Pembahasan Ujian Tengah Semester TA 2017/2018 untuk Mata Kuliah:

Aljabar Linear Elementer

Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Gadjah Mada
Yogyakarta

Mawi Wijna *

Desember 2020

*Walaupun pembahasan soal ujian ini belum tentu benar, akan tetapi semoga ada manfaatnya meskipun sedikit. Dibuat untuk mengisi waktu luang sambil menidurkan bayi. :p

Soal

1. Determine the elementary matrices $E_1, E_2, E_3, ..., E_2k, E_{2k+1}$ with $k < \infty$, such that

$$E_{2k+1}\ E_{2k-1}\ ...\ E_1 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} E_2\ E_4\ ...\ E_{2k}$$

is a diagonal matrix!

2. Diketahui k dan m bilangan real.
Diberikan sistem persamaan linear sebagai berikut.

$$\begin{aligned} kx - y + z &= 2 \\ -4x + 3y - 2z &= -4 \\ -6x - 2y + 5z &= m \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Tentukan k agar *rank* matriks koefisien SPL tersebut bernilai 2!

(b) Tentukan k dan m agar SPL tersebut memiliki solusi tunggal!

3. Jika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tentukan determinan A!

4. Jika

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

tentukan A^{-1} jika ada!

5. Diketahui matriks

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan semua nilai eigen dari matriks B dan tentukan juga vektor-vektor eigen yang berkorespondensi dengan masing-masing nilai eigen tersebut!

Pembahasan Soal Nomor 1.1

Soal
Determine the elementary matrices $E_1, E_2, E_3, ..., E_2k, E_{2k+1}$ with $k < \infty$, such that

$$E_{2k+1}\ E_{2k-1}\ ...\ E_1 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} E_2\ E_4\ ...\ E_{2k}$$

is a diagonal matrix!

Pembahasan
We know that if A is an initial matrix, then

$$E_{ore_1} A = A'$$

with E_{ore_1} is an elementary matrix that correspond to an elementary row operation ore_1 and A' is a result matrix after an elementary row operation ore_1 is operated on A.

Conversely, if A is an initial matrix, then

$$AE_{oce_1} = A'$$

with E_{oce_1} is an elementary matrix that correspond to an elementary column operation oce_1 and A' is a result matrix after an elementary column operation oce_1 is operated on A.

Thus, if A is an initial matrix, then to find elementary matrices $E_1, E_2, E_3, ..., E_2k, E_{2k+1}$ such that

$$E_{2k+1}\ E_{2k-1}\ ...\ E_1\ \ A\ \ E_2\ E_4\ ...\ E_{2k} = \text{Diagonal Matrix}$$

we will operate A with an elementary row operation, followed by an elementary column operation, followed by an elementary row operation, and so on, alternating, until the result is a diagonal matrix.

Please note that elementary row operation matrix is always operated on the left side of the initial matrix. Conversely, elementary column operation matrix is always operated on the right side of the initial matrix.

So, let

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

First, we will do an elementary row operation ore_1 on A by interchanging the first row and the second row. The result is A'_1 such that

$$\underset{E_{ore_1}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}} = \underset{A'_1}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}$$

Second, we do an elementary column operation oce_1 on A'_1 by subtracting the second column with $1/2$ of the first column. The result is A'_2 such that

$$\underset{A'_1}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}} \underset{E_{oce_1}}{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{A'_2}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}$$

Third, we do an elementary row operation ore_2 on A'_2 by subtracting the second row with $3/2$ of the first row. The result is A'_3 such that

$$\underset{E_{ore_2}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{A'_2}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}} = \underset{A'_3}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}$$

Fourth, we do an elementary column operation oce_2 on A'_3 by adding the third column with $1/2$ of the first column. The result is A'_4 such that

$$\underset{A'_3}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}} \underset{E_{oce_2}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{A'_4}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}$$

Fifth, we do an elementary row operation ore_3 on A'_4 by subtracting the third row with 2 times of the second row. The result is A'_5 such that

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{3}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{E_{ore_3}}\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}}_{A'_4}=\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{A'_5}$$

Sixth, we do an elementary column operation oce_3 on A'_5 by subtracting the third column with 3 times of the second column. The result is A'_6 such that

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{A'_5}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{E_{oce_3}}=\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{A'_6}$$

Because A'_6 is indeed a diagonal matrix, then our series process of diagonalization of A is terminated. The elementary matrix E_{ore_1}, E_{ore_2}, and E_{ore_3} consecutively is the matrix E_5, E_3, and E_1. Similarly, the elementary matrix E_{oce_1}, E_{oce_2}, and E_{oce_3} consecutively is the matrix E_2, E_4, and E_6.

And finally, we have

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{3}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{E_5}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{3}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{E_3}\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{E_1}\underbrace{\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{E_2}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{E_4}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{E_6}=\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\text{diagonal matrix}}$$

Pembahasan Soal Nomor 2

Soal
Diketahui k dan m bilangan real.
Diberikan sistem persamaan linear sebagai berikut.

$$\begin{aligned} kx - y + z &= 2 \\ -4x + 3y - 2z &= -4 \\ -6x - 2y + 5z &= m \end{aligned} \tag{2}$$

1. Tentukan k agar *rank* matriks koefisien SPL tersebut bernilai 2!
2. Tentukan k dan m agar SPL tersebut memiliki solusi tunggal!

Pembahasan
Sistem persamaan linear (SPL) pada soal dapat diubah menjadi bentuk matriks

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k & -1 & 1 \\ -4 & 3 & -2 \\ -6 & -2 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ m \end{bmatrix}}_{B}$$

Matriks koefisien SPL tersebut adalah matriks A. Karena A berukuran 3×3, maka *rank* maksimum dari A adalah 3. Dengan kata lain, *rank* dari A dapat bernilai 1, 2, atau 3.

Perhatikan bahwa matriks A dapat dibentuk dari 3 vektor kolom yaitu

$$A = \left[\begin{array}{c:c:c} v_1 & v_2 & v_3 \end{array}\right] \text{ dengan } v_1 = \begin{bmatrix} k \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \text{ dan } v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Agar A memiliki nilai $rank = 2$, maka A haruslah memiliki **tepat** 2 vektor kolom yang saling bebas linear. Itu artinya, karena *rank* maksimum dari A adalah 3, maka A memiliki tepat 1 vektor kolom yang merupakan kombinasi linear dari 2 vektor kolom yang bebas linear tersebut. Seperti yang sudah dipaparkan di atas, vektor-vektor kolom dari A adalah v_1, v_2, dan v_3.

Kita perhatikan vektor v_2 dan v_3. Perhatikan bahwa dari 2 vektor ini kita dapat membuat 2 vektor baru yang merupakan kombinasi linear dari v_2 dan v_3, yaitu

$$y_1 = v_2 + v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ dan } y_2 = 2v_2 + 3v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa dua vektor baru ini, y_1 dan y_2 merupakan vektor yang saling bebas linear. Buktinya, y_1 tidak mungkin merupakan kelipatan dari y_2 dan juga sebaliknya. Itu, berakibat v_2 dan v_3 merupakan vektor yang juga bebas linear. Dengan demikian, agar A memiliki $rank = 2$, maka vektor v_1 haruslah merupakan kombinasi linear dari vektor v_2 dan v_3 yang ekuivalen dengan vektor v_1 haruslah merupakan kombinasi linear dari vektor y_1 dan y_2. Jadi,

$$v_1 = a \cdot y_1 + b \cdot y_2 \text{ untuk suatu } a, b \in \mathbb{R}.$$

Karena vektor v_1, y_1, dan y_2 telah diketahui, maka persamaan di atas akan menjadi

$$\begin{bmatrix} k \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \\ 3a + 11b \end{bmatrix}.$$

Dari sini diperoleh

- $a = -4$
- $b = k$
- $-6 = 3a + 11b$

Dengan mensubtitusi nilai a dan b ke dalam persamaan $-6 = 3a + 11b$ akan diperoleh

$$-6 = -12 + 11k \iff k = \frac{6}{11}$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa matriks koefisien SPL pada soal (yaitu matriks A) memiliki nilai $rank = 2$ jika dan hanya jika nilai $k = \dfrac{6}{11}$.

***

Selanjutnya, kita akan menyelidiki berapakah nilai k dan m agar SPL memiliki solusi tunggal.

Ingat!
Suatu SPL memiliki solusi tunggal $\iff$ Matriks koefisien SPL adalah *full rank*.

Karena matriks koefisien SPL pada soal berdimensi 3×3, maka SPL tersebut memiliki solusi tunggal jika dan hanya jika *rank* matriks koefisien SPL = 3.

Ingat!
Suatu matriks persegi adalah *full rank* $\iff$ Vektor-vektor kolom pada suatu matriks persegi saling bebas linear.

Dari penjelasan pada paragraf-paragraf teratas, kita telah menunjukkan bahwa matriks koefisien SPL (yaitu matriks A) dapat dibentuk dari 3 vektor kolom yaitu

$$A = \left[\begin{array}{c:c:c} v_1 & v_2 & v_3 \end{array}\right] \text{ dengan } v_1 = \begin{bmatrix} k \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \text{ dan } v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Seperti yang telah dibahas pada paragraf-paragraf teratas, matriks A memiliki nilai *rank* = 2 jika dan hanya jika $k = \frac{6}{11}$. Jadi, agar matriks A memiliki *rank* $\neq 2$, maka nilai k haruslah $\neq \frac{6}{11}$.

Selain itu, pada paragraf-paragraf teratas kita juga sudah menunjukkan bahwa vektor v_2 dan v_3 bebas linear. Kemudian, dengan memilih nilai $k \neq \{\frac{6}{11}\}$, vektor v_1 akan menjadi saling bebas linear dengan v_2 dan v_3. Jadi, jika $k \neq \{\frac{6}{11}\}$ maka matriks A adalah *full rank*.

Kemudian, karena A adalah matriks *full rank*, maka determinan$(A) \neq 0$, yang berarti A *invertible* alias A memiliki invers.

Nah, artinya apa jika A memiliki invers?

Artinya adalah, untuk setiap $B \in \mathbb{R}^3$, selalu terdapat $X \in \mathbb{R}^3$ sedemikian sehingga berlaku $AX = B$. Ingat bahwa X dapat "ditemukan" dengan mengoperasikan A^{-1} dengan B, yaitu $X = A^{-1}B$.

Kesimpulannya adalah, jika $k \neq \{\frac{6}{11}\}$, maka untuk sebarang nilai m, sistem persamaan linear $AX = B$ pada soal akan selalu memiliki solusi tunggal.

Pembahasan Soal Nomor 3

Soal
Jika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tentukan determinan A!

Pembahasan

> **Catatan**
> Ada banyak cara untuk mencari determinan suatu matriks persegi. Akan tetapi, ketika mengerjakan soal ujian, alangkah baiknya menggunakan cara yang termudah agar tenaga dan konsentrasi tidak terlalu terforsir.
>
> Untuk matriks yang berukuran lebih besar dari 3×3, cara mencari determinan yang termudah adalah dengan melakukan serangkaian operasi baris elementer tipe ketiga pada matriks tersebut hingga menghasilkan suatu matriks diagonal. Nah, nilai determinan dapat dihitung dengan mengalikan semua entri-entri diagonal matriks tersebut.

Pertama-tama, ingat sifat determinan berikut. Jika A merupakan suatu matriks persegi yang memenuhi

$$EA = B$$

dengan E adalah matriks elementer yang berkorespondensi dengan suatu operasi baris elementer tipe ketiga (suatu baris ditambahkan dengan kelipatan baris lain), maka berlaku

$$\text{determinan}(A) = \text{determinan}(B).$$

Ini semata-mata dikarenakan determinan dari setiap matriks elementer yang berkorespondensi dengan suatu operasi baris elementer tipe ketiga selalu bernilai 1.

Kembali ke matriks A pada soal. Perhatikan elemen matriks yang ditandai dengan warna merah.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ \color{red}{-1} & \color{red}{0} & -1 & -2 \\ \color{red}{-1} & \color{red}{2} & \color{red}{1} & 0 \end{bmatrix}$$

Kita akan melakukan serangkaian operasi baris elementer tipe ketiga pada A supaya elemen-elemen berwarna merah tersebut menjadi atau tetap bernilai 0. Dengan demikian, hasil dari serangkaian operasi baris elementer tipe ketiga tersebut akan menghasilkan suatu matriks diagonal.

1. Operasi baris elementer tipe ketiga yang pertama adalah:
   baris ke-3 = baris ke-3 + baris ke-1
   Hasilnya adalah matriks $A'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ \color{blue}{0} & \color{red}{1} & -1 & -1 \\ \color{red}{-1} & \color{red}{2} & \color{red}{1} & 0 \end{bmatrix}$
2. Operasi baris elementer tipe ketiga yang kedua adalah:
   baris ke-4 = baris ke-4 + baris ke-1
   Hasilnya adalah matriks $A'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ \color{blue}{0} & \color{red}{1} & -1 & -1 \\ \color{blue}{0} & \color{red}{3} & \color{red}{1} & 1 \end{bmatrix}$
3. Operasi baris elementer tipe ketiga yang ketiga adalah:
   baris ke-3 = baris ke-3 + baris ke-2
   Hasilnya adalah matriks $A'_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & 0 & 1 \\ \color{blue}{0} & \color{red}{3} & \color{red}{1} & 1 \end{bmatrix}$
4. Operasi baris elementer tipe ketiga yang keempat adalah:
   baris ke-4 = baris ke-4 - (3 $\times$ baris ke-2)
   Hasilnya adalah matriks $A'_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & 0 & 1 \\ \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{red}{4} & 7 \end{bmatrix}$

Nah, matriks A'_4 ini sudah nyaris menyerupai matriks diagonal. Jika kita menukar posisi baris ke-3 dan baris ke-4, maka terciptalah suatu matriks diagonal.

Akan tetapi, pertukaran baris pada matriks (dikenal juga sebagai operasi baris elementer tipe pertama) akan mengakibatkan nilai determinannya berubah tanda, yang semula positif akan menjadi negatif, dan sebaliknya. Sifatnya, jika A merupakan suatu matriks persegi yang memenuhi

$$EA = B$$

dengan E adalah matriks elementer yang berkorespondensi dengan suatu operasi baris elementer tipe pertama (pertukaran posisi 2 baris), maka berlaku

$$\text{determinan}(A) = -\text{determinan}(B).$$

Ini semata-mata dikarenakan determinan dari setiap matriks elementer yang berkorespondensi dengan suatu operasi baris elementer tipe pertama selalu bernilai 1.

Dengan demikian operasi diagonalisasi matriks A diakhiri dengan mengoperasikannya dengan suatu matriks elementer yang berkorespondensi dengan operasi baris elementer tipe pertama sebagai berikut.

5. Operasi baris elementer tipe pertama:
   baris ke-3 ditukar posisinya dengan baris ke-4
   Hasilnya adalah matriks $A'_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Dengan demikian kita akan memperoleh

$$E_5\ E_4\ E_3\ E_2\ E_1\ A = A'_5$$

dengan E_n = matriks elementer yang berkorespondensi dengan operasi baris elementer pada poin ke-n. Dengan kata lain:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{E_5} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_4} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A'_5}$$

Sehingga dengan demikian:

$$\text{determinan}(E_5\ E_4\ E_3\ E_2\ E_1\ A) = \text{determinan}(A'_5)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\det(E_5)\det(E_4)\det(E_3)\det(E_2)\det(E_1)\det(A) = \det(A'_5)$$

Karena diketahui:

- $\det(E_5) = -1$
- $\det(E_4) = \det(E_3) = \det(E_2) = \det(E_1) = 1$
- $\det(A'_5) = (1)\cdot(-1)\cdot(4)\cdot(1) = -4$

Maka:

$$\det(E_5)\det(E_4)\det(E_3)\det(E_2)\det(E_1)\det(A) = \det(A'_5)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$((-1)\cdot(1)\cdot(1)\cdot(1)\cdot(1))\det(A) = -4$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(-1)\cdot\det(A) = -4$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\det(A) = 4$$

Jadi, diperoleh hasil bahwa determinan dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ adalah 4.

Pembahasan Soal Nomor 4

Soal
Jika

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

tentukan A^{-1} jika ada!

Pembahasan
Ingat bahwa suatu matriks persegi memiliki invers jika dan hanya jika nilai determinannya $\neq 0$. Jadi, untuk mencari tahu apakah matriks A pada soal memiliki invers, kita cukup mencari tahu nilai determinannya.

Ada banyak cara untuk mencari determinan suatu matriks persegi. Akan tetapi, ketika mengerjakan soal ujian, alangkah baiknya menggunakan cara yang termudah agar tenaga dan konsentrasi tidak terlalu terforsir.

Untuk matriks yang berukuran lebih besar dari 3×3, cara mencari determinan yang termudah adalah dengan melakukan serangkaian operasi baris elementer tipe ketiga pada matriks tersebut hingga menghasilkan suatu matriks diagonal. Nah, nilai determinan dapat dihitung dengan mengalikan semua entri-entri diagonal matriks tersebut. Kembali ke matriks A pada soal. Perhatikan elemen matriks yang ditandai dengan warna merah.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kita akan melakukan serangkaian operasi baris elementer tipe ketiga pada A supaya elemen-elemen berwarna merah tersebut menjadi atau tetap bernilai 0. Dengan demikian, hasil dari serangkaian operasi baris elementer tipe ketiga tersebut akan menghasilkan suatu matriks diagonal.

1. Operasi baris elementer tipe ketiga yang pertama adalah:
   baris ke-2 = baris ke-2 - baris ke-1
   Hasilnya adalah matriks $A_1' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. Operasi baris elementer tipe ketiga yang kedua adalah:
   baris ke-4 = baris ke-4 + baris ke-1
   Hasilnya adalah matriks $A_2' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
3. Operasi baris elementer tipe ketiga yang ketiga adalah:
   baris ke-3 = baris ke-3 - $1/2 \times$ **baris ke-4**
   Hasilnya adalah matriks $A_3' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
4. Operasi baris elementer tipe ketiga yang keempat adalah:
   baris ke-2 = baris ke-2 - $1/2 \times$ **baris ke-4**
   Hasilnya adalah matriks $A_3' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Perhatikan baris ke-2, ke-3, dan ke-4 pada matriks A_3'!
Perhatikan bahwa baris ke-2 merupakan kombinasi linear dari baris ke-3 dan baris ke-4. Tepatnya:

$$(2) \times \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{baris\ ke-2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{baris\ ke-4} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}}_{baris\ ke-3}$$

Karena A memiliki baris yang merupakan kombinasi linear dari baris-baris lainnya, maka dengan operasi baris elementer tipe ketiga, kita dapat membuat baris tersebut menjadi $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dengan demikian diperoleh matriks A_4' sebagai:

$$A_4' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jelas bahwa jika suatu matriks persegi memiliki suatu baris atau kolom yang berwujud vektor $\overline{0}$, maka determinan dari matriks tersebut bernilai 0.

Dengan demikian, determinan matriks A bernilai 0, yang berakibat matriks A tidak memiliki invers.

Pembahasan Soal Nomor 5

Soal
Diketahui matriks

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan semua nilai eigen dari matriks B dan tentukan juga vektor-vektor eigen yang berkorespondensi dengan masing-masing nilai eigen tersebut!

Pembahasan
Misalkan λ adalah nilai eigen dari matriks B. Maka, λ akan memenuhi persamaan:

$$\text{determinan}(B - \lambda I) = 0.$$

Oleh sebab itu, kita bentuk matriks $B - \lambda I$ seperti ini.

$$\begin{aligned} B - \lambda I &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

Dengan demikian determinan dari $B - \lambda I$ adalah:

$$\begin{aligned} \text{determinan}(B - \lambda I) &= (2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) \; - \; (-\lambda + 4) \; - \; (1 - (-2)(1-\lambda)) \\ &= 2\lambda^2 - 2\lambda - 4 - \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + \lambda - 4 - 1 + 2\lambda - 2 \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda - 11 \end{aligned} \tag{4}$$

Misalkan $f(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda - 11$.
Nah, karena determinan dari $B - \lambda I$ harus $= 0$, maka harus dicari λ sedemikian sehingga $f(\lambda) = 0$.

Perhatikan bahwa:

- $f(1) = -4$,
- $f(-1) = -12$,
- dan jelas bahwa $f(11) \neq 0$ dan $f(-11) \neq 0$.

Artinya, $f(\lambda)$ tidak memiliki $(\lambda - 1)$, $(\lambda + 1)$, $(\lambda - 11)$, atau $(\lambda + 11)$ sebagai faktornya. Dengan begitu, akan sangat sulit untuk mencari solusi dari $f(\lambda) = 0$ mengingat fungsi tersebut merupakan fungsi kubik (derajat 3).

Apakah mungkin pembuat soal ujian keliru menyatakan matriks B?

Meskipun demikian, untuk sekadar melatih kemampuan mencari nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks, kita akan membentuk suatu matriks baru yang nilai eigennya lebih mudah untuk ditemukan. Matriks baru ini kita sebut sebagai B' yang elemen-elemennya didasarkan dari matriks B sebagai

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa semua elemen matriks B' merupakan elemen-elemen matriks B dengan tetap mempertahankan posisinya **kecuali** elemen di baris pertama kolom ketiga bernilai 1 di matriks B', sedangkan di matriks B bernilai -1.

Kita akan mencari nilai eigen dari matriks B'. Misalkan λ adalah nilai eigen dari matriks B'. Maka, λ akan memenuhi persamaan:

$$\text{determinan}(B' - \lambda I) = 0.$$

Oleh sebab itu, kita bentuk matriks $B' - \lambda I$ seperti ini.

$$\begin{aligned} B' - \lambda I &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

Dengan demikian determinan dari $B' - \lambda I$ adalah:

$$\begin{aligned}
\text{determinan}(B' - \lambda I) &= (2-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 1 & -\lambda\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -\lambda\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}1 & 1-\lambda\\ -2 & 1\end{pmatrix}\\
&= (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) \ - \ (-\lambda+4) \ + \ (1-(-2)(1-\lambda))\\
&= 2\lambda^2 - 2\lambda - 4 - \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + \lambda - 4 + 1 - 2\lambda + 2\\
&= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + -\lambda - 5
\end{aligned} \tag{6}$$

Misalkan $g(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + -\lambda - 5$.
Karena determinan dari $B' - \lambda I$ harus $= 0$, maka harus dicari λ yang memenuhi $g(\lambda) = 0$. Dengan kata lain λ tersebut adalah solusi dari $g(\lambda) = 0$.

Karena $g(\lambda)$ adalah fungsi kubik, maka $g(\lambda)$ memiliki 3 solusi. Jadi, terdapat λ_1, λ_2, dan λ_3 yang memenuhi $g(\lambda_1) = g(\lambda_2) = g(\lambda_3) = 0$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
g(-1) &= -(-1)^3 + 3(-1)^2 - (-1) - 5\\
&= 1 + 3 + 1 - 5\\
&= 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Itu berarti $\lambda_1 = -1$ adalah salah satu solusi dari $g(\lambda) = 0$.
Itu berarti $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + -\lambda - 5$ memiliki $(\lambda + 1)$ sebagai faktornya.

Dengan demikian $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + -\lambda - 5$ dapat difaktorkan menjadi:

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + -\lambda - 5 = (\lambda+1)(-\lambda^2 + 4\lambda - 5)$$

Solusi kedua dan ketiga dari $g(\lambda) = 0$ tidak lain adalah solusi dari $-\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$. Untuk mencari solusi dari $-\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$ digunakan rumus ABC seperti berikut.

$$\begin{aligned}
\lambda_1, \lambda_2 &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\\
&= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-1)(-5)}}{2(-1)}\\
&= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{-2}\\
&= \frac{-4 \pm 2\sqrt{-1}}{-2}\\
&= \frac{-4 \pm 2i}{-2}
\end{aligned} \tag{8}$$

Dengan demikian diperoleh:

- $\lambda_2 = \dfrac{-4 + 2i}{-2} = 2 - i$.
- $\lambda_3 = \dfrac{-4 - 2i}{-2} = 2 + i$.

Jadi, nilai-nilai eigen untuk matriks B' adalah λ_1, λ_2, λ_3 sebagai berikut.

- $\lambda_1 = -1$.
- $\lambda_2 = \dfrac{-4 + 2i}{-2} = 2 - i$.
- $\lambda_3 = \dfrac{-4 - 2i}{-2} = 2 + i$.

***

Selanjutnya akan dicari vektor-vektor eigen untuk matriks B'. Jika λ adalah nilai eigen untuk matriks B', maka vektor eigen yang bersesuaian dengan λ tersebut adalah $\bar{\boldsymbol{v}}$ yang memenuhi

$$B'\bar{\boldsymbol{v}} = \lambda\bar{\boldsymbol{v}}$$

Misalkan $\bar{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\end{bmatrix}$. Untuk $\lambda_1 = -1$ diperoleh:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}}_{B'}\underbrace{\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\\ r_3\end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{v}}} = \underbrace{-1}_{\lambda_1}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\\ r_3\end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{v}}} \iff \underbrace{\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix}}_{B''}\underbrace{\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\\ r_3\end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{v}}} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Kita akan mencari nilai-nilai r_1,r_2, dan r_3 yang memenuhi $B''\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{0}}$ dengan cara mengubah matriks B'' menjadi matriks eselon baris tereduksi. Berikut berturut-turut adalah operasi-operasi baris elementer yang dioperasikan pada B'':

- OBE ke-1: Baris ke-1 dikalikan dengan 1/3.
- OBE ke-2: Baris ke-2 dikurangi dengan baris ke-1.
- OBE ke-3: Baris ke-3 ditambahkan dengan 2 kali baris ke-1.
- OBE ke-4: Baris ke-2 dikalikan dengan 3/5.
- OBE ke-5: Baris ke-3 dikurangi dengan 5/3 kali baris ke-2.
- OBE ke-6: Baris ke-1 dikurangi dengan 1/3 kali baris ke-2.

Rangkaian OBE di atas akan mengubah matriks B'' menjadi bentuk eselon baris tereduksi B''' berikut.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B'''}$$

Karena matriks B''' memenuhi persamaan $B'''\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{0}}$, dengan demikian:

- Nilai $r_1 = 0$.
- Nilai $r_2 =$ sebarang.
- Nilai $r_3 = -r_2$.

Jadi, vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = -1$ adalah $\bar{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ -k \end{bmatrix}$ untuk sebarang $k \in \mathbb{R}$.

Untuk $\lambda_2 = 2 - i$ diperoleh:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{B'} \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{v}}} = \underbrace{2 - i}_{\lambda_2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{v}}} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} i & 1 & 1 \\ 1 & -1+i & 2 \\ -2 & 1 & -2+i \end{bmatrix}}_{B''} \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{v}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kita akan mencari nilai-nilai r_1,r_2, dan r_3 yang memenuhi $B''\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{0}}$ dengan cara mengubah matriks B'' menjadi matriks eselon baris tereduksi. Berikut berturut-turut adalah operasi-operasi baris elementer yang dioperasikan pada B'':

- OBE ke-1: Baris ke-1 dikalikan dengan $1/i$.
- OBE ke-2: Baris ke-2 dikurangi dengan baris ke-1.
- OBE ke-3: Baris ke-3 ditambahkan dengan 2 kali baris ke-1.
- OBE ke-4: Baris ke-2 dikalikan dengan $\dfrac{-1-2i}{5}$.
- OBE ke-5: Baris ke-3 dikurangi dengan $1 - 2i$ kali baris ke-2.
- OBE ke-6: Baris ke-1 ditambah dengan i kali baris ke-2.

Rangkaian OBE di atas akan mengubah matriks B'' menjadi bentuk eselon baris tereduksi B''' berikut.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-i \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B'''}$$

Karena matriks B''' memenuhi persamaan $B'''\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{0}}$, dengan demikian:

- Nilai $r_1 = (-1 + i)\, r_3$.
- Nilai $r_2 = i\, r_3$.
- Nilai $r_3 =$ sebarang.

Jadi, vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2 - i$ adalah $\bar{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} (-1+i)k \\ i\,k \\ k \end{bmatrix}$ untuk sebarang $k \in \mathbb{R}$.

Untuk $\lambda_3 = 2 + i$ diperoleh:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{B'} \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{v}}} = \underbrace{2 + i}_{\lambda_2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{v}}} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} -i & 1 & 1 \\ 1 & -1-i & 2 \\ -2 & 1 & -2-i \end{bmatrix}}_{B''} \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{v}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kita akan mencari nilai-nilai r_1,r_2, dan r_3 yang memenuhi $B''\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{0}}$ dengan cara mengubah matriks B'' menjadi matriks eselon baris tereduksi. Berikut berturut-turut adalah operasi-operasi baris elementer yang dioperasikan pada B'':

- OBE ke-1: Baris ke-1 dikalikan dengan $-1/i$.
- OBE ke-2: Baris ke-2 dikurangi dengan baris ke-1.
- OBE ke-3: Baris ke-3 ditambahkan dengan 2 kali baris ke-1.
- OBE ke-4: Baris ke-2 dikalikan dengan $\dfrac{-1+2i}{5}$.
- OBE ke-5: Baris ke-3 dikurangi dengan $-1-2i$ kali baris ke-2.
- OBE ke-6: Baris ke-1 dikurangi dengan i kali baris ke-2.

Rangkaian OBE di atas akan mengubah matriks B'' menjadi bentuk eselon baris tereduksi B''' berikut.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B'''}$$

Karena matriks B''' memenuhi persamaan $B'''\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{0}}$, dengan demikian:

- Nilai $r_1 = (-1-i)\; r_3$.
- Nilai $r_2 = -i\; r_3$.
- Nilai $r_3 =$ sebarang.

Jadi, vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 2+i$ adalah $\bar{\boldsymbol{v}}_3 = \begin{bmatrix} (-1-i)k \\ -i\;k \\ k \end{bmatrix}$ untuk sebarang $k \in \mathbb{R}$.

Jadi, vektor-vektor eigen untuk B' adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ k \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} (-1+i)k \\ i\;k \\ k \end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix} (-1-i)k \\ -i\;k \\ k \end{bmatrix}$ untuk sebarang $k \in \mathbb{R}$. Jika dipilih $k = 1$, vektor-vektor eigen tersebut akan menjadi $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1+i \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix} -1-i \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}$.