL memiliki penyelesaian yang tidak tunggal jika determinan matriks koefisien tersebut $= 0$.
Dengan demikian kita akan menyelidiki determinan matriks koefisien SPL pada soal.
Sebut matriks koefisien SPL pada soal ini sebagai matriks A, yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2-a \\ 0 & 0 & a-2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, determinan dari A adalah

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2-a \\ 0 & a-2 & 6 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} a-2 & 6 \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & a \end{vmatrix} + (2-a) \begin{vmatrix} 0 & a-2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) - 2 \left(\begin{vmatrix} 0 & a-2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= 2a^2 - 6a - 8 \\ &= (2)(a-4)(a+1) \end{aligned}$$

Jadi, $|A| = 0$ jika dan hanya jika $a = 4$ atau $a = -1$.
Selanjutnya, substitusikan kemungkinan nilai a yang kita peroleh ini ke SPL pada soal dan mencermati hasil apa yang akan terjadi.

***

Jika $a = 4$ maka matriks SPL pada soal akan menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Kemudian digunakan metode eliminasi Gauss untuk menyederhanakan SPL di atas.

- Kondisi Awal $= \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right]$

- Baris ke-2 = Baris ke-2 $\times 1/2$:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right] \underset{\text{menjadi}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9/2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right]$$

- Baris ke-4 = Baris ke-4 $-$ Baris ke-2:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9/2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right] \underset{\text{menjadi}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9/2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right]$$

- Baris ke-4 = Baris ke-4 $\times 1/2$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9/2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right] \underset{\text{menjadi}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

Perhatikan baris ke-3 dan baris ke-4 pada SPL yang telah disederhanakan (ruas kanan) di atas!
Baris ke-3 dan baris ke-4 ini berturut-turut menyatakan:

- $x_3 + 3x_4 = 9/2$
- $x_3 + 3x_4 = 2$

Karena dua persamaan di atas memiliki bentuk jumlahan perkalian peubah bebas dan konstanta yang sama akan tetapi memiliki *constant terms* yang berbeda, maka dua persamaan linear di atas adalah persamaan linear yang inkonsisten. Dua persamaan linear yang inkonsisten tidak memiliki penyelesaian. Tidak ada nilai x_3 dan x_4 yang memenuhi 2 persamaan di atas.

Jadi, untuk $a = 4$ akan mengakibatkan SPL menjadi tidak memiliki penyelesaian.

***

Jika $a = -1$ maka matriks SPL pada soal akan menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Kemudian digunakan metode eliminasi Gauss untuk menyederhanakan SPL di atas.

- Kondisi Awal = $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right]$

- Baris ke-3 = Baris ke-3 $\times(-1/3)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \underset{\text{menjadi}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right]$$

- Baris ke-4 = Baris ke-4 $-$ Baris ke-2:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \underset{\text{menjadi}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

- Baris ke-4 = Baris ke-4 $-(2 \times$ Baris ke-3):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 4 \end{array}\right] \underset{\text{menjadi}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  Perhatikan bahwa seluruh elemen pada baris ke-4 akan menjadi 0 (termasuk *constant term*-nya). Dengan demikian, SPL ini akan memiliki tak hingga banyak penyelesaian. Kita akan melanjutkan proses eliminasi Gauss untuk mengetahui seperti apa wujud tak hingga banyak penyelesaian tersebut.

- Baris ke-2 = Baris ke-2 +Baris ke-3:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\text{menjadi}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Diperoleh hasil:

- $x_1 = 2 - 2x_4$
- $x_2 = 3 - x_4$

- $x_3 = 2 + 2x_4$
- $x_4 =$ tidak ada syarat, dengan kata lain bebas

Jadi, untuk $a = -1$ akan mengakibatkan SPL pada soal memiliki tak hingga banyak penyelesaian. Vektor $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x4 \end{bmatrix}$ yang menjadi penyelesaian SPL tersebut adalah $\begin{bmatrix} 2-2r \\ 3-r \\ 2+2r \\ r \end{bmatrix}$ untuk sebarang $r \in \mathbb{R}$.

Pembahasan Soal Nomor 2

Soal
Diberikan

- Matriks A berukuran $n \times n$ dengan entri-entri bilangan Real, dan
- Vektor $\bar{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$.

Jika diketahui $\bar{\boldsymbol{x}}_1, \bar{\boldsymbol{x}}_2 \in \mathbb{R}^n$ berturut-turut merupakan penyelesaian dari sistem persamaan linear $A\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{b}}$ dan $A\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\mathbf{0}}$, buktikan bahwa untuk setiap $r \in \mathbb{R}$, $\bar{\boldsymbol{x}}_1 + r\bar{\boldsymbol{x}}_2$ merupakan penyelesaian dari sistem persamaan linear $A\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{b}}$!

Pembahasan
Diketahui $\bar{\boldsymbol{x}}_1$ adalah penyelesaian dari sistem persamaan linear $A\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{b}}$.
Jadi, $A\bar{\boldsymbol{x}}_1 = \bar{\boldsymbol{b}}$.

Diketahui pula $\bar{\boldsymbol{x}}_2$ adalah penyelesaian dari sistem persamaan linear $A\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\mathbf{0}}$.
Jadi, $A\bar{\boldsymbol{x}}_2 = \bar{\mathbf{0}}$.

Selanjutnya, ambil sebarang $r_0 \in \mathbb{R}$.
Kemudian, bentuklah vektor $\bar{\boldsymbol{y}}$ dengan definisi $\bar{\boldsymbol{y}} = \bar{\boldsymbol{x}}_1 + r_0\bar{\boldsymbol{x}}_2$.
Karena $\bar{\boldsymbol{x}}_1 \in \mathbb{R}^n$ dan $r_0\bar{\boldsymbol{x}}_2 \in \mathbb{R}^n$, maka jelas $\bar{\boldsymbol{x}}_1 + r_0\bar{\boldsymbol{x}}_2 \in \mathbb{R}^n$.
Jadi, vektor $\bar{\boldsymbol{y}}$ yang baru dibentuk itu juga merupakan elemen di $\mathbb{R}^n$.

Kemudian, vektor $\bar{\boldsymbol{y}}$ dioperasikan dengan A dari kiri.
Diperolehlah $A\bar{\boldsymbol{y}}$.

Karena $\bar{\boldsymbol{y}} = \bar{\boldsymbol{x}}_1 + r_0\bar{\boldsymbol{x}}_2$, maka $A\bar{\boldsymbol{y}} = A(\bar{\boldsymbol{x}}_1 + r_0\bar{\boldsymbol{x}}_2)$.

Karena perkalian matriks bersifat distributif, maka $A(\bar{\boldsymbol{x}}_1 + r_0\bar{\boldsymbol{x}}_2) = (A\bar{\boldsymbol{x}}_1) + (Ar_0\bar{\boldsymbol{x}}_2)$.

Karena $A\bar{\boldsymbol{x}}_1 = \bar{\boldsymbol{b}}$, maka $(A\bar{\boldsymbol{x}}_1) + (Ar_0\bar{\boldsymbol{x}}_2) = \bar{\boldsymbol{b}} + (Ar_0\bar{\boldsymbol{x}}_2)$.

Karena r_0 adalah konstanta, maka r_0 dapat dipindah posisi dalam operasi perkalian ini menjadi ke sebelah kiri dari A, dengan kata lain $(Ar_0\bar{\boldsymbol{x}}_2) = (r_0A\bar{\boldsymbol{x}}_2) = r_0(A\bar{\boldsymbol{x}}_2)$.

Karena $A\bar{\boldsymbol{x}}_2 = \bar{\mathbf{0}}$, maka $r_0(A\bar{\boldsymbol{x}}_2) = r_0\bar{\mathbf{0}}$.

Ingat! Vektor $\bar{\mathbf{0}}$ adalah vektor yang semua elemennya adalah 0. Dengan demikian $r_0\bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{0}}$.

Jangan lupa! Di atas tadi, kita punya persamaan $A\bar{\boldsymbol{y}} = (\bar{\boldsymbol{b}}) + (Ar_0\bar{\boldsymbol{x}}_2)$.
Karena $Ar_0\bar{\boldsymbol{x}}_2 = \bar{\mathbf{0}}$, maka $A\bar{\boldsymbol{y}} = (\bar{\boldsymbol{b}}) + \bar{\mathbf{0}} = \bar{\boldsymbol{b}}$.

Dengan demikian, vektor $\bar{\boldsymbol{y}} = \bar{\boldsymbol{x}}_1 + r_0\bar{\boldsymbol{x}}_2$ untuk sebarang $r_0 \in \mathbb{R}$ adalah penyelesaian dari sistem persamaan linear $A\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{b}}$.

Pembahasan Soal Nomor 3

Soal
Use Cramer's rule to solve the following system of linear equation.

$$\begin{aligned} 2a + 3b - c &= 7 \\ 3a - 2b + c &= 0 \\ a + b + 2c &= 5 \end{aligned}$$

Pembahasan
The system of linear equation can be expressed as:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}}_{v}$$

First, we will find determinant of A.

$$\begin{aligned} |A| &= 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(-4-1) - 3(6-1) - 1(3+2) \\ &= -10 - 15 - 5 \\ &= -30 \end{aligned}$$

Because determinant of $A = -30 \neq 0$, then the system of linear equation has an unique solution that is $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

***

To find the value of a we will create a new matrix A_a that is formed from matrix A with its first column replaced by v, that is

$$A_a = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Then the value of a is calculated from $\dfrac{|A_a|}{|A|} = -\dfrac{|A_a|}{30}$.

We proceed by finding the determinant of A_a that is

$$\begin{aligned} |A_a| &= 7\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 7(-4-1) - 3(-5) - 1(10) \\ &= -35 + 15 - 10 \\ &= -30 \end{aligned}$$

Thus, the value of a is $-\dfrac{|A_a|}{30} = -\left(\dfrac{-30}{30}\right) = 1$.

***

To find the value of b we will create a new matrix A_b that is formed from matrix A with its second column replaced by v, that is

$$A_b = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Then the value of b is calculated from $\dfrac{|A_b|}{|A|} = -\dfrac{|A_b|}{30}$.

We proceed by finding the determinant of A_b that is

$$\begin{aligned} |A_b| &= 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2(-5) - 7(6-1) - 1(15) \\ &= -10 - 35 - 15 \\ &= -60 \end{aligned}$$

Thus, the value of b is $-\frac{|A_b|}{30} = -\left(\frac{-60}{30}\right) = 2$.

***

To find the value of c we will create a new matrix A_c that is formed from matrix A with its last column replaced by v, that is

$$A_c = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Then the value of c is calculated from $\frac{|A_c|}{|A|} = -\frac{|A_c|}{30}$.

We proceed by finding the determinant of A_c that is

$$\begin{aligned} |A_c| &= 2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(-10) - 3(15) + 7(3+2) \\ &= -20 - 45 + 35 \\ &= -30 \end{aligned}$$

Thus, the value of c is $-\frac{|A_c|}{30} = -\left(\frac{-30}{30}\right) = 1$.

***

And so, the solution of system of linear equation:

$$\begin{aligned} 2a + 3b - c &= 7 \\ 3a - 2b + c &= 0 \\ a + b + 2c &= 5 \end{aligned}$$

is $a = 1$,$b = 2$ and $c = 1$.

Pembahasan Soal Nomor 4

Soal
Diberikan matriks A dan B sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 3 & 11 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Tentukan matriks invertibel E sehingga $EA = B$!

Pembahasan
Ingat bahwa matriks invertibel adalah matriks yang memiliki invers terhadap operasi perkalian matriks!

Pertama-tama, cek determinan matriks A dan B terlebih dahulu. Sebab, matriks invertibel E sehingga $EA = B$ memiliki kemungkinan untuk ditemukan apabila determinan matriks A dan B adalah 0 (dengan kata lain A dan B merupakan matriks-matriks yang tidak invertibel).

$$\begin{aligned} |A| &= 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(-4) + 3(-2) + 7(2) \\ &= -8 - 6 + 14 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |B| &= 2\begin{vmatrix} 11 & -5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2(4) - 7(2) - 3(-2) \\ &= 8 - 14 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Karena determinan matriks A dan B adalah 0, maka matriks A dan B merupakan matriks-matriks yang tidak invertibel. Dengan demikian, matriks invertibel E sehingga $EA = B$ memiliki kemungkinan untuk ditemukan.

Untuk mencari matriks invertibel E, kita akan melakukan proses eliminasi Gauss-Jordan pada matriks A dan B sehingga menghasilkan matriks eselon baris yang tereduksi. Jika matriks eselon baris tereduksi yang kita peroleh terhadap matriks A sama dengan matriks eselon baris tereduksi yang kita peroleh terhadap matriks B, maka matriks invertibel E yang dimaksud eksis.

Oke, kita mulai melakukan proses eliminasi Gauss-Jordan pada matriks A dengan langkah-langkah operasi baris elementer (OBE) yang berurutan seperti berikut.

1. Baris ke-1 = Baris ke-1 − (2 × Baris ke-2).

   Matriks elementer yang berkorespondensi dengan OBE ini adalah $E_{A1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Baris ke-3 = Baris ke-3 − (3 × Baris ke-2).

   Matriks elementer yang berkorespondensi dengan OBE ini adalah $E_{A2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Baris ke-3 = Baris ke-3 + (2 × Baris ke-1).

   Matriks elementer yang berkorespondensi dengan OBE ini adalah $E_{A3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Baris ke-2 = Baris ke-2 − Baris ke-1.

   Matriks elementer yang berkorespondensi dengan OBE ini adalah $E_{A4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Baris ke-1 dan Baris ke-2 saling bertukar letaknya.

   Matriks elementer yang berkorespondensi dengan OBE ini adalah $E_{A5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Baris ke-2 = −1 × Baris ke-2.

   Matriks elementer yang berkorespondensi dengan OBE ini adalah $E_{A6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Dari enam langkah OBE di atas kita akan memperoleh eselon baris yang tereduksi R_A yaitu:

$$\begin{aligned} R_A &= (E_{A6}\ E_{A5}\ E_{A4}\ E_{A3}\ E_{A2}\ E_{A1})\ A \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kita lanjut melakukan proses eliminasi Gauss-Jordan pada matriks B dengan langkah-langkah operasi baris elementer (OBE) yang berurutan seperti berikut.

1. Baris ke-1 = Baris ke-1 − (2 × Baris ke-3).

   Matriks elementer yang berkorespondensi dengan OBE ini adalah $E_{B1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Baris ke-2 = Baris ke-2 − (3 × Baris ke-3).

   Matriks elementer yang berkorespondensi dengan OBE ini adalah $E_{B2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Baris ke-2 = Baris ke-2 − (2 × Baris ke-1).

   Matriks elementer yang berkorespondensi dengan OBE ini adalah $E_{B3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Baris ke-3 = Baris ke-3 − (3 × Baris ke-1).

   Matriks elementer yang berkorespondensi dengan OBE ini adalah $E_{B4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Baris ke-1 dan Baris ke-2 saling bertukar letaknya.

   Matriks elementer yang berkorespondensi dengan OBE ini adalah $E_{B5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Baris ke-1 dan Baris ke-3 saling bertukar letaknya.

   Matriks elementer yang berkorespondensi dengan OBE ini adalah $E_{B6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Dari enam langkah OBE di atas kita akan memperoleh eselon baris yang tereduksi R_B yaitu:

$$\begin{aligned} R_B &= (E_{B6}\ E_{B5}\ E_{B4}\ E_{B3}\ E_{B2}\ E_{B1})\ B \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 3 & 11 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Perhatikan! Karena $R_A = R_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, maka kita memperoleh

$$(E_{A6}\ E_{A5}\ E_{A4}\ E_{A3}\ E_{A2}\ E_{A1})\ A = (E_{B6}\ E_{B5}\ E_{B4}\ E_{B3}\ E_{B2}\ E_{B1})\ B$$

Ingat bahwa matriks elementer merupakan matriks invertibel. Sehingga hasil perkalian dari matriks-matriks elementer juga merupakan matriks invertibel. Dengan demikian kita akan memperoleh hasil:

$$(E_{B6}\ E_{B5}\ E_{B4}\ E_{B3}\ E_{B2}\ E_{B1})^{-1}\ (E_{A6}\ E_{A5}\ E_{A4}\ E_{A3}\ E_{A2}\ E_{A1})\ A = B.$$

Dengan demikian, matriks invertibel E yang dimaksud pada soal tidak lain adalah

$$E = (E_{B6}\ E_{B5}\ E_{B4}\ E_{B3}\ E_{B2}\ E_{B1})^{-1}\ (E_{A6}\ E_{A5}\ E_{A4}\ E_{A3}\ E_{A2}\ E_{A1}).$$

Seperti apakah wujud matriks E tersebut?
Dari penjabaran di atas kita mengetahui bahwa:

- $E_{A6}\, E_{A5}\, E_{A4}\, E_{A3}\, E_{A2}\, E_{A1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix}$, dan

- $E_{B6}\, E_{B5}\, E_{B4}\, E_{B3}\, E_{B2}\, E_{B1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Dengan demikian

$$\begin{aligned} E &= (E_{B6}\, E_{B5}\, E_{B4}\, E_{B3}\, E_{B2}\, E_{B1})^{-1}\, (E_{A6}\, E_{A5}\, E_{A4}\, E_{A3}\, E_{A2}\, E_{A1}) \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & 11 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -9 & 20 & 0 \\ -12 & 24 & 1 \\ -4 & 9 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jadi, matriks invertibel E sehingga $EA = B$, adalah $\begin{bmatrix} -9 & 20 & 0 \\ -12 & 24 & 1 \\ -4 & 9 & 0 \end{bmatrix}$.

Catatan:

Proses mencari invers dari matriks $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ tidak dijelaskan secara terperinci karena dianggap mudah untuk dikerjakan.

Pembahasan Soal Nomor 5

Soal
Diberikan vektor-vektor $\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{c}} \in \mathbb{R}^3$ sebagai berikut.

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} 4 \\ x+2 \\ y \end{bmatrix}, \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -z \end{bmatrix}, \text{ dan } \bar{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Diketahui bahwa vektor $\bar{\boldsymbol{a}}$ sejajar dengan vektor $\bar{\boldsymbol{b}}$ dan $\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} 8 \\ -28 \\ -24 \end{bmatrix}$.

(a) Tentukan nilai x,y, dan z!

(b) Jika vektor $\bar{\boldsymbol{d}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, tentukan $\bar{\boldsymbol{b}} \cdot \bar{\boldsymbol{d}}$!

Pembahasan
Karena vektor $\bar{\boldsymbol{a}}$ sejajar dengan vektor $\bar{\boldsymbol{b}}$, maka vektor hasil *cross product*-nya adalah vektor $\bar{\mathbf{0}}$.
Dengan demikian, jika vektor unit $\bar{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{\boldsymbol{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, dan $\bar{\boldsymbol{e}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, maka

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{0}} &= \bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}} \\
&= \begin{vmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_1 & \bar{\boldsymbol{e}}_2 & \bar{\boldsymbol{e}}_3 \\ 4 & x+2 & y \\ 1 & 2 & -z \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+2 & y \\ 2 & -z \end{vmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_1 - \begin{vmatrix} 4 & y \\ 1 & -z \end{vmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_2 + \begin{vmatrix} 4 & x+2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_3 \\
&= (-zx - 2z - 2y)\bar{\boldsymbol{e}}_1 - (-4z - y)\bar{\boldsymbol{e}}_2 + (6 - x)\bar{\boldsymbol{e}}_3 \\
&= \begin{bmatrix} -zx - 2z - 2y \\ 4z + y \\ 6 - x \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Dari sini diperoleh:

- $-zx - 2z - 2y = 0$
- $4z + y = 0$
- $6 - x = 0 \iff x = 6$

Karena sudah diketahui $x = 6$, maka vektor $\bar{\boldsymbol{a}}$ akan menjadi $\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ y \end{bmatrix}$.

Karena diketahui $\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} 8 \\ -28 \\ -24 \end{bmatrix}$, maka dengan vektor unit $\bar{\boldsymbol{e}}_1$, $\bar{\boldsymbol{e}}_2$, dan $\bar{\boldsymbol{e}}_3$ yang serupa seperti sebelumnya akan diperoleh:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 8 \\ -28 \\ -24 \end{bmatrix} &= \bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{c}} \\
&= \begin{vmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_1 & \bar{\boldsymbol{e}}_2 & \bar{\boldsymbol{e}}_3 \\ 4 & 8 & y \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 8 & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_1 - \begin{vmatrix} 4 & y \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_2 + \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_3 \\
&= (8)\bar{\boldsymbol{e}}_1 - (4 - 3y)\bar{\boldsymbol{e}}_2 + (-24)\bar{\boldsymbol{e}}_3 \\
&= \begin{bmatrix} 8 \\ 3y - 4 \\ -24 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Dari sini diperoleh:

- $3y - 4 = -28 \iff y = -8$

Karena ketika menghitung $\bar{\mathbf{0}} = \bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}}$ kita juga memperoleh persamaan $4z + y = 0$, maka
$z = -y/4 = -(-8)/4 = 2$.

Jadi, diperolehlah:

- $x = 6$
- $y = -8$
- $z = 2$

Menggunakan nilai z yang sudah diketahui di atas, maka vektor $\bar{\boldsymbol{b}}$ akan menjadi $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ dan vektor $\bar{\boldsymbol{d}}$ akan menjadi $\begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}$. Dengan demikian

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{b}} \cdot \bar{\boldsymbol{d}} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-8) + (-2) \cdot 2 \\
&= 6 - 16 - 4 \\
&= -14
\end{aligned}$$