

Aku Mau Coba
Mengerjakan & Membahas
Ujian Tengah Semester & Ujian Akhir Semester

Kalkulus 1

Semester Ganjil 2021/2022

Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Gadjah Mada

MAWI WIJNA

Yogyakarta, 2022

Kalkulus 1 2021/2022

Tulisan ini bukan paper!

Sekadar *njajal* mengerjakan soal ujian tengah semester dan ujian akhir semester.

WIHIKAN "MAWI" WIJNA

Daftar Isi

1	Soal-Soal Ujian Tengah Semester	5
2	Soal-Soal Ujian Akhir Semester	7
3	Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 1	9
4	Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 2	21
5	Ekstra! Penjelasan Tambahan 1 Ujian Tengah Semester Soal Nomor 2	31
6	Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 3	37
7	Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 4	47
8	Ekstra! Penjelasan Tambahan 2 Ujian Tengah Semester Soal Nomor 4	55
9	Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 5	57
10	Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester	

Soal Nomor 1	67
11 Ekstra! Penjelasan Tambahan 3 Ujian Akhir Semester Soal Nomor 1	79
12 Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 2	83
13 Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 3	87
14 Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 4	97
15 Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 5	103
16 Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 6	107
17 Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 7	119

Siapa Aku?

Halo!

Kenalkan! Nama aku Wijna.

Sering juga dipanggil Wisna.

Jarang-jarang dipanggil Mawi.

Kalau orang-orang sedang jengkel, kadang dipanggil bedebah juga. 😊

Aku dulu pernah jadi mahasiswa matematika UGM. Maksudnya, aku dulu itu pernah kuliah di Program Studi Matematika FMIPA UGM. Masuk September 2004. Lulus Februari 2009. Info lebih lanjut, *googling* saja namaku di Google.

Oh ya, kenapa aku kurang kerjaan bikin tulisan ini?

Euh....

Tulisan ini aku buat dalam rangka **mengisi waktu luang**. Berhubung si *bocil* kalau makan sukanya diemut, jadi ya sambil nunggu itu rongga mulutnya kosong lagi, iseng-iseng aku ngerjain soal-soal ujian ini. Itu pun kalau pas lagi bosan nge-*scroll-scroll* *manga online*, *marketplace*, *Instagram*, dll.

Berhubung ngerjain soal ujian sambil nyuapin *bocil*, jadi ya cuma sebatas *orat-oret* di kertas-kertas kosong bekas. Pas menunggu azan subuh berkumandang atau pas *weekend* cuma di rumah doang, nah, baru deh *orat-oret* itu dipindah ke format \LaTeX .

Yah, pokoknya semua dibawa santai sajalah. *Lha wong*, namanya sekadar mengisi waktu luang. Bukan mahasiswa pula ini. 😊

Eh, sebelumnya ya, mohon maaf ya kalau tulisan ini lebih banyak salahnya daripada benarnya, hehehe. Maklum, kan sudah belasan tahun yang lalu jadi mahasiswa matematika. Jadi ya, mohon maaf kalau lupa-lupa ingat.

Tapi, terhubung pada zaman ini ada yang namanya math.stackexchange.com dan Quora. Jadi, boleh lah nyontek-nyontek sedikit. 😊

Ya, sudahlah. Bagian pengantar ini nggak usah panjang-panjang. Semoga ada yang bisa dipelajari dari tulisan ini.

Oh yes! Last but not least, matur nuwun buat teman-teman di HIMATIKA FMIPA UGM yang menyediakan sumber soal-soal ujian yang bisa diakses secara cuma-cuma di *website* mereka, himatika.fmipa.ugm.ac.id.

Ah... somehow I felt nostalgic....

Diketik sambil diiringi nyanyiannya mbak-mbak fromis_9.

Yogyakarta, 2022
Wihikan "Mawi" Wijna

Kalkulus 1 Buat Aku

Pas zamanku kuliah (tahun 2004-2009 silam), Kalkulus 1 itu mata kuliah wajib berbobot 3 SKS yang diselenggarakan pada Semester 1 Program Studi Matematika FMIPA UGM. Jadi ya, Kalkulus 1 itu adalah salah satu mata kuliah yang menjadi "santapannya" para mahasiswa baru.

Kalau nggak salah, semua mahasiswa baru di FMIPA itu ya belajar Kalkulus 1 deh. Mau itu mahasiswa prodi Matematika, Statistika, Fisika, Ilmu Komputer, dll semua pernah mengenyam mata kuliah Kalkulus 1.

Karena hal-hal yang dipelajari di Kalkulus 1 itu "hanya" seputar fungsi, trigonometri, limit, dan turunan, jadinya ya masih bisa dibilang nggak bikin kaget mahasiswa baru lah. Toh, materinya nggak jauh beda dengan materi pelajaran matematika pas di SMA dulu.

Hanya saja, salahku dulu itu adalah **terlalu meremehkan/menggampangkan Kalkulus 1**. Ya itu, karena materinya nggak jauh beda dengan materi mata pelajaran matematika pas SMA. Tapi ternyata, "level" soal ujiannya yang beda jauh! Mungkin karena soal ujian di SMA lebih dominan pilihan ganda, sedangkan soal ujian sewaktu kuliah adalah esai yang mengandung perintah **jelaskan!** Pada akhirnya, aku baru bisa beradaptasi dengan "menjelaskan" ini saat sudah 1 tahun berkuliah.

Kalau boleh dibilang, aku itu sebetulnya nggak terlalu favorit dengan mata kuliah Kalkulus. Sialnya, hingga semester 4 masih ada yang mata kuliah Kalkulus Multivariabel! Kalau diberi nilai dari rentang 1 hingga 10, aku menilai mata kuliah Kalkulus 1 dengan nilai 6, hahaha. 😊

Kenapa ya?

Yang jelas bukan karena dosennya kok! Pas semester 1 dulu, aku diajar mata kuliah Kalkulus 1 sama Pak Atok Zulijanto. Beliau mengajarnya enak kok. Santai, kalem, nggak suka marah-marah seperti dosen prodi sebelah 😊. Hanya saja, seumur kuliah aku diajar oleh Pak Atok ya hanya di mata kuliah Kalkulus 1 itu, karena ke depannya aku lebih menggemari mata kuliah rumpun aljabar ketimbang analisis.

Pada akhirnya, aku mengantongi **nilai akhir C** untuk mata kuliah Kalkulus 1 pas semester 1 itu. Nilai akhir C itulah yang tetap bertengger di transkrip nilai akhir. Masih lebih baik lah, daripada mata kuliah Fungsi Variabel Kompleks yang bertengger dengan nilai akhir D di transkrip nilai akhir.

Aku nggak begitu berambisi sih buat meng-A-kan mata kuliah analisis karena ya itu, aku sadar bahwa aku lebih suka aljabar ketimbang analisis. Dibandingkan menghitung secara detil, aku lebih suka membuktikan kebenaran pernyataan, apalagi mencari-cari kesalahan. 😊

Eh, sebetulnya, pas semester 9 aku pernah mengambil ulang mata kuliah Kalkulus 1 lagi. Tapi, dosen pengajarnya bukan Pak Atok. Seperti yang bisa ditebak, mata kuliah Kalkulus 1 yang diulang itu berakhir kembali dengan nilai akhir C! Hahaha. 😊

Sebetulnya, niatku kuliah di semester 9 itu (September 2008 s.d. Desember 2008) cuma buat mengisi waktu luang menunggu wisuda bulan Februari 2009. Apalagi pas semester 9 itu aku sering *backstreet* pasca-KKN (*if you know what I mean*). Bukan perilaku yang baik sih ini. Jangan ditiru! 😊

Seperti yang aku tuliskan sebelumnya, tulisan ini aku buat dalam rangka **mengisi waktu luang** sambil menyuapi *bocil*. Aku tertarik buat mengerjakan soal-soal ujian mata kuliah Kalkulus 1 karena ini kan mata kuliah wajib semester 1. Masak *ex*-mahasiswa matematika nggak bisa mengerjakan? Sekaligus juga pingin tahu, seperti apa sih "susahnya" soal-soal ujian mata kuliah Kalkulus tahun 2021, yang notabene 17 tahun semenjak kuliah Kalkulus 1 pertamaku.

Aku sih percaya, nilai akhir mata kuliah Kalkulus 1-ku yang C itu sebetulnya bisa lebih baik lagi asalkan melihatnya dari keseluruhan proses pembelajaran, bukan hanya dari dibobot tinggi berdasarkan nilai ujian tengah semester dan ujian akhir semester. Aku yakin, semisal pas ujian boleh makan, minum, dan menyetel lagu-lagu J-pop kesukaan, nilaiku pasti lebih baik. Syukur-syukur kalau waktu pengerjaannya bukan 120 menit, tapi 1 hari, hahaha. 😊

Oke deh! Sebagai penutup, semoga tulisan ini membawa manfaat. Walaupun aku yakin kalau tulisan ini lebih banyak salahnya daripada benarnya, hehehe. Maklum, kan sudah belasan tahun yang lalu jadi mahasiswa matematika. Jadi ya, mohon maaf kalau lupa-lupa ingat.

Aku nggak tahu apakah benar-benar ada orang yang membaca tulisan ini. Semisal Anda yang membaca tulisan ini adalah mahasiswa, aku doakan semoga Anda mendapat pencerahan dan sukses berkuliah. Semisal Anda yang membaca tulisan ini penasaran dengan soal-soal ujian kuliah matematika, aku harap Anda tidak *shock* dan bisa memahami tulisan ini dengan baik. Semisal Anda yang membaca tulisan ini hanya sekadar mengisi waktu luang, aku sarankan untuk membaca tulisan ini sebagai kawan *ngendog* di toilet.

Akhir kata, selamat menikmati tulisan ini!

Yogyakarta, 2022
Wihikan "Mawi" Wijna

1

Soal-Soal Ujian Tengah Semester

1. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan berikut!

(a) $|1 - 3x| \leq |x| + 3$

(b) $\sqrt{x} \geq \sqrt{x+12} - 3$

2. Let f and g be two functions, were

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & , x < 0 \\ 2+3x & , x \geq 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad g(x) = \frac{x+3}{|x-4|}$$

Determine:

(a) $f^{-1}(x)$

(b) $f \circ g(x)$

3. Diberikan persamaan kurva di dalam sistem koordinat kutub $r = 2 + \sin \theta$. Gambarlah kurva tersebut!

4. Tentukan nilai limit berikut (jika ada). Mahasiswa tidak diperkenankan menggunakan aturan L'Hospital.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-1 + \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x}$

5. Tentukan nilai bilangan real $a + 2b$, jika diketahui f kontinu pada \mathbb{R} , dengan

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+3)x^2+2x} & , x < -2 \\ a - bx & , -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{1 - \cos(x-1)}{x^3 - 1} & , x > 1 \end{cases}$$

Berikan jawaban dengan penjelasan yang sejelas-jelasnya!

2

Soal-Soal Ujian Akhir Semester

1. (a) Diketahui $a \in \mathbb{R}$ sehingga

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sec x - \tan x}{ax^3 + 8x^4 - 10x^5}$$

ada (berhingga). Tentukan nilai limit di atas!

- (b) Tentukan nilai dari

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) \ln \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right)$$

jika ada!

2. Determine $f'(3)$, if

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 7 & \text{if } 1 \leq x < 3 \\ 2\sqrt{x^2 - 8} & \text{if } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

3. Tentukan $\frac{d^2y}{dx^2}$ jika diketahui

$$\sin y + \cos x + xy^3 = 0.$$

4. Akan dibuat jendela berbentuk trapesium. Jika panjang kedua sisi miring masing-masing adalah $\sqrt{6}$ dan panjang salah satu sisi sejajar adalah 1, maka tentukan panjang sisi sejajar yang lain agar luas jendela maksimum!

5. Jika fungsi g mempunyai derivatif pada \mathbb{R} , dengan $g(-1) = -2$ dan $g'(-1) = 3$, dan fungsi f memiliki rumus

$$f(x) = e^{2x} g\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

tentukan persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik dengan absis $x = 0$!

6. Diberikan

$$f(x) = 2x + \ln(x^2 - 3)$$

Tentukan:

- (a) domain fungsi f ;
- (b) daerah naik/turun fungsi f ;
- (c) titik ekstrem f dan jenisnya;
- (d) daerah cekung ke atas/bawah dan titik belok fungsi f ;
- (e) asimtot-asimtot untuk f

Dengan memanfaatkan hasil yang telah diperoleh, buatlah sketsa grafik fungsi f !

7. Perderetkan $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x-1}$ secara Maclaurin! Berikan deret Anda minimal sampai 4 suku!

3

Ayo Kerjakan!

Ujian Tengah Semester

Soal Nomor 1

Soal

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan berikut!

(a) $|1 - 3x| \leq |x| + 3$

(b) $\sqrt{x} \geq \sqrt{x+12} - 3$

Dikerjakan

Untuk mengerjakan soal ini kita harus mengetahui 2 sifat pada bilangan real ini.

Sifat 1. *Trichotomy.*

Untuk sebarang $a \in \mathbb{R}$, maka salah satu dari 3 kemungkinan berikut akan berlaku.

- $a < 0$.
- $a = 0$.
- $a > 0$.

Sifat 2. Harga Mutlak.

Untuk sebarang $a \in \mathbb{R}$, maka salah satu dari 3 kemungkinan berikut akan berlaku.

- Jika $a < 0$, maka $|a| = -a$.
- Jika $a = 0$, maka $|a| = 0$.
- Jika $a > 0$, maka $|a| = a$.

Soal (a)

Kita akan mencari himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|1 - 3x| \leq |x| + 3$. Perhatikan bahwa di ruas kanan terdapat suku $|x|$.

Kita akan menyelidiki nilai dari $|x|$. Berdasarkan **Sifat 1** maka salah satu dari 3 kemungkinan berikut akan berlaku.

- $x < 0$.
- $x = 0$.
- $x > 0$.

Mari kita selidiki kemungkinan di atas satu per satu.

- **(1) Jika $x < 0$.**

Jika $x < 0$, maka kita akan memperoleh pertidaksamaan yang ekuivalen berikut.

$$\begin{aligned} x < 0 &\iff 3x < 0 \\ &\iff -3x > 0 \\ &\iff 1 - 3x > 1 \end{aligned}$$

Dengan demikian, jika $x < 0$, maka kita akan memperoleh pertidaksamaan $1 - 3x > 1$. Akibatnya, nilai dari $|1 - 3x|$ adalah $1 - 3x$.

Dengan demikian pula, pertidaksamaan $|1 - 3x| \leq |x| + 3$ akan ekuivalen dengan pertidaksamaan berikut.

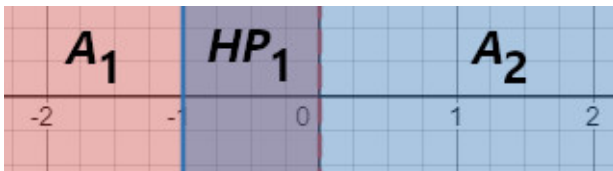
$$\begin{aligned}
|1 - 3x| \leq |x| + 3 &\iff 1 - 3x \leq -x + 3 \\
&\iff 1 - 3 \leq -x + 3x \\
&\iff -2 \leq 2x \\
&\iff -1 \leq x \\
&\iff x \geq -1
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, jika $x < 0$, maka pertidaksamaan $|1 - 3x| \leq |x| + 3$ akan ekuivalen dengan pertidaksamaan $x \geq -1$.

Nah, jika kita mengiriskan himpunan $x < 0$ dan $x \geq -1$, maka kita akan memperoleh salah satu himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|1 - 3x| \leq |x| + 3$. Kita sebut himpunan penyelesaian ini sebagai HP_1 .

$$\begin{aligned}
x < 0 &\iff x \in A_1 = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \\
x \geq -1 &\iff x \in A_2 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}
\end{aligned}$$

$$HP_1 = A_1 \cap A_2 = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 0\} \iff -1 \leq x < 0$$



- (2) Jika $x = 0$.

Jika $x = 0$, maka pertidaksamaan $|1 - 3x| \leq |x| + 3$ akan ekuivalen dengan pertidaksamaan berikut.

$$\begin{aligned}
|1 - 3x| \leq |x| + 3 &\iff |1 - 3 \cdot 0| \leq |0| + 3 \\
&\iff |1 - 0| \leq 0 + 3 \\
&\iff 1 \leq 3
\end{aligned}$$

Dengan demikian, jika $x = 0$, maka pertidaksamaan $|1 - 3x| \leq |x| + 3$ akan ekuivalen dengan pertidaksamaan $1 \leq 3$. Perhatikan bahwa pertidaksamaan $1 \leq 3$ terdefinisi dengan baik.

Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa $x = 0$ adalah salah satu nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $|1-3x| \leq |x|+3$. Kita bentuk suatu himpunan penyelesaian HP_2 yang hanya memuat nilai $x = 0$ sebagaimana berikut.

$$HP_2 = \{0\} \iff x = 0$$

• **(3) Jika $x > 0$.**

Jika $x > 0$, maka kita akan memperoleh pertidaksamaan yang ekuivalen berikut.

$$\begin{aligned} x > 0 &\iff 3x > 0 \\ &\iff -3x < 0 \\ &\iff 1 - 3x < 1 \end{aligned}$$

Dengan demikian, jika $x > 0$, maka kita akan memperoleh pertidaksamaan $1 - 3x < 1$. Perhatikan! Karena $1 - 3x < 1$, maka ada tiga kemungkinan sebagai berikut.

1. Nilai $1 - 3x$ berada di interval $(0, 1)$.
2. Nilai $1 - 3x = 0$.
3. Nilai $1 - 3x$ berada di interval $(-\infty, 0)$.

Mari kita selidiki tiga kemungkinan di atas satu per satu.

• **(3.1) Jika nilai $1 - 3x$ berada di interval $(0, 1)$.**

Perhatikan bahwa fungsi $f(x) = 1 - 3x$ adalah suatu fungsi linear (grafiknya berwujud garis lurus). Kita akan mencari nilai x_1 dan x_2 sedemikian sehingga $f(x_1) = 0$ dan $f(x_2) = 1$.

1. $f(x_1) = 0 \iff 1 - 3x_1 = 0 \iff 1 = 3x_1 \iff x_1 = 1/3$.
2. $f(x_2) = 1 \iff 1 - 3x_2 = 1 \iff -3x_2 = 0 \iff x_2 = 0$.

Dari penjabaran di atas, diperoleh $f(1/3) = 0$ dan $f(0) = 1$. Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa nilai $f(x) = 1 - 3x$ berada di interval $(0, 1)$ jika dan hanya jika nilai x berada di interval $(0, 1/3)$.

Perhatikan bahwa nilai x yang berada di interval $(0, 1/3)$ tidak menimbulkan kontradiksi dengan syarat bahwa $x > 0$. Karena kedua syarat tersebut "terasa" saling timpa tindih, maka kita buat syarat baru dengan mengiriskan syarat $x > 0$ dan nilai x yang berada di interval $(0, 1/3)$ sebagai berikut.

$$x > 0 \iff x \in B_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

$$x \in (0, 1/3) \iff x \in B_2 = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1/3\}$$

Karena $B_2 \subset B_1$, maka akan diperoleh:

$$S_{\text{baru}} = B_1 \cap B_2 = B_2 \iff 0 < x < 1/3$$

Dengan demikian, untuk bagian (3.2) ini syarat $x > 0$ akan kita ganti dengan syarat baru, yaitu $0 < x < 1/3$. Kita sebut sebagai x berada di interval $(0, 1/3)$.

Oke! Kita lanjut dengan menyelidiki pertidaksamaan $|1 - 3x| \leq |x| + 3$ dengan x berada di interval $(0, 1/3)$. Jangan lupa! Karena x berada di interval $(0, 1/3)$, maka $1 - 3x$ akan berada di interval $(0, 1)$. Akibatnya, $|1 - 3x| = 1 - 3x$.

$$\begin{aligned} |1 - 3x| \leq |x| + 3 &\iff 1 - 3x \leq x + 3 \\ &\iff 1 - 3 \leq x + 3x \\ &\iff -2 \leq 4x \\ &\iff -1/2 \leq x \\ &\iff x \geq -1/2 \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, jika x berada di interval $(0, 1/3)$, maka pertidaksamaan $|1 - 3x| \leq |x| + 3$ akan ekuivalen dengan pertidaksamaan $x \geq -1/2$. Perhatikan bahwa pertidaksamaan $x \geq -1/2$ tidak memunculkan kontradiksi dengan syarat bahwa x berada di interval $(0, 1/3)$.

Nah, jika kita mengiriskan himpunan $x \geq -1/2$ dan syarat bahwa x berada di interval $(0, 1/3)$, maka kita akan memperoleh salah satu himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|1 - 3x| \leq |x| + 3$. Kita sebut himpunan penyelesaian ini sebagai HP_3 .

$$\begin{aligned} x \geq -1/2 &\iff x \in B_3 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1/2\} \\ x \in (0, 1/3) &\iff x \in S_{\text{baru}} \iff 0 < x < 1/3 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $S_{\text{baru}} \subset B_3$, dengan demikian kita akan memperoleh:

$$HP_3 = B_3 \cap S_{\text{baru}} = S_{\text{baru}} \iff \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1/3\} \iff 0 < x < 1/3$$



- (3.2) Jika nilai $1 - 3x = 0$.

Jika nilai $1 - 3x = 0$, maka kita akan memperoleh nilai $x = 1/3$. Perhatikan bahwa nilai $x = 1/3$ tidak memunculkan kontradiksi dengan syarat $x > 0$.

Jika kita substitusikan nilai $x = 1/3$ ke pertidaksamaan $|1 - 3x| \leq |x| + 3$, maka hasilnya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} |1 - 3x| \leq |x| + 3 &\iff |1 - 3 \cdot 1/3| \leq |1/3| + 3 \\ &\iff |1 - 1| \leq 1/3 + 3 \\ &\iff 0 \leq 10/3 \end{aligned}$$

Dengan demikian, jika $x = 1/3$, maka pertidaksamaan $|1 - 3x| \leq |x| + 3$ akan ekuivalen dengan pertidaksamaan $0 \leq 10/3$. Pertidaksamaan $0 \leq 10/3$ tersebut tidak memunculkan kontradiksi ya!

Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa $x = 1/3$ adalah salah satu nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $|1 - 3x| \leq |x| + 3$. Kita bentuk suatu himpunan penyelesaian HP_4 yang hanya memuat nilai $x = 1/3$ sebagaimana berikut.

$$HP_4 = \{1/3\} \iff x = 1/3$$

- (3.3) Jika nilai $1 - 3x$ berada di interval $(-\infty, 0)$.

Jika nilai $1 - 3x$ berada di interval $(-\infty, 0)$, maka hal tersebut ekuivalen dengan pertidaksamaan $1 - 3x < 0$. Pertidaksamaan tersebut ekuivalen dengan pertidaksamaan berikut.

$$\begin{aligned}
1 - 3x < 0 &\iff 1 < 3x \\
&\iff 1/3 < x \\
&\iff x > 1/3
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, pertidaksamaan $1 - 3x < 0$ akan ekuivalen dengan pertidaksamaan $x > 1/3$. Perhatikan bahwa pertidaksamaan $x > 1/3$ tidak memunculkan kontradiksi dengan syarat bahwa $x > 0$. Karena kedua syarat tersebut "terasa" saling tumpang tindih, maka kita buat syarat baru dengan mengiriskan syarat $x > 0$ dan $x > 1/3$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
x > 0 &\iff x \in B_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \\
x > 1/3 &\iff x \in B_4 = \{x \in \mathbb{R} : x > 1/3\}
\end{aligned}$$

Karena $B_4 \subset B_1$, maka akan diperoleh:
 $S_{\text{baru } 2} = B_1 \cap B_4 = B_4 \iff x > 1/3$

Dengan demikian, untuk bagian (3.3) ini syarat $x > 0$ akan kita ganti dengan syarat baru, yaitu $x > 1/3$.

Oke! Kita lanjut dengan menyelidiki pertidaksamaan $|1 - 3x| \leq |x| + 3$ dengan $x > 1/3$. Jangan lupa! Karena $x > 1/3 > 0$, maka $|x| = x$ dan $1 - 3x$ akan bernilai < 0 . Akibatnya, $|1 - 3x| = -(1 - 3x) = 3x - 1$.

$$\begin{aligned}
|1 - 3x| \leq |x| + 3 &\iff 3x - 1 \leq x + 3 \\
&\iff 3x - x \leq 3 + 1 \\
&\iff 2x \leq 4 \\
&\iff x \leq 2
\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, jika $x > 1/3$, maka pertidaksamaan $|1 - 3x| \leq |x| + 3$ akan ekuivalen dengan pertidaksamaan $x \leq 2$.

Nah, jika kita mengiriskan himpunan $x > 1/3$ dan $x \leq 2$, maka kita akan memperoleh salah satu himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $|1 - 3x| \leq |x| + 3$. Kita sebut himpunan penyelesaian ini sebagai HP_5 .

$$\begin{aligned}
x > 1/3 &\iff x \in S_{\text{baru } 2} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1/3\} \\
x \leq 2 &\iff x \in B_5 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}
\end{aligned}$$

$$HP_5 = S_{\text{baru } 2} \cap B_5 = \{x \in \mathbb{R} : 1/3 < x \leq 2\} \iff 1/3 < x \leq 2$$



Nah!

Setelah penjabaran panjang di atas, akhirnya kita memperoleh himpunan-himpunan penyelesaian untuk pertidaksamaan $|1 - 3x| \leq |x| + 3$ yaitu HP_1 hingga HP_5 sebagaimana berikut.

1. $HP_1 = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 0\}$
2. $HP_2 = \{0\}$
3. $HP_3 = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1/3\}$
4. $HP_4 = \{1/3\}$
5. $HP_5 = \{x \in \mathbb{R} : 1/3 < x \leq 2\}$

Perhatikan bahwa jika kita mengambil sebarang elemen x dari himpunan HP_i di atas, maka x tersebut akan memenuhi pertidaksamaan $|1 - 3x| \leq |x| + 3$.

Sebagai penutup, jika kita menggabungkan seluruh himpunan HP_i maka kita akan mendapatkan himpunan penyelesaian untuk pertidaksamaan $|1 - 3x| \leq |x| + 3$.

$$HP_{\text{final}} = \bigcup_{i=1}^5 HP_i = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 2\} \iff -1 \leq x \leq 2.$$

Jadi, himpunan penyelesaian untuk pertidaksamaan $|1 - 3x| \leq |x| + 3$ adalah $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 2\}$.

Soal (b)

Sekarang kita akan mencari himpunan penyelesaian untuk pertidaksamaan $\sqrt{x} \geq \sqrt{x+12} - 3$. Perhatikan bahwa pertidaksamaan tersebut memuat suku \sqrt{x} dan $\sqrt{x+12}$. Perhatikan dua hal berikut.

1. Suku \sqrt{x} akan terdefinisi dengan baik jika dan hanya jika $x \geq 0$.
2. Suku $\sqrt{x+12}$ akan terdefinisi dengan baik jika dan hanya jika $x+12 \geq 0$.

Perhatikan bahwa pertidaksamaan $x+12 \geq 0$ ekuivalen dengan $x \geq -12$. Kemudian, jika kita membentuk himpunan A_1 yang bersesuaian dengan $x \geq 0$ dan himpunan A_2 yang bersesuaian dengan $x \geq -12$ sebagai berikut:

- $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, dan
- $A_2 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -12\}$

maka himpunan $A' = A_1 \cap A_2$ akan memuat semua $x \in \mathbb{R}$ yang membuat suku \sqrt{x} dan $\sqrt{x+12}$ terdefinisi dengan baik. Perhatikan bahwa $A_1 \subset A_2$.

$$A' = A_1 \cap A_2 = A_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \iff x \geq 0$$

Perhatian!

Fungsi real f yang didefinisikan sebagai $f(a) = \sqrt{a}$ untuk sebarang $a \geq 0$ itu akan selalu bernilai positif.

Sekarang, mari kita mengkuadratkan kedua ruas pertidaksamaan $\sqrt{x} \geq \sqrt{x+12} - 3$!

$$\begin{aligned} \sqrt{x} \geq \sqrt{x+12} - 3 &\iff (\sqrt{x})^2 \geq (\sqrt{x+12} - 3)^2 \\ &\iff x \geq x+12 - 6\sqrt{x+12} + 9 \\ &\iff 6\sqrt{x+12} \geq 12+9 \\ &\iff 2\sqrt{x+12} \geq 7 \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, dengan mengkuadratkan kedua ruas pertidaksamaan $\sqrt{x} \geq \sqrt{x+12} - 3$, maka kita akan mendapatkan pertidaksamaan $2\sqrt{x+12} \geq 7$.

Ayo kita lanjut dengan mengkuadratkan kedua ruas pertidaksamaan $2\sqrt{x+12} \geq 7$!

$$\begin{aligned}
2\sqrt{x+12} \geq 7 &\iff (2\sqrt{x+12})^2 \geq 7^2 \\
&\iff 4 \cdot (x+12) \geq 49 \\
&\iff 4x+48 \geq 49 \\
&\iff 4x \geq 1 \\
&\iff x \geq \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Kita dapat membentuk himpunan B yang bersesuaian dengan pertidaksamaan $x \geq \frac{1}{4}$ sebagai $B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{4} \right\}$.

Berdasarkan penjabaran di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa himpunan B adalah himpunan penyelesaian untuk pertidaksamaan $2\sqrt{x+12} \geq 7$.

Eh....

Tapi, kan soal meminta kita buat mencari himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\sqrt{x} \geq \sqrt{x+12} - 3$?

Ingat! Di awal tadi kita sudah mendapatkan himpunan $A' = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ sedemikian sehingga pertidaksamaan $\sqrt{x} \geq \sqrt{x+12} - 3$ terdefinisi dengan baik untuk setiap $x \in A'$.

Jangan salah lho ya! Yang dimaksud dengan **terdefinisi dengan baik** itu adalah suku-suku di ruas kiri dan ruas kanan pertidaksamaan $\sqrt{x} \geq \sqrt{x+12} - 3$ terdefinisi dengan baik, yang tidak lain adalah suku \sqrt{x} dan $\sqrt{x+12}$ terdefinisi dengan baik.

Ingat ya! Walaupun pertidaksamaan $\sqrt{x} \geq \sqrt{x+12} - 3$ terdefinisi dengan baik, **TIDAK ADA JAMINAN** bahwa nilai kebenarannya (*its truth value*) adalah benar (*true*). Dengan demikian, himpunan A' **tidak bisa disebut** sebagai himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\sqrt{x} \geq \sqrt{x+12} - 3$.

Naaah, di lain sisi, dari sekian panjang proses pengkuadratan di atas, kita memperoleh bahwa pertidaksamaan $\sqrt{x} \geq \sqrt{x+12} - 3$ "ekuivalen" dengan pertidaksamaan $2\sqrt{x+12} \geq 7$ dengan himpunan B sebagai himpunan penyelesaiannya. Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa setiap $x \in B$ akan menyebabkan nilai kebenaran pertidaksamaan $\sqrt{x} \geq \sqrt{x+12} - 3$ menjadi benar.

Secara ringkasnya:

1. Kita punya himpunan A' sedemikian sehingga untuk setiap $x \in A'$ akan menyebabkan pertidaksamaan $\sqrt{x} \geq \sqrt{x+12} - 3$ terdefinisi dengan baik, dan
2. Kita punya himpunan B sedemikian sehingga untuk setiap $x \in B$ akan menyebabkan nilai kebenaran pertidaksamaan $\sqrt{x} \geq \sqrt{x+12} - 3$ menjadi benar.

Jika kita mengiriskan himpunan A' dengan B , maka kita akan mendapatkan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\sqrt{x} \geq \sqrt{x+12} - 3$.

$$A' \cap B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{4}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{4}\right\} = B$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\sqrt{x} \geq \sqrt{x+12} - 3$ adalah $\left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{4}\right\}$.

■

4

Ayo Kerjakan!

Ujian Tengah Semester

Soal Nomor 2

Soal

Let f and g be two functions, were

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & , x < 0 \\ 2+3x & , x \geq 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad g(x) = \frac{x+3}{|x-4|}$$

Determine:

- (a) $f^{-1}(x)$
- (b) $f \circ g(x)$

Dikerjakan

Kita kerjakan pakai bahasa Indonesia saja ya, supaya menjelaskannya lebih gampang.

Soal (a)

Sekarang, kita akan menentukan f^{-1} . Sebelumnya, kita harus memastikan dahulu bahwa fungsi f terdefinisi dengan baik.

Sebagaimana definisi fungsi f berikut, terlihat bahwa fungsi f merupakan fungsi *piecewise* dengan 2 subdomain, yaitu $x < 0$ dan $x \geq 0$. Mari kita selidiki masing-masing cabang fungsi f tersebut.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & , x < 0 \\ 2+3x & , x \geq 0 \end{cases}$$

Pada cabang yang pertama, fungsi f didefinisikan sebagai $f(x) = \frac{1-x}{x}$ dengan subdomainnya adalah $x < 0$. Perhatikan bahwa jika $x = 0$, maka cabang fungsi f ini tidak akan terdefinisi dengan baik. Akan tetapi, karena $x = 0$ tidak termuat di dalam subdomain $x < 0$, maka kita dapat menyimpulkan bahwa fungsi f untuk cabang pertama terdefinisi dengan baik.

Pada cabang yang pertama, fungsi f didefinisikan sebagai $f(x) = 2 + 3x$ dengan subdomainnya adalah $x \geq 0$. Perhatikan bahwa cabang fungsi f ini tidak lain adalah fungsi linear yang akan selalu terdefinisi dengan baik untuk sebarang $x \in \mathbb{R}$. Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa fungsi f untuk cabang kedua terdefinisi dengan baik.

Berdasarkan uraian dua paragraf di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa fungsi f terdefinisi dengan baik. Selanjutnya, ayo kita selidiki range fungsi f .

Kita akan menyelidiki range fungsi f dengan cara menyelidiki range tiap-tiap cabang fungsi f . Ayo kita mulai dengan menyelidiki cabang fungsi f yang pertama.

Untuk cabang yang pertama, fungsi f didefinisikan sebagai $f(x) = \frac{1-x}{x}$ dengan subdomainnya adalah $x < 0$. Perhatikan bahwa definisi fungsi f untuk cabang ini dapat diubah menjadi seperti ini.

$$f(x) = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x} = \frac{1}{x} - 1$$

Karena:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} - 1 = -\infty - 1 = -\infty$, dan
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} - 1 = 0 - 1 = -1$

maka kita bisa menyimpulkan bahwa range cabang fungsi f untuk $x < 0$ adalah $\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -1\} \iff -\infty < x < -1$.

Untuk cabang yang kedua, fungsi f didefinisikan sebagai $f(x) = 2 + 3x$ dengan subdomainnya adalah $x \geq 0$. Karena:

- $f(0) = 2 + 3 \cdot 0 = 2$, dan
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + 3x = 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = 2 + \infty = +\infty$

maka kita bisa menyimpulkan bahwa range cabang fungsi f untuk $x \geq 0$ adalah $\{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < +\infty\} \iff 2 \leq x < +\infty$.

Perhatikan bahwa range cabang-cabang fungsi f adalah himpunan yang saling asing. Dengan demikian fungsi f^{-1} akan menjadi fungsi yang terdefinisi dengan baik.

Kita akan menentukan f^{-1} dengan cara menentukan f^{-1} untuk setiap cabang fungsi f . Ayo kita mulai dengan menentukan f^{-1} untuk cabang fungsi f yang pertama.

Untuk cabang yang pertama, fungsi f didefinisikan sebagai $f(x) = \frac{1-x}{x}$ dengan rangenya adalah $\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -1\}$. Perhatikan bahwa:

$$f(x) = \frac{1-x}{x} \iff f(x) = \frac{1}{x} - 1 \iff f(x) + 1 = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{f(x) + 1}$$

Dengan demikian, f^{-1} untuk cabang fungsi f yang pertama adalah $f^{-1}(x) = \frac{1}{x+1}$.

Untuk cabang yang kedua, fungsi f didefinisikan sebagai $f(x) = 2 + 3x$ dengan rangenya adalah $\{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < +\infty\}$. Perhatikan bahwa:

$$f(x) = 2 + 3x \iff f(x) - 2 = 3x \iff x = \frac{f(x) - 2}{3}$$

Dengan demikian, f^{-1} untuk cabang fungsi f yang kedua adalah $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$.

Jadi, hasil akhir f^{-1} adalah sebagai berikut.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & , -\infty < x < -1 \\ \frac{x-2}{3} & , 2 \leq x < +\infty \end{cases}$$

Ingat! Domain f^{-1} tidak lain adalah range f ! Jika $x \notin \text{Range}(f)$, maka f^{-1} tidak akan terdefinisi.

Soal (b)

Sekarang, kita akan menentukan $f \circ g(x)$. Perhatikan bahwa fungsi rasional g dioperasikan pertama. Oleh sebab itu, mari kita selidiki dahulu domain dan range dari fungsi g . Sebelumnya, kita tampilkan dahulu definisi fungsi g sebagaimana berikut ini.

$$g(x) = \frac{x + 3}{|x - 4|}$$

Domain Fungsi g .

Berdasarkan definisi di atas, fungsi g tidak akan terdefinisi untuk $x = 4$ karena akan membuat bagian penyebut menjadi 0. Dengan demikian, kita harus "mendepak" bilangan 4 dari domain fungsi g .

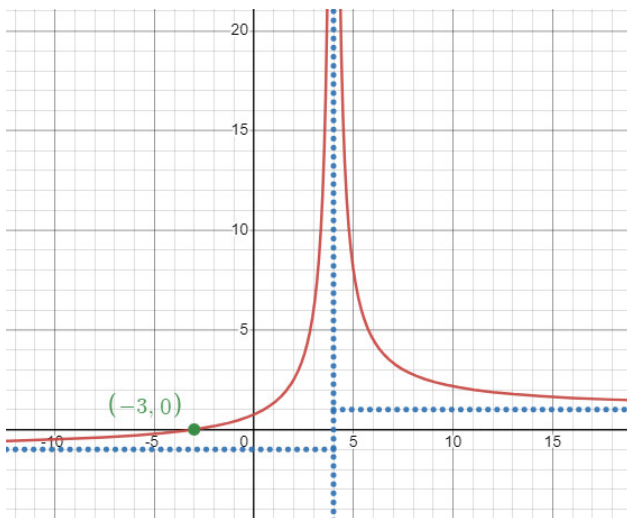
Jika diperhatikan lebih saksama, fungsi g terdefinisi dengan baik untuk semua bilangan real selain 4. Jadi, supaya fungsi g terdefinisi dengan baik, maka domainnya kita tentukan sebagai berikut.

$$\text{Domain}(g) = \mathbb{R} - \{4\} = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$$

Ingat bahwa $x \in (-\infty, 4)$ ekuivalen dengan $x < 4$ dan $x \in (4, +\infty)$ ekuivalen dengan $x > 4$.

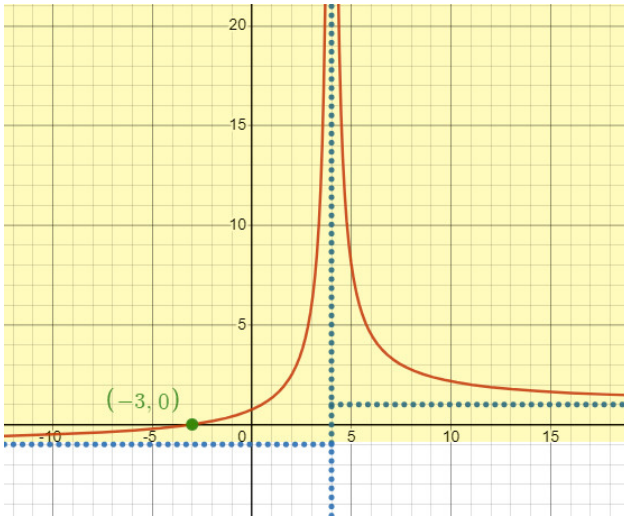
Range Fungsi g .

Selanjutnya, kita akan menyelidiki range fungsi g . Supaya lebih mudah, kita dapat mengetahui range fungsi g dengan menggambar grafiknya sebagaimana di bawah ini. Langkah-langkah untuk menggambar grafik ini dapat disimak pada bab ekstra di akhir pembahasan soal.



Range fungsi g tidak lain adalah semua titik di sumbu Y yang dilewati oleh kurva merah. Untuk lebih jelasnya, perhatikan bagian yang diarsir kuning pada grafik di bawah.

Terlihat bahwa kurva fungsi g tidak pernah melewati titik-titik yang ordinatnya ≤ -1 . Lebih tepatnya, kurva fungsi g akan melewati titik-titik yang ordinatnya > -1 hingga menuju $+\infty$.



Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan Range fungsi g sebagai berikut.

$$\text{Range}(g) = (-1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < +\infty\}$$

Menyelidiki Range Fungsi g yang Termuat di Domain Fungsi f .

Setelah menyelidiki domain dan range fungsi g , sekarang kita beralih menyelidiki domain fungsi f . Perhatikan definisi fungsi f berikut.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & , x < 0 \\ 2+3x & , x \geq 0 \end{cases}$$

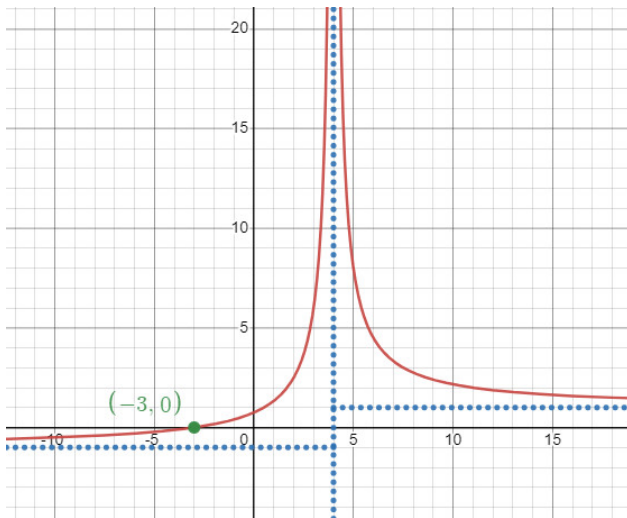
Sebagaimana definisi fungsi f di atas, diketahui bahwa fungsi f memiliki 2 subdomain, yaitu:

1. *Subdomain* - 1(f) = $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \iff x < 0$
2. *Subdomain* - 2(f) = $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \iff x \geq 0$

Nah, tugas kita selanjutnya adalah sebagai berikut.

1. Mencari tahu nilai-nilai $x \in \text{Domain}(g)$ sedemikian sehingga $g(x) \in \text{Subdomain} - 1(f)$.
2. Mencari tahu nilai-nilai $x \in \text{Domain}(g)$ sedemikian sehingga $g(x) \in \text{Subdomain} - 2(f)$.

Kita mulai dengan mencari tahu nilai-nilai $x \in \text{Domain}(g)$ sedemikian sehingga $g(x) \in \text{Subdomain} - 1(f)$. Dengan kata lain, kita akan mencari tahu nilai-nilai $x \in \text{Domain}(g)$ sedemikian sehingga $g(x) < 0$.



Perhatikan grafik fungsi g di atas! Perhatikan kurva fungsi g yang terletak di sebelah kiri asimtot vertikal! Kurva tersebut bersesuaian dengan cabang fungsi g untuk $x < 4$.

Dari grafik, terlihat bahwa $(-3, 0)$ merupakan titik potong kurva fungsi g dengan sumbu X. Terlihat bahwa untuk sebarang $x < -3$ akan menyebabkan $g(x) < 0$. Dengan kata lain, jika $x < -3$, maka akan menyebabkan $g(x) \in \text{Subdomain} - 1(f)$.

Kita lanjut mencari tahu nilai-nilai $x \in \text{Domain}(g)$ sedemikian sehingga $g(x) \in \text{Subdomain} - 2(f)$. Dengan kata lain, kita akan mencari tahu nilai-nilai $x \in \text{Domain}(g)$ sedemikian sehingga $g(x) \geq 0$.

Dari grafik fungsi g di atas terlihat bahwa untuk setiap $x \in [-3, 4)$ atau $x \in (4, +\infty)$ akan menyebabkan $g(x) \geq 0$. Dengan kata lain, jika $x \in [-3, 4)$ atau $x \in (4, +\infty)$, maka akan menyebabkan $g(x) \in \text{Subdomain} - 2(f)$.

Berdasarkan hasil di atas, kita bisa mendefinisikan ulang fungsi g sebagai berikut. Tujuannya adalah untuk "memecah" range fungsi g supaya "pas" dengan domain fungsi f . Hal ini semata-mata demi memudahkan kita dalam membuat komposisi fungsi $f \circ g$.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{-(x-4)} & , x < -3 \\ \frac{x+3}{-(x-4)} & , -3 \leq x < 4 \\ \frac{x+3}{x-4} & , x > 4 \end{cases}$$

Membuat Komposisi Fungsi $f \circ g$.

Nah, sekarang, saatnya kita komposisikan $f \circ g$ dengan menggunakan hasil-hasil yang sudah kita peroleh.

1. Untuk $x \in \text{Domain}(g)$ dengan $x < -3$, maka cabang fungsi g yang bersesuaian adalah $g(x) = \frac{x-3}{-(x-4)}$. Hal ini akan menyebabkan $g(x) < 0$ yang ekuivalen dengan $g(x) \in \text{Subdomain}^{-1}(f)$.

Karena $\text{Subdomain}^{-1}(f) \iff x < 0$ bersesuaian dengan cabang fungsi $f(x) = \frac{1-x}{x}$, maka hasil komposisi $f \circ g$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= \frac{1-g(x)}{g(x)} \\ &= \frac{1}{g(x)} - 1 \\ &= \frac{1}{\left(\frac{x-3}{-(x-4)}\right)} - 1 \\ &= \frac{-(x-4)}{x-3} - 1 \\ &= \frac{-(x-4) - (x-3)}{x-3} = \frac{-x+4-x+3}{x-3} \\ &= \frac{7-2x}{x-3} \end{aligned}$$

2. Untuk $x \in \text{Domain}(g)$ dengan $-3 \leq x < 4$, maka cabang fungsi g yang bersesuaian adalah $g(x) = \frac{x-3}{-(x-4)}$. Hal ini akan menyebabkan $g(x) \geq 0$ yang ekuivalen dengan $g(x) \in \text{Subdomain}-2(f)$.

Karena $\text{Subdomain} - 2(f) \iff x \geq 0$ bersesuaian dengan cabang fungsi $f(x) = 2 + 3x$, maka hasil komposisi $f \circ g$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 f \circ g(x) &= f(g(x)) \\
 &= 2 + 3 \cdot g(x) \\
 &= 2 + 3 \cdot \left(\frac{x-3}{-(x-4)} \right) \\
 &= \frac{2(-1)(x-4) + 3(x-3)}{-(x-4)} \\
 &= \frac{-2x + 8 + 3x - 9}{-(x-4)} = \frac{x-1}{-(x-4)} \\
 &= \frac{x-1}{4-x}
 \end{aligned}$$

3. Untuk $x \in \text{Domain}(g)$ dengan $x > 4$, maka cabang fungsi g yang bersesuaian adalah $g(x) = \frac{x-3}{x-4}$. Hal ini akan menyebabkan $g(x) \geq 0$ yang ekuivalen dengan $g(x) \in \text{Subdomain} - 2(f)$.

Karena $\text{Subdomain} - 2(f) \iff x \geq 0$ bersesuaian dengan fungsi $f(x) = 2 + 3x$, maka hasil komposisi $f \circ g$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 f \circ g(x) &= f(g(x)) \\
 &= 2 + 3 \cdot g(x) \\
 &= 2 + 3 \cdot \left(\frac{x-3}{x-4} \right) \\
 &= \frac{2(x-4) + 3(x-3)}{x-4} \\
 &= \frac{2x - 8 + 3x - 9}{x-4} \\
 &= \frac{5x - 17}{x-4}
 \end{aligned}$$

Jadi, berikut ini adalah hasil akhir definisi fungsi komposisi $f \circ g$ beserta domainnya. Perhatikan bahwa domain $f \circ g$ tidak lain adalah domain fungsi g .

$$f \circ g(x) = \begin{cases} \frac{7-2x}{x-3} & , x < -3 \\ \frac{x-1}{4-x} & , -3 \leq x < 4 \\ \frac{5x-17}{x-4} & , x > 4 \end{cases}$$

■

5

Ekstra! Penjelasan Tambahan 1 Ujian Tengah Semester Soal Nomor 2

Tentang

Cara menggambar grafik fungsi $g(x) = \frac{x+3}{|x-4|}$.

Penjelasan

Pada bab sebelumnya, supaya fungsi g terdefinisi dengan baik, maka domainnya kita tentukan sebagai berikut.

$$\text{Domain}(g) = \mathbb{R} - \{4\} = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$$

Kemudian, dengan menggunakan definisi harga mutlak, fungsi g dapat kita ubah menjadi fungsi *piecewise* yang didefinisikan sebagai berikut.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x-4} & , x > 4 \\ \frac{x+3}{-(x-4)} & , x < 4 \end{cases}$$

Selanjutnya, kita akan menyelidiki cabang-cabang fungsi g tersebut satu per satu.

Menyelidiki Cabang Fungsi g untuk $x > 4$.

Kita mulai dengan menyelidiki cabang fungsi g untuk $x > 4$, yaitu $g(x) = \frac{x+3}{x-4}$. Perhatikan bahwa fungsi rasional tersebut dapat kita ubah bentuknya menjadi seperti ini.

$$\frac{x+3}{x-4} = \frac{x+(-4+7)}{x-4} = \frac{x-4}{x-4} + \frac{7}{x-4} = 1 + 7 \cdot \left(\frac{1}{x-4}\right)$$

Berdasarkan penjabaran di atas, cabang fungsi g untuk $x > 4$, yaitu $g(x) = \frac{x+3}{x-4}$, ekuivalen dengan $g(x) = 1 + 7 \cdot \left(\frac{1}{x-4}\right)$.

Karena fungsi g terdefinisi untuk $x > 4$, maka kita bisa menyelidiki nilai fungsi tersebut ketika $x \rightarrow 4^+$ dan $x \rightarrow +\infty$. Pembahasannya sebagai berikut.

- Ketika $x \rightarrow 4^+$, maka nilai $x-4$ adalah bilangan real positif yang sangat kecil (0,000...). Akibatnya, nilai $\frac{1}{x-4}$ akan mendekati $+\infty$. Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa jika $x \rightarrow 4^+$, maka nilai $1 + 7 \cdot \left(\frac{1}{x-4}\right) = g(x)$ akan mendekati $+\infty$.
- Ketika $x \rightarrow +\infty$, maka nilai $x-4$ adalah bilangan real positif yang sangat besar. Akibatnya, nilai $\frac{1}{x-4}$ akan mendekati 0.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 7 \cdot \left(\frac{1}{x-4}\right) = 1 + 7 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-4}\right) = 1 + 7 \cdot 0 = 1 + 0 = 1.$$

Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa jika $x \rightarrow +\infty$ maka nilai $g(x) = 1 + 7 \cdot \left(\frac{1}{x-4}\right)$ akan mendekati 1.

Perhatikan! Dengan kata lain, tidak ada $x > 4$ yang akan menyebabkan $1 + 7 \cdot \left(\frac{1}{x-4}\right) = 1$!

Menyelidiki Cabang Fungsi g untuk $x < 4$.

Selanjutnya, kita akan menyelidiki cabang fungsi g untuk $x < 4$, yaitu $g(x) = \frac{x+3}{-(x-4)}$. Perhatikan bahwa fungsi rasional tersebut dapat kita ubah bentuknya menjadi seperti ini.

$$\frac{x+3}{-(x-4)} = -1 \cdot \left(\frac{x+3}{x-4}\right) = -1 - 7 \cdot \left(\frac{1}{x-4}\right)$$

Berdasarkan penjabaran di atas, cabang fungsi g untuk $x < 4$, yaitu $g(x) = \frac{x+3}{-(x-4)}$, ekuivalen dengan $g(x) = -1 - 7 \cdot \left(\frac{1}{x-4}\right)$.

Karena fungsi g ini terdefinisi untuk $x < 4$, maka kita bisa menyelidiki nilai fungsi tersebut ketika $x \rightarrow 4^-$ dan $x \rightarrow -\infty$. Pembahasannya adalah sebagai berikut.

- Ketika $x \rightarrow 4^-$, maka nilai $x - 4$ adalah bilangan real negatif yang sangat kecil (-0,000...). Akibatnya, nilai $\frac{1}{x-4}$ akan mendekati $-\infty$. Akibatnya pula, nilai $-7 \cdot \frac{1}{x-4}$ akan mendekati $+\infty$. Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa jika $x \rightarrow 4^-$ maka nilai $-1 - 7 \cdot \left(\frac{1}{x-4}\right) = g(x)$ akan mendekati $+\infty$.

- Ketika $x \rightarrow -\infty$, maka nilai $x - 4$ adalah bilangan real negatif yang sangat besar. Akibatnya, nilai $\frac{1}{x-4}$ akan mendekati 0.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -1 - 7 \cdot \left(\frac{1}{x-4}\right) = -1 - 7 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x-4}\right) = -1 - 7 \cdot 0 = -1 + 0 = -1.$$

Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa jika $x \rightarrow -\infty$ maka nilai $-1 - 7 \cdot \left(\frac{1}{x-4}\right) = g(x)$ akan mendekati -1 .

Perhatikan! Tidak ada $x < 4$ yang akan menyebabkan $-1 - 7 \cdot \left(\frac{1}{x-4}\right) = -1$!

Asimtot Fungsi g .

Berdasarkan hal-hal yang diketahui di atas, yaitu:

1. Untuk $x > 4$, ketika $x \rightarrow 4^+$, maka nilai fungsi g akan mendekati $+\infty$,
2. Untuk $x > 4$, ketika $x \rightarrow +\infty$, maka nilai fungsi g akan mendekati 1,
3. Untuk $x < 4$, ketika $x \rightarrow 4^-$, maka nilai fungsi g akan mendekati $+\infty$, dan
4. Untuk $x < 4$, ketika $x \rightarrow -\infty$, maka nilai fungsi g akan mendekati -1 .

maka kita dapat mengetahui bahwa fungsi g memiliki sejumlah asimtot sebagai berikut.

1. Garis $x = 4$ adalah asimtot vertikal fungsi g .
2. Garis $y = 1$ adalah asimtot horizontal parsial fungsi g untuk $x > 4$.
3. Garis $y = -1$ adalah asimtot horizontal parsial fungsi g untuk $x < 4$.

Titik Potong Kurva Fungsi g dengan Sumbu X dan Sumbu Y.

Untuk memudahkan dalam menggambar kurva, kita dapat mencari titik potong kurva fungsi g dengan sumbu X dan sumbu Y.

Ayo kita cari titik potong kurva fungsi g dengan sumbu X dan sumbu Y untuk $x > 4$! Ingat! Cabang fungsi g untuk $x > 4$ adalah $g(x) = \frac{x+3}{x-4}$.

Jika kurva fungsi g untuk $x > 4$ memotong sumbu X, maka akan terdapat $x' > 4$ sedemikian sehingga $g(x') = \frac{x'+3}{x'-4} = 0$. Akan tetapi, perhatikan bahwa $g(x') = \frac{x'+3}{x'-4} = 0$ jika dan hanya jika $x' = -3$. Karena $x' = -3$ itu tidak memenuhi syarat $x > 4$, maka kita bisa menyimpulkan bahwa kurva fungsi g untuk $x > 4$ tidak memotong sumbu X.

Jika kurva fungsi g untuk $x > 4$ memotong sumbu Y, maka terdapat $x'' = 0$ sedemikian sehingga $(x'', g(x''))$ adalah titik potongnya. Akan tetapi, $x'' = 0$ tidak memenuhi syarat $x > 4$. Dengan demikian kita bisa menyimpulkan bahwa kurva fungsi g untuk $x > 4$ tidak memotong sumbu Y.

Kita lanjut mencari titik potong kurva fungsi g dengan sumbu X dan sumbu Y untuk $x < 4$! Ingat! Cabang fungsi g untuk $x < 4$ adalah $g(x) = \frac{x+3}{-(x-4)}$.

Jika kurva fungsi g untuk $x < 4$ memotong sumbu X, maka akan terdapat $x' < 4$ sedemikian sehingga $g(x') = \frac{x'+3}{-(x'-4)} = 0$. Perhatikan bahwa $g(x') = \frac{x'+3}{-(x'-4)} = 0$ jika dan hanya jika $x' = -3$. Karena $x' = -3$ memenuhi syarat $x < 4$, maka kita bisa menyimpulkan bahwa kurva fungsi g untuk $x < 4$ memotong sumbu X, yaitu di titik $(-3, 0)$.

Jika kurva fungsi g untuk $x > 4$ memotong sumbu Y, maka terdapat $x'' = 0$ sedemikian sehingga $(x'', g(x''))$ adalah titik potongnya. Perhatikan bahwa $x'' = 0$ memenuhi syarat $x < 4$.

$$g(0) = \frac{0+3}{-(0-4)} = \frac{3}{4}.$$

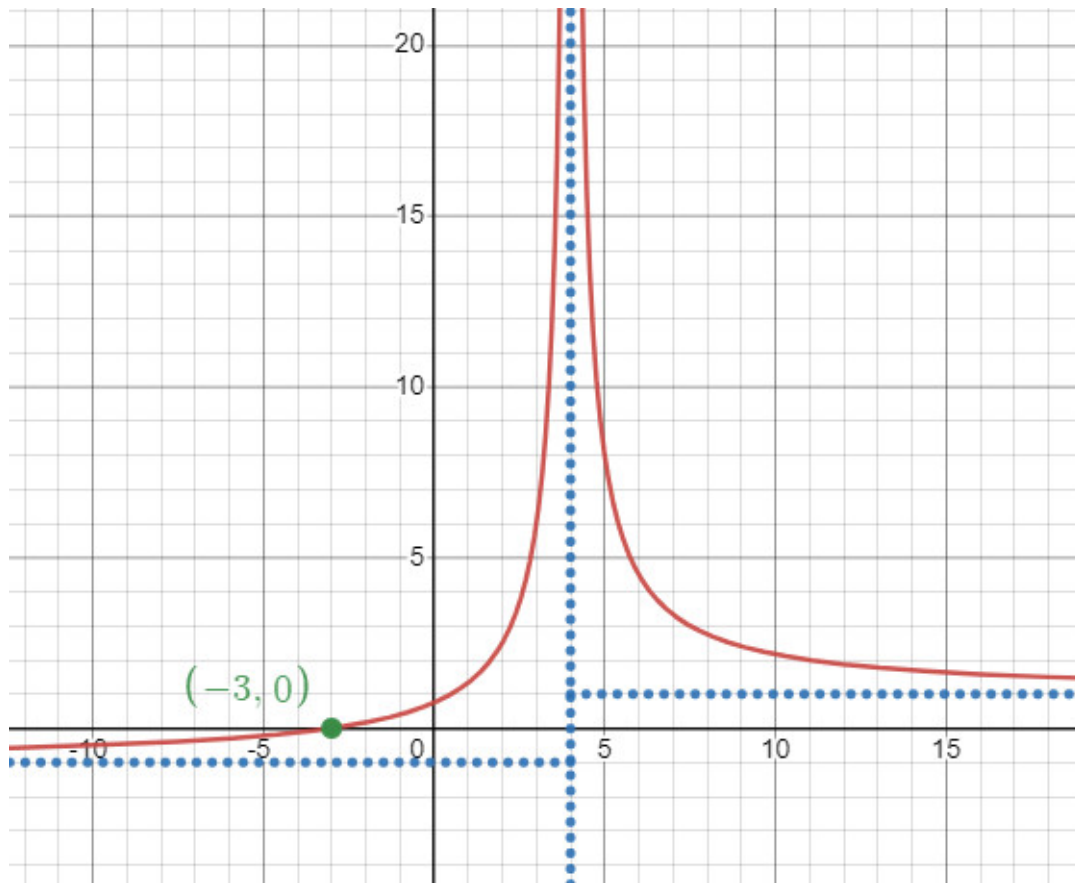
Dengan demikian kita bisa menyimpulkan bahwa kurva fungsi g untuk $x < 4$ tidak memotong sumbu Y, yaitu di titik $(0, 3/4)$.

Kesimpulan titik potong kurva fungsi g adalah sebagai berikut.

1. Untuk $x > 4$, kurva fungsi g tidak memotong sumbu X dan juga sumbu Y.
2. Untuk $x < 4$, kurva fungsi g memotong sumbu X di titik $(-3, 0)$ dan memotong sumbu Y di titik $(0, 3/4)$.

Menggambar Kurva Fungsi g .

Nah, dengan memanfaatkan asimtot-asimtot dan titik-titik potong, maka kita bisa menggambar grafik fungsi g sebagai berikut. Ingat! Karena g adalah fungsi rasional, maka bentuk kurvanya adalah melengkung, bukan garis lurus.



■

6

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 3

Soal

Diberikan persamaan kurva di dalam sistem koordinat kutub $r = 2 + \sin \theta$. Gambarlah kurva tersebut!

Dikerjakan

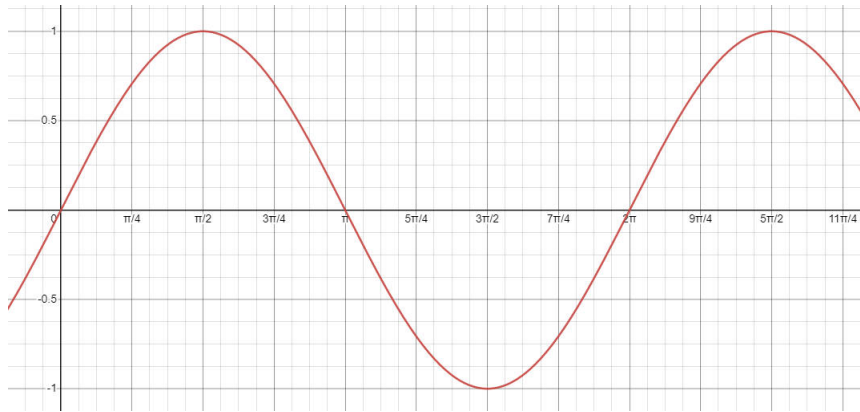
Untuk mengerjakan soal ini kita harus tahu nilai-nilai fungsi $\sin \theta$ di interval $[0, 2\pi]$. Tabel di bawah ini menyajikan beberapa nilai-nilai tersebut.

	$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$	$\theta = \pi$	$\theta = 3\pi/2$	2π
$\sin \theta$	0	1	0	-1	0

Oh iya! Jangan lupa juga sama nilai-nilai fungsi $\sin \theta$ di interval $[0, \pi/2]$ yang sudah dipelajari saat SMA dahulu.

	$\theta = 0^\circ$	$\theta = \pi/6 = 30^\circ$	$\theta = \pi/4 = 45^\circ$	$\theta = \pi/3 = 60^\circ$	$\theta = \pi/2 = 90^\circ$
$\sin \theta$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Seperti yang kita tahu, grafik fungsi $\sin \theta$ di bidang kartesius adalah seperti di bawah ini. Terlihat bahwa fungsi $\sin \theta$ merupakan **fungsi periodik**, yaitu fungsi yang nilainya selalu berulang pada suatu interval tertentu.

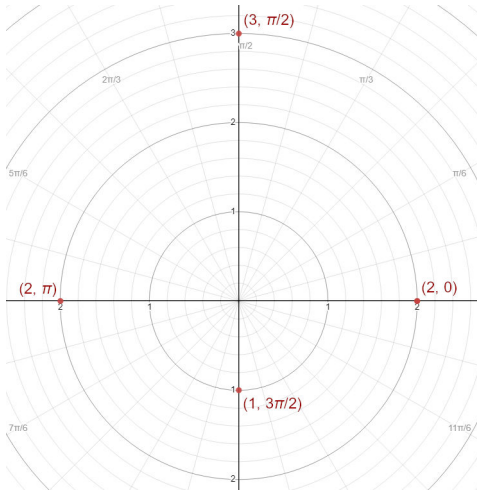


Kembali ke soal!

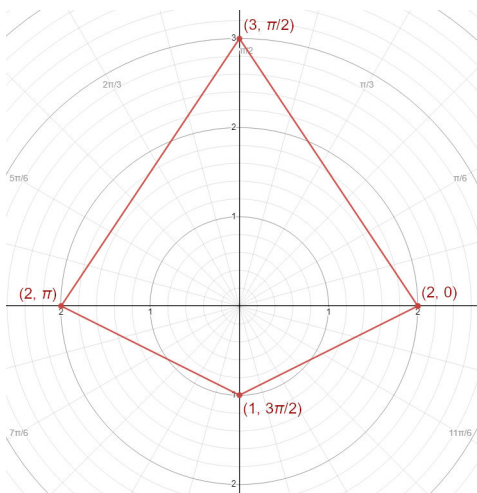
Kita diperintahkan untuk menggambar kurva $r = 2 + \sin \theta$ di sistem koordinat kutub. Kita mulai dengan menghitung nilai r untuk $\theta = 0, \pi/2, \pi,$ dan $3\pi/2$. Hasilnya adalah seperti tabel di bawah ini.

	$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$	$\theta = \pi$	$\theta = 3\pi/2$
$\sin \theta$	0	1	0	-1
$r = 2 + \sin \theta$	2	3	2	1
Koordinat Titik (r, θ)	$(2, 0)$	$\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$	$(2, \pi)$	$\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$

Berdasarkan perhitungan di atas, kita mendapatkan empat koordinat titik, yaitu: $(2, 0)$, $(3, \frac{\pi}{2})$, $(2, \pi)$, dan $(1, \frac{3\pi}{2})$. Ayo kita *plot* empat titik tersebut ke bidang sistem koordinat kutub!



Jika kita menghubungkan keempat titik tersebut secara berurutan sehingga membentuk garis "lurus", maka kita akan memperoleh hasil sebagai berikut.



Kurva di atas **BUKAN** kurva $r = 2 + \sin \theta$! Tapi, kurva di atas bisa memberi kita gambaran "bentuk umum" kurva $r = 2 + \sin \theta$. Terlihat bahwa kurva $r = 2 + \sin \theta$ itu simetris terhadap sumbu Y. Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan 2 hal berikut.

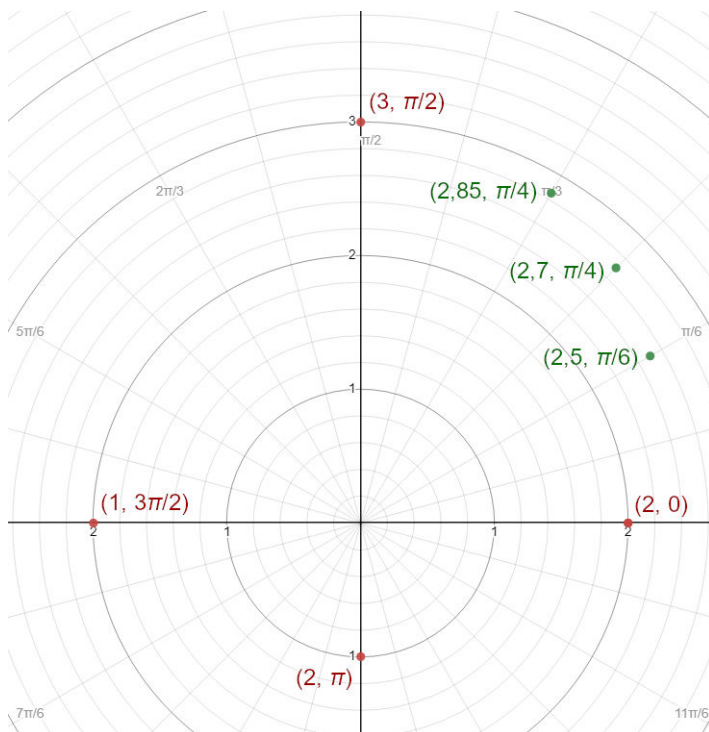
- Bentuk kurva di interval $[\pi/2, \pi]$ adalah cerminan bentuk kurva di interval $[0, \pi/2]$ terhadap sumbu Y.

- Bentuk kurva di interval $[\pi, 3\pi/2]$ adalah cerminan bentuk kurva di interval $[3\pi/2, 2\pi]$ terhadap sumbu Y.

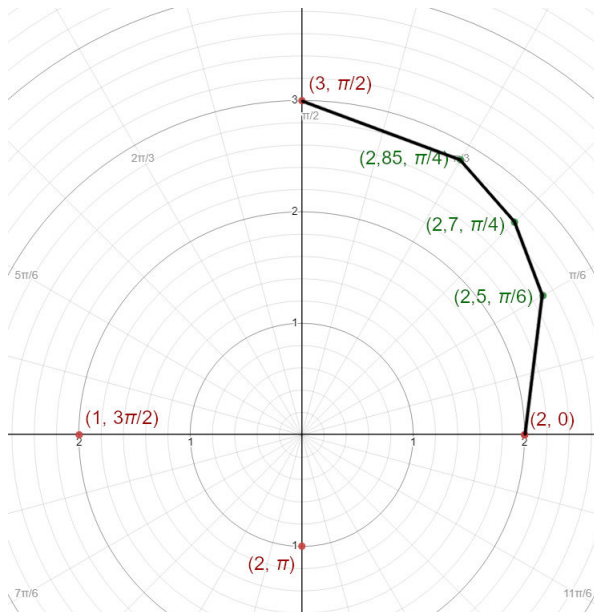
Selanjutnya, ayo kita tentukan beberapa titik di interval $[0, \pi/2]$. Supaya gampang, kita tentukan titik yang berhubungan dengan sudut-sudut istimewa, yaitu $\pi/6 = 30^\circ$, $\pi/4 = 45^\circ$, dan $\pi/3 = 60^\circ$. Hasilnya adalah pada tabel di bawah ini.

	$\theta = \pi/6 = 30^\circ$	$\theta = \pi/4 = 45^\circ$	$\theta = \pi/3 = 60^\circ$
$\sin \theta$	$1/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$r = 2 + \sin \theta$	$5/2$	$\frac{4+\sqrt{2}}{2} \approx \frac{4+1,4}{2} = \frac{5,4}{2} = 2,7$	$\frac{4+\sqrt{3}}{2} \approx \frac{4+1,7}{2} = \frac{5,7}{2} = 2,85$
Koordinat Titik (r, θ)	$\left(\frac{5}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$	$\left(2,7, \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(2,85, \frac{\pi}{3}\right)$

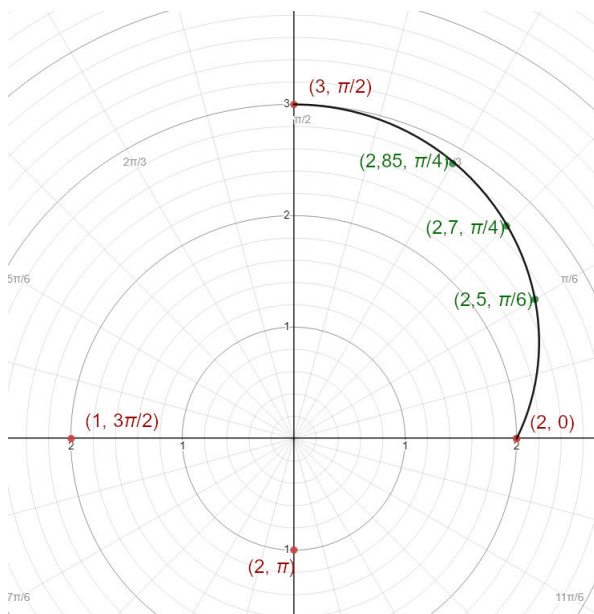
Berdasarkan perhitungan di atas, kita mendapatkan tiga koordinat titik, yaitu: $\left(\frac{5}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(2,7, \frac{\pi}{4}\right)$, dan $\left(2,85, \frac{\pi}{3}\right)$. Ayo kita *plot* ketiga titik tersebut ke bidang sistem koordinat kutub!



Jika kita menghubungkan titik-titik di interval $[0, \pi/2]$ secara berurutan sehingga membentuk garis "lurus", maka kita akan memperoleh hasil sebagai berikut.



Nah ini! Wujud kurva $r = 2 + \sin \theta$ di interval $[0, \pi/2]$ sudah mulai terlihat wujudnya. Karena garis lurus di sistem koordinat kutub itu "melengkung", maka wujud "mulus" kurva tersebut adalah seperti di bawah ini.



Sebagaimana yang disinggung di atas, karena bentuk kurva $r = 2 + \sin \theta$ di interval $[\pi/2, \pi]$ adalah cerminan bentuk kurva di interval $[0, \pi/2]$ terhadap sumbu Y, maka kita dengan mudah dapat menentukan koordinat tiga titik yang dilewati kurva $r = 2 + \sin \theta$ di interval $[\pi/2, \pi]$.

Ingat bahwa sudut-sudut istimewa di interval $[\pi/2, \pi] \iff [90^\circ, 180^\circ]$ adalah sebagai berikut.

$$1. 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi + \pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

Kita memperoleh koordinat titik $\left(2, 85, \frac{2\pi}{3}\right)$ yang merupakan cerminan titik $\left(2, 85, \frac{\pi}{3}\right)$ terhadap sumbu Y.

$$2. 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi + \pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Kita memperoleh koordinat titik $\left(2, 7, \frac{3\pi}{4}\right)$ yang merupakan cerminan titik $\left(2, 7, \frac{\pi}{4}\right)$ terhadap sumbu Y.

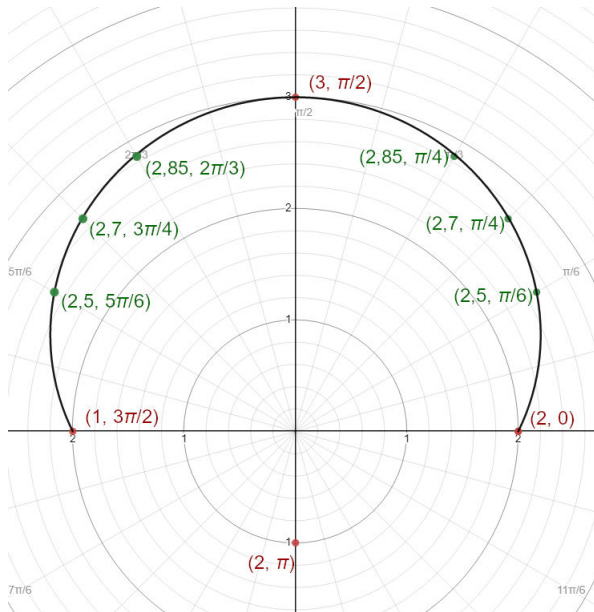
$$3. 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + 2\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Kita memperoleh koordinat titik $\left(\frac{5}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ yang merupakan cerminan titik $\left(\frac{5}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ terhadap sumbu Y.

Berdasarkan perhitungan di atas, kita mendapatkan tiga koordinat titik, yaitu: $\left(2, 85, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(2, 7, \frac{3\pi}{4}\right)$, dan $\left(\frac{5}{2}, \frac{4\pi}{3}\right)$. Ayo kita *plot* ketiga titik tersebut ke bidang sistem koordinat kutub!

Eee... supaya lebih cepat, sekalian saja kita hubungkan titik-titik di interval $[\pi/2, \pi]$ secara berurutan sehingga membentuk garis lurus sesuai kaidah sistem koordinat kutub.



Selanjutnya, kita akan mencari koordinat titik-titik yang dilewati oleh kurva $r = 2 + \sin \theta$ di interval $[\pi, 3\pi/2]$. Supaya mudah, kita akan mencari titik-titik yang berhubungan dengan sudut istimewa di interval $[0, \pi/2]$ sekaligus memanfaatkan identitas trigonometri $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$. Ingat bahwa $\sin(\pi) = 0$ dan $\cos(\pi) = -1$!

$$1. 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$$

$$\frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi + \pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin(\pi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos(\pi) \\ &= 0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot -1 = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$2. 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$$

$$\frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi + \pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3. 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$$

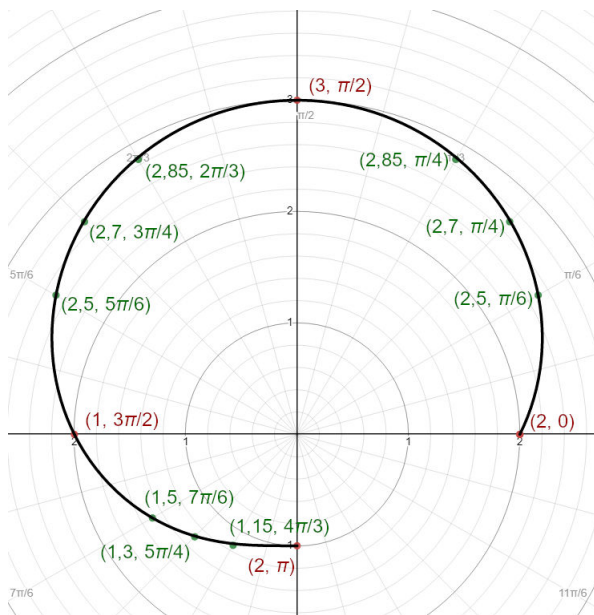
$$\frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi + 2\pi}{6} = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

	$\theta = 7\pi/6 = 210^\circ$	$\theta = 5\pi/4 = 225^\circ$	$\theta = 4\pi/3 = 240^\circ$
$\sin \theta$	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$
$r = 2 + \sin \theta$	$4/2 - 1/2 = 3/2$	$\frac{4-\sqrt{2}}{2} \approx \frac{4-1,4}{2} = \frac{2,6}{2} = 1,3$	$\frac{4-\sqrt{3}}{2} \approx \frac{4-1,7}{2} = \frac{2,3}{2} = 1,15$
Koordinat Titik (r, θ)	$\left(\frac{3}{2}, \frac{7\pi}{6}\right)$	$\left(1,3, \frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(1,15, \frac{4\pi}{3}\right)$

Berdasarkan perhitungan di atas, kita mendapatkan tiga koordinat titik, yaitu: $\left(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(1,3, \frac{5\pi}{4}\right)$, dan $\left(1,15, \frac{4\pi}{3}\right)$. Ayo kita *plot* ketiga titik tersebut ke bidang sistem koordinat kutub!

Eee... supaya lebih cepat, sekalian saja kita hubungkan titik-titik di interval $[\pi, 3\pi/2]$ secara berurutan sehingga membentuk garis lurus sesuai kaidah sistem koordinat kutub.



Sebagaimana yang disinggung di atas, karena bentuk kurva $r = 2 + \sin \theta$ di interval $[\pi, 3\pi/2]$ adalah cerminan bentuk kurva di interval $[3\pi/2, 2\pi]$ terhadap sumbu Y , maka kita dengan mudah dapat menentukan koordinat tiga titik yang dilewati kurva $r = 2 + \sin \theta$ di interval $[3\pi/2, 2\pi]$.

Ingat bahwa sudut-sudut istimewa di interval $[3\pi/2, 2\pi] \iff [270^\circ, 360^\circ]$ adalah sebagai berikut.

1. $270^\circ + 30^\circ = 300^\circ$

$$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi + \pi}{6} = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$$

Kita memperoleh koordinat titik $\left(1, 15, \frac{5\pi}{3}\right)$ yang merupakan cerminan titik $\left(1, 15, \frac{4\pi}{3}\right)$ terhadap sumbu Y .

2. $270^\circ + 45^\circ = 315^\circ$

$$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{6\pi + \pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Kita memperoleh koordinat titik $\left(1, 3, \frac{7\pi}{4}\right)$ yang merupakan cerminan titik $\left(1, 3, \frac{5\pi}{4}\right)$ terhadap sumbu Y .

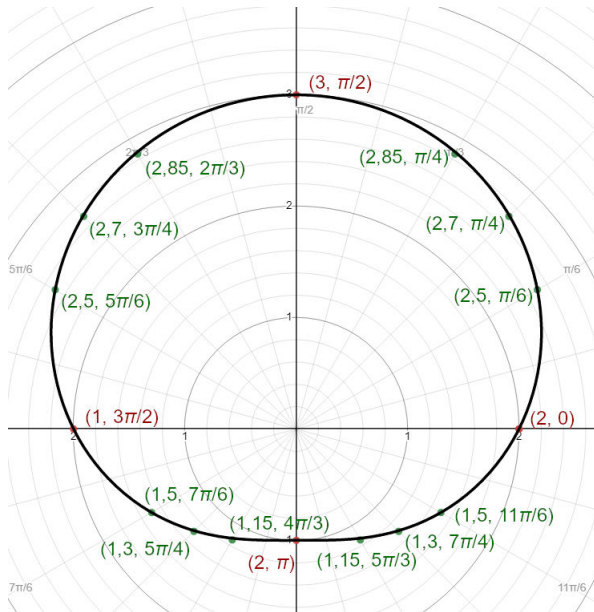
3. $270^\circ + 60^\circ = 330^\circ$

$$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi + 2\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

Kita memperoleh koordinat titik $\left(\frac{3}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$ yang merupakan cerminan titik $\left(\frac{3}{2}, \frac{7\pi}{6}\right)$ terhadap sumbu Y .

Berdasarkan perhitungan di atas, kita mendapatkan tiga koordinat titik, yaitu: $\left(1, 15, \frac{5\pi}{3}\right)$, $\left(1, 3, \frac{7\pi}{4}\right)$, dan $\left(\frac{3}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$. Ayo kita *plot* ketiga titik tersebut ke bidang sistem koordinat kutub!

Eee... supaya lebih cepat, sekalian saja kita hubungkan titik-titik di interval $[3\pi/2, 2\pi]$ secara berurutan sehingga membentuk garis lurus sesuai kaidah sistem koordinat kutub.



Selesai deh!

Di atas itulah bentuk utuh kurva $r = 2 + \sin \theta$.



7

Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 4

Soal

Tentukan nilai limit berikut (jika ada). Mahasiswa tidak diperkenankan menggunakan aturan L'Hospital.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-1 + \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x}$$

Dikerjakan

Soal (a)

Ayo kita perhatikan bentuk limit pada soal sebagaimana di bawah ini!

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$$

Terus terang, aku sih nggak suka dengan suku akar $\sqrt{x+3}$ yang ada di bagian penyebut. Karena itu, "naluri" Kalkulus-ku yang masih *ecek-ecek* ini memberi ide untuk **memusnahkan** suku $\sqrt{x+3}$ dari bagian penyebut. Caranya adalah dengan mengalikan bagian pembilang dan penyebut dengan $\sqrt{x+3} + 2$. Hasilnya seperti ini deh.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x+3} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x+3} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+3} + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3})^2 - 2^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}\sqrt{x+3} - \sqrt{x+3} + 2\sqrt[3]{x} - 2}{x - 1} \end{aligned}$$

Woooaduh!

Mental health jadi *insecure* sehabis mengalikan bagian pembilang dan penyebut dengan $\sqrt{x+3}+2$! Bentuk limitnya kok malah jadi "aduhai" *sekalee!*?

Modyar ora kowe? Naluri Kalkulus-e jebul bozok tenan!

Sepertinya memusnahkan $\sqrt{x+3}$ dari bagian penyebut adalah **ide buruk**.

Sepertinya pula, memusnahkan $\sqrt[3]{x}$ dari bagian pembilang ujung-ujungnya juga adalah **ide buruk**.

Lha, terus gimana ini soal mau dikerjakan?

Ooo... tenang Ferguso! Kita masih punya jurus lain yang tidak lain adalah **substitusi variabel!** Pilihan substitusinya: $y = \sqrt{x+3}$ atau $y = \sqrt[3]{x}$. Eh, pilihan substitusi itu suku yang rumit-rumit dong!

Setelah dipikir-pikir barang sebentar, substitusi yang dipilih adalah $y = \sqrt[3]{x}$. Kenapa? Karena $\sqrt[3]{x}$ itu kan akar pangkat tiga, termasuk suku yang bikin *ilfeel*. Substitusi $y = \sqrt{x+3}$ tidak dipilih karena tadi di atas itu kita sudah punya *heartbreaking memories* dengan suku $\sqrt{x+3}$.

Siapa tahu lah yaaa! Nggak jodoh dengan $\sqrt{x+3}$, tapi malah jodoh dengan $\sqrt[3]{x}$. Ya nggak?

Oke! Sekarang kita substitusikan $y = \sqrt[3]{x}$. Dengan kata lain, $y^3 = x$.

Selain itu, untuk $x \rightarrow 1$, kita akan memperoleh $y = \sqrt[3]{x \rightarrow 1} \rightarrow 1$. Dengan demikian akan berlaku persamaan berikut.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x+3} - 2} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{\sqrt{y^3 + 3} - 2}$$

Wah ini!

Setelah melihat bentuk $\frac{y - 1}{\sqrt{y^3 + 3} - 2}$, sepertinya boleh dicoba untuk mengalikan bagian pembilang dan penyebut dengan $\sqrt{y^3 + 3} + 2$ untuk memusnahkan suku $\sqrt{y^3 + 3}$ dari bagian penyebut. Okelah! Mari kita coba lupakan sejenak *bad memories* di awal soal ini.

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{\sqrt{y^3 + 3} - 2} &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{\sqrt{y^3 + 3} - 2} \cdot \frac{\sqrt{y^3 + 3} + 2}{\sqrt{y^3 + 3} + 2} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y - 1)(\sqrt{y^3 + 3} + 2)}{(\sqrt{y^3 + 3})^2 - 2^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y - 1)(\sqrt{y^3 + 3} + 2)}{y^3 + 3 - 4} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y - 1)(\sqrt{y^3 + 3} + 2)}{y^3 - 1} \end{aligned}$$

Nah! Perhatikan! Jika $y = 1$, maka $y - 1 = 0$ dan $y^3 - 1 = 0$. Karena derajat polinomial $y - 1$ lebih kecil dari polinomial $y^3 - 1$, maka $y^3 - 1$ dapat kita faktorkan dengan $y - 1$ sebagai salah satu faktornya. Kita akan punya persamaan berikut.

$$y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1)$$

Pemberitahuan

Cara untuk memfaktorkan $y^3 - 1$ menjadi $(y - 1)(y^2 + y + 1)$ dapat dilihat pada bab ekstra pada akhir bab ini.

Perhatikan! Karena persamaan di atas, maka bagian pembilang dan penyebut sama-sama memuat suku $(y - 1)$! Dengan begitu suku $(y - 1)$ dapat kita "coret" dari bagian pembilang dan penyebut. Hasilnya adalah seperti di bawah.

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y - 1)(\sqrt{y^3 + 3} + 2)}{y^3 - 1} &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y - 1)(\sqrt{y^3 + 3} + 2)}{(y - 1)(y^2 + y + 1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt{y^3 + 3} + 2}{y^2 + y + 1} \\ &= \frac{\lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{y^3 + 3} + 2}{\lim_{y \rightarrow 1} y^2 + y + 1} = \frac{\sqrt{1^3 + 3} + 2}{1^2 + 1 + 1} = \frac{\sqrt{4} + 2}{3} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x + 3} - 2} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{\sqrt{y^3 + 3} - 2} = \frac{4}{3}.$$

Soal (b)

Sekarang ayo kita cari nilai $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-1 + \sin x}{(\frac{\pi}{2} - x) \cos x}$!

Perhatikan! Karena bagian pembilang memuat $(\frac{\pi}{2} - x)$, maka ayo kita substitusikan $\frac{\pi}{2} - x = y$ supaya bentuknya menjadi lebih sederhana. Dengan demikian, kita akan memperoleh $x = y + \frac{\pi}{2}$ dan ketika $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, maka akan berlaku $y \rightarrow 0$.

Dengan demikian, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-1 + \sin x}{(\frac{\pi}{2} - x) \cos x}$ akan ekuivalen dengan $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-1 + \sin(y + \frac{\pi}{2})}{y \cos(y + \frac{\pi}{2})}$.

Selanjutnya, ayo kita jabarkan $\sin(y + \frac{\pi}{2})$ dan $\cos(y + \frac{\pi}{2})$!

- $\sin(y + \frac{\pi}{2}) = \sin y \cos \frac{\pi}{2} + \cos y \sin \frac{\pi}{2} = \sin y \cdot 0 + \cos y \cdot 1 = \cos y$
- $\cos(y + \frac{\pi}{2}) = \cos y \cos \frac{\pi}{2} - \sin y \sin \frac{\pi}{2} = \cos y \cdot 0 - \sin y \cdot 1 = -\sin y$

Nah, dengan mensubstitusikan persamaan $\sin(y + \frac{\pi}{2}) = \cos y$ dan $\cos(y + \frac{\pi}{2}) = -\sin y$, maka $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-1 + \sin(y + \frac{\pi}{2})}{y \cos(y + \frac{\pi}{2})}$ akan ekuivalen dengan

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos y}{-y \sin y}.$$

Setelah sekian substitusi, terlihat bahwa bentuk limit menjadi jauh lebih sederhana dibandingkan bentuk awalnya yaitu, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-1 + \sin x}{(\frac{\pi}{2} - x) \cos x}$.

Kemudian, jika kita substitusikan nilai $y = 0$ ke pembilang dan penyebut, maka kita akan memperoleh bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$. Dengan demikian, nilai $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos y}{-y \sin y}$ dapat kita cari menggunakan aturan L'Hospital.

....

Akan tetapi, karena soal melarang kita untuk menggunakan aturan L'Hospital, maka kita harus mencari cara lain. Hadeh...

Umumnya kita bakal *stuck* untuk mengubah bentuk $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos y}{-y \sin y}$ menjadi bentuk yang mudah untuk diselesaikan dikarenakan bentuk limitnya sudah "terlihat" sangat sederhana. Iya nggak?

Apakah dengan demikian kita menyerah telak pada aturan L'Hospital? Hahaha.

Oke! Sebagai langkah awal kita untuk menyelesaikan soal limit ini tanpa menggunakan aturan L'Hospital, mari kita **enyahkan** hal-hal sekiranya "mengganggu" bentuk limit yang terlihat sangat sederhana tersebut. Misalnya, di bagian penyebut kan ada simbol negatif tuh. Oleh sebab itu, mari kita kalikan pembilang dan penyebut dengan -1 untuk mengenyahkan simbol negatif dari penyebut.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos y}{-y \sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos y}{-y \sin y} \cdot \frac{-1}{-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y \sin y}$$

Setelah bagian pembilang dan penyebut kita kalikan dengan -1 , bentuk limit terlihat lebih sedap untuk dipandang. Perhatikan bahwa di bagian pembilang memuat $1 - \cos y$! Bagi yang **sudah sangat jeli**, $1 - \cos y$ ini bisa kita bawa ke bentuk "alternatif".

Perhatikan bahwa sebagian dari kita mungkin tidak akan menyangka bahwa bentuk $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y \sin y}$ dapat diubah menjadi bentuk lain dengan mengalikan pembilang dan penyebut dengan $1 + \cos y$. Ingat! Karena $y \rightarrow 0$, maka $1 + \cos y$ akan $\rightarrow 2$. Dengan demikian, $\frac{1 + \cos y}{1 + \cos y} \neq 0$.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y \sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y \sin y} \cdot \left(\frac{1 + \cos y}{1 + \cos y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 y}{y \sin y (1 + \cos y)}$$

Berdasarkan identitas trigonometri, diketahui bahwa untuk semua $y \in \mathbb{R}$, berlaku $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$. Dengan kata lain, $1 - \cos^2 y = \sin^2 y$. Ayo kita substitusikan persamaan $1 - \cos^2 y = \sin^2 y$ ke $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 y}{y \sin y (1 + \cos y)}$!

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 y}{y \sin y (1 + \cos y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 y}{y \sin y (1 + \cos y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y \cdot \sin y}{y \sin y (1 + \cos y)}$$

Ingat! Berdasarkan sifat limit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, maka $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y \cdot \sin y}{y \sin y (1 + \cos y)}$ akan menjadi seperti di bawah ini.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y \cdot \sin y}{y \sin y (1 + \cos y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\sin y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos y}$$

Nah, karena:

- $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$,
- $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\sin y} = 1$ (Ingat! $y \rightarrow 0$ bukan berarti $y = 0$, melainkan nilai y sangat dekat dengan 0, dengan demikian $\sin y \neq 0$ dan akibatnya $\frac{\sin y}{\sin y} \neq \frac{0}{0}$,
- $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos y} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$

maka kita akan memperoleh hasil akhir sebagai berikut.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\sin y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos y} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Jadi, berdasarkan uraian panjang di atas, kita bisa menyimpulkan bahwa $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-1 + \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x} = \frac{1}{2}$.

■

8

Ekstra! Penjelasan Tambahan 2 Ujian Tengah Semester Soal Nomor 4

Tentang

Cara memfaktorkan $y^3 - 1$ menjadi $(y - 1)(y^2 + y + 1)$.

Penjelasan

Kita misalkan $p(y) = y^3 - 1$ dan $h(y) = y - 1$. Polinomial $p(y)$ memiliki derajat 3 dan polinomial $h(y)$ memiliki derajat 1.

Karena berlaku $p(1) = h(1) = 0$ serta derajat $h(y)$ lebih kecil dari derajat $p(y)$, maka $p(y)$ dapat difaktorkan dengan $h(y)$ sebagai salah satu faktornya, yaitu $p(y) = h(y) \cdot r(y)$ untuk suatu polinomial $r(y)$.

Perhatikan bahwa selisih derajat polinomial $p(y)$ dan $h(y)$ adalah 2 (karena $2 = 3 - 1$). Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa polinomial $r(y)$ memiliki derajat 2. Dengan demikian pula, kita dapat menyatakan polinomial $r(y)$ sebagai $r(y) = ay^2 + by + c$ untuk suatu $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Dengan demikian berlaku persamaan berikut.

$$\begin{aligned}
p(y) = h(y) \cdot r(y) &\iff y^3 - 1 = (y - 1)(ay^2 + by + c) \\
&\iff y^3 - 1 = ay^3 + by^2 + cy - ay^2 - by - c \\
&\iff y^3 - 1 = ay^3 + by^2 - ay^2 + cy - by - c \\
&\iff y^3 - 1 = ay^3 + (b - a)y^2 + (c - b)y - c \\
&\iff y^3 + 0 \cdot y^2 + 0 \cdot y - 1 = ay^3 + (b - a)y^2 + (c - b)y - c
\end{aligned}$$

Nah, berdasarkan persamaan

$$y^3 + 0 \cdot y^2 + 0 \cdot y - 1 = ay^3 + (b - a)y^2 + (c - b)y - c$$

maka kita bisa menyimpulkan tiga hal berikut.

1. $a = 1$.
2. $b - a = 0$. Karena $a = 1$, maka $b = 1$.
3. $c = 1$.

Dengan demikian, polinomial $r(y) = ay^2 + by + c$ dapat kita nyatakan sebagai $r(y) = y^2 + y + 1$.

Jadi, diperoleh pemfaktoran $y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1)$.

■

9

Ayo Kerjakan!

Ujian Tengah Semester

Soal Nomor 5

Soal

Tentukan nilai bilangan real $a + 2b$, jika diketahui f kontinu pada \mathbb{R} , dengan

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+3)x^2+2x} & , x < -2 \\ a - bx & , -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{1 - \cos(x-1)}{x^3 - 1} & , x > 1 \end{cases}$$

Berikan jawaban dengan penjelasan yang sejelas-jelasnya!

Dikerjakan

Berdasarkan definisi pada soal, terlihat bahwa fungsi f adalah **fungsi *piecewise*** dengan 3 sub-fungsi dan 2 *break point* sebagai berikut.

- Subfungsi yang pertama adalah $f_1(x) = \frac{1}{(x+3)x^2+2x}$ dengan (sub)domainnya adalah $x < -2$.
- Subfungsi yang kedua adalah $f_2(x) = a - bx$ dengan (sub)domainnya adalah $-2 \leq x \leq 1$.
- Subfungsi yang ketiga adalah $f_3(x) = \frac{1 - \cos(x-1)}{x^3 - 1}$ dengan (sub)domainnya adalah $x > 1$.

- *Break point* fungsi f adalah titik $x = -2$ dan $x = 1$.

Berdasarkan empat poin di atas, kita dapat menyimpulkan tiga hal berikut.

1. Subfungsi pertama terdefinisi dengan baik di (sub)domain $x < -2$. Sebabnya, nilai $x^2 + 2x$ tidak akan pernah 0 untuk sebarang $x < -2$. Lha, kalau $x^2 + 2x = 0$, nanti jadinya $\frac{1}{x^2 + 2x}$ tidak terdefinisi dong!
2. Subfungsi ketiga terdefinisi dengan baik di (sub)domain $x > 1$. Sebabnya, nilai $x^3 - 1$ tidak akan pernah 0 untuk sebarang $x > 1$. Lha, kalau $x^3 - 1 = 0$, nanti jadinya $\frac{1}{x^3 - 1}$ tidak terdefinisi dong!
3. Subfungsi kedua **masih belum jelas wujudnya** karena memuat variabel a dan b yang nilainya masih **mizteriuz**. Akan tetapi, jika diperhatikan secara saksama, subfungsi kedua ini adalah fungsi linear. Kita tahu bahwa fungsi linear terdefinisi dengan baik di himpunan bilangan real. Masalahnya ya... fungsi linear ini memuat variabel a dan b yang nilainya masih **mizteriuz**.

Nah! Berdasarkan tiga poin di atas, kita akan mengungkap hal-hal yang **mizteriuz**, yang tidak lain adalah nilai variabel a dan b . Untuk itu, kita akan memanfaatkan hal yang diketahui pada soal, yaitu **fungsi f kontinu di \mathbb{R}** .

Ayo! Ingat lagi definisi fungsi kontinu berikut.

Definisi Fungsi f Kontinu pada \mathbb{R}

Suatu fungsi f dikatakan **kontinu pada \mathbb{R}** jika dan hanya jika fungsi f kontinu di sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$.

Suatu fungsi f dikatakan kontinu di $\alpha \in \mathbb{R}$, jika dan hanya jika memenuhi empat syarat berikut.

1. Nilai $f(\alpha)$ ada (terdefinisi dengan baik),
2. Nilai limit kiri fungsi f di α $\left(\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) \right)$ ada,
3. Nilai limit kanan fungsi f di α $\left(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \right)$ ada, dan
4. Berlaku persamaan $f(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$.

Berdasarkan definisi di atas, karena fungsi f kontinu di \mathbb{R} , maka fungsi f kontinu di sebarang $x \in \mathbb{R}$, **TERMASUK** di *break point* fungsi f , yaitu di $x = -2$ dan $x = 1$. Dengan demikian, diketahui 2 sifat berikut yang sudah pasti dijamin kebenarannya:

Fungsi $f(x)$ kontinu di $x = -2$

dan

Fungsi $f(x)$ kontinu di $x = 1$.

Oke!

Kita mulai dengan memanfaatkan sifat bahwa fungsi $f(x)$ kontinu di $x = -2$ untuk mencari nilai variabel a dan b . Berdasarkan definisi di dalam kotak kuning, karena fungsi $f(x)$ kontinu di $x = -2$, maka akan berlaku empat poin berikut.

1. Nilai $f(-2)$ ada (terdefinisi dengan baik),
2. Nilai limit kiri fungsi f di -2 $\left(\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \right)$ ada,
3. Nilai limit kanan fungsi f di -2 $\left(\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \right)$ ada, dan
4. Berlaku persamaan $f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$.

Ingat! Fungsi f adalah fungsi *piecewise*!

Oleh sebab itu, berdasarkan definisi fungsi f , maka subfungsi f di sekitar -2 tidak lain adalah subfungsi pertama dan kedua sebagaimana berikut.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+3)x^2+2x} & , x < -2 \\ a - bx & , -2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Karena Poin Nomor 1 Berlaku Benar.

Berdasarkan poin nomor 1, diketahui bahwa nilai $f(-2)$ ada (terdefinisi dengan baik). Berdasarkan definisi subfungsi f di atas, kita memperoleh hasil ini.

$$f(-2) = a - b(-2) = a + 2b$$

Weh!

Terlihat bahwa nilai $f(-2)$ ini masih **ambigu** karena memuat variabel a dan b yang nilainya masih **mizteriuz**. Oleh sebab itu, ayo kita mencari sedikit "pencerahan" dengan menyelidiki poin nomor 2.

2. Karena Poin Nomor 2 Berlaku Benar.

Berdasarkan poin nomor 2, diketahui bahwa limit kiri fungsi f di -2 $\left(\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)\right)$ ada. Untuk mencari nilai limit kiri fungsi f di -2 , maka subfungsi f yang bersesuaian adalah subfungsi pertama, yaitu $f_1(x) = (x + 3) \frac{1}{x^2 + 2x}$.

Ayo kita cari nilai $\lim_{x \rightarrow -2^-} (x + 3) \frac{1}{x^2 + 2x}$!

Pertama-tama, ayo kita substitusikan nilai $x = -2$ ke $(x + 3) \frac{1}{x^2 + 2x}$!

$$(-2 + 3) \frac{1}{(-2)^2 + 2(-2)} = 1 \left(\frac{1}{4 - 4} \right) = 1 \left(\frac{1}{0} \right) = 1^\infty$$

Hmmm... bau-baunya ini limit bisa dikerjakan pakai aturan L'Hospital nih!

Eh, di soal nggak ada larangan menggunakan aturan L'Hospital toh?

Oke!

Misalkan nilai $\lim_{x \rightarrow -2^-} (x+3) \frac{1}{x^2+2x}$ adalah L . Dengan demikian kita akan punya persamaan berikut.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} (x+3) \frac{1}{x^2+2x} = L$$

Kemudian, dengan melogaritma naturalkan kedua sisi persamaan, akan diperoleh hasil ini.

$$\ln \left(\lim_{x \rightarrow -2^-} (x+3) \frac{1}{x^2+2x} \right) = \ln(L)$$

Kemudian, dengan menggunakan sifat limit logaritma, akan diperoleh hasil ini.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln \left((x+3) \frac{1}{x^2+2x} \right) = \ln(L)$$

Kemudian, dengan menggunakan sifat logaritma, akan diperoleh hasil ini.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{1}{x^2+2x} \right) \cdot \ln(x+3) = \ln(L)$$

Perhatikan bahwa persamaan di atas akan ekuivalen dengan persamaan ini.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\ln(x+3)}{x^2+2x} = \ln(L)$$

Jika kita substitusikan nilai $x = -2$ ke $\frac{\ln(x+3)}{x^2+2x}$, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\frac{\ln(-2+3)}{(-2)^2+2(-2)} = \frac{\ln(1)}{4-4} = \frac{0}{0}$$

Yes! Ketemu bentuk tak tentu 0/0!

Karena di soal tidak ada larangan penggunaan aturan L'Hospital, jadi ayo kita cari nilai $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\ln(x+3)}{x^2+2x}$ menggunakan aturan L'Hospital! Perhatikan penjabaran di bawah!

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\ln(x+3)}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\frac{d}{dx}(\ln(x+3))}{\frac{d}{dx}(x^2+2x)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\frac{1}{x+3} \cdot 1}{2x+2} = \frac{\frac{1}{-2+3}}{2 \cdot (-2) + 2} = \frac{\frac{1}{1}}{-4+2} = -\frac{1}{2}$$

Dengan demikian kita memperoleh hasil berikut.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\ln(x+3)}{x^2+2x} = -\frac{1}{2}$$

Eh, ingat bahwa $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\ln(x+3)}{x^2+2x} = \ln(L)$! Dengan demikian berlaku persamaan ini.

$$\ln(L) = -\frac{1}{2}$$

Dengan kata lain $L = e^{-1/2}$.

$$\text{Jadi, } \lim_{x \rightarrow -2^-} (x+3)^{\frac{1}{x^2+2x}} = e^{-1/2}.$$

3. Karena Poin Nomor 3 Berlaku Benar.

Berdasarkan poin nomor 3, diketahui bahwa limit kanan fungsi f di -2 $\left(\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \right)$ ada. Untuk mencari nilai limit kanan fungsi f di -2 , maka subfungsi f yang bersesuaian adalah subfungsi kedua, yaitu $f_2(x) = (a - bx)$.

$$\text{Perhatikan bahwa } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} a - bx = a - b \cdot (-2) = a + 2b = f(-2)$$

$$\text{Jadi, } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2).$$

4. Karena Poin Nomor 4 Berlaku Benar.

Berdasarkan poin nomor 4, kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \iff a + 2b = e^{-1/2} \dots \text{(HASIL 1)}$$

Next!

Kita akan memanfaatkan sifat bahwa fungsi $f(x)$ kontinu di $x = 1$ untuk mencari nilai variabel a dan b . Berdasarkan definisi di dalam kotak kuning, karena fungsi $f(x)$ kontinu di $x = 1$, maka akan berlaku empat poin berikut.

1. Nilai $f(1)$ ada (terdefinisi dengan baik),
2. Nilai limit kiri fungsi f di 1 $\left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)\right)$ ada,
3. Nilai limit kanan fungsi f di 1 $\left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)\right)$ ada, dan
4. Berlaku persamaan $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

Ingat! Fungsi f adalah fungsi *piecewise*!

Oleh sebab itu, berdasarkan definisi fungsi f , maka subfungsi f di sekitar 1 tidak lain adalah subfungsi kedua dan ketiga sebagaimana berikut.

$$f(x) = \begin{cases} a - bx & , -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{1 - \cos(x - 1)}{x^3 - 1} & , x > 1 \end{cases}$$

1. Karena Poin Nomor 1 Berlaku Benar.

Berdasarkan poin nomor 1, diketahui bahwa nilai $f(1)$ ada (terdefinisi dengan baik). Berdasarkan definisi subfungsi f di atas, kita memperoleh hasil ini.

$$f(1) = a - b(1) = a - b$$

Weh!

Terlihat bahwa nilai $f(1)$ ini masih **ambigu** karena memuat variabel a dan b yang nilainya masih **mizteriuz**. Oleh sebab itu, ayo kita mencari sedikit "pencerahan" dengan menyelidiki poin nomor 2.

2. Karena Poin Nomor 2 Berlaku Benar.

Berdasarkan poin nomor 2, diketahui bahwa limit kiri fungsi f di 1 $\left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)\right)$ ada. Untuk mencari nilai limit kiri fungsi f di 1, maka subfungsi f yang bersesuaian adalah subfungsi kedua, yaitu $f_2(x) = a - bx$.

$$\text{Perhatikan bahwa } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} a - bx = a - b \cdot (1) = a - b = f(1)$$

$$\text{Jadi, } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1).$$

Berhubung nilai $f(1)$ dan $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ *sami mawon*, jadi ayo kita lanjut mencari "pencerahan" dengan menyelidiki poin nomor 3.

3. Karena Poin Nomor 3 Berlaku Benar.

Berdasarkan poin nomor 3, diketahui bahwa limit kanan fungsi f di 1 $\left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)\right)$ ada. Untuk mencari nilai limit kanan fungsi f di 1, maka subfungsi f yang bersesuaian adalah subfungsi ketiga, yaitu $f_3(x) = \frac{1 - \cos(x - 1)}{x^3 - 1}$.

$$\text{Ayo kita cari nilai } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos(x - 1)}{x^3 - 1}!$$

Pertama-tama, ayo kita substitusikan $x = 1$ ke $\frac{1 - \cos(x - 1)}{x^3 - 1}$!

$$\frac{1 - \cos(1 - 1)}{1^3 - 1} = \frac{1 - \cos 0}{1 - 1} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Yes! Ketemu bentuk tak tentu $0/0$. Dengan demikian, ayo kita cari nilai $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos(x - 1)}{x^3 - 1}$ menggunakan aturan L'Hospital.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos(x - 1)}{x^3 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dx}(1 - \cos(x - 1))}{\frac{d}{dx}(x^3 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{0 - (-\sin(x - 1) \cdot 1)}{3x^2 - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(x - 1)}{3x^2} = \frac{\sin(1 - 1)}{3 \cdot (1)^2} = \frac{\sin 0}{3} = \frac{0}{3} = 0 \end{aligned}$$

Jadi, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos(x - 1)}{x^3 - 1} = 0$.

4. Karena Poin Nomor 4 Berlaku Benar.

Berdasarkan poin nomor 4, kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$f(-2) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \iff a - b = 0 \dots \text{(HASIL 2)}$$

Oke!

Dari [HASIL 1](#) dan [HASIL 2](#) di atas, kita mendapatkan dua persamaan berikut.

1. $a + 2b = e^{-1/2}$
2. $a - b = 0$

Dengan dua persamaan di atas, kita dapat dengan mudah menentukan nilai variabel a dan b ! Yey!

Jelas lah! Karena persamaan $a - b = 0$, maka dapat disimpulkan bahwa $a = b$. Dengan demikian persamaan $a + 2b = e^{-1/2}$ akan menjadi seperti ini.

$$a + 2b = e^{-1/2} \iff a + 2a = e^{-1/2} \iff 3a = e^{-1/2} \iff a = \frac{e^{-1/2}}{3} = b$$

Dengan demikian, definisi sempurna fungsi f setelah ke-**mizteriuz**-an nilai variabel a dan b berhasil diungkap adalah sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)\frac{1}{x^2+2x} & , x < -2 \\ \frac{e^{-1/2}}{3} - \frac{e^{-1/2}}{3}x & , -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{1 - \cos(x-1)}{x^3-1} & , x > 1 \end{cases}$$

Weits!

Tunggu dulu *Ferguso!*

Pengerjaan soal belum sah selesai sampai di sini!

Karena soal meminta kita menentukan nilai bilangan real $a + 2b$, maka ya ayo kita lanjutkan dengan melakukan proses perhitungan yang sederhana ini.

$$a + 2b = \frac{e^{-1/2}}{3} + 2 \cdot \frac{e^{-1/2}}{3} = \frac{3 \cdot e^{-1/2}}{3} = e^{-1/2}.$$

Jadi, $a + 2b = e^{-1/2}$.

Selesai deh!

Oh, sekadar memberitahu: $e^{-1/2} = (e^{1/2})^{-1} = (\sqrt{e})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

■

10

Ayo Kerjakan!

Ujian Akhir Semester

Soal Nomor 1

Soal

(a) Diketahui $a \in \mathbb{R}$ sehingga

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sec x - \tan x}{ax^3 + 8x^4 - 10x^5}$$

ada (berhingga). Tentukan nilai limit di atas!

(b) Tentukan nilai dari

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x)^{\ln \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right)}$$

jika ada!

Dikerjakan**Soal (a)**

Diketahui $a \in \mathbb{R}$ sehingga $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sec x - \tan x}{ax^3 + 8x^4 - 10x^5}$ ada (berhingga).

Hmmm....

Ini artinya adalah $a \in \mathbb{R}$ sudah **dijamin pasti eksistensinya!**

Pertanyaan yang umum muncul adalah, "*Lha, terus nilai a itu apa dong?*"

Perhatikan bahwa soal **tidak memerintahkan kita untuk mencari nilai a !**

Jadi, kalau mau mencari nilai a itu ya pilihan hidup, bukan kewajiban.

Syukur-syukur, nilai a ketemu dan tidak menyita banyak waktu pengerjaan soal ujian.

Eh, atau mungkin mau dengan cara "tebak-tebakan"? Substitusikan saja 0, 1, -1 , dan sebagainya sebagai nilai a , kemudian dicoba untuk mencari nilai limitnya.

Hmmm....

Apapun itu, ayo kita coba mencari tahu nilai limit di atas dengan tetap mempertahankan "**kemisteriuzan**" nilai a . Sebagai langkah awal, mari kita sederhanakan bentuk $ax \sec x - \tan x$ yang sepertinya kurang sedap dipandang.

$$ax \sec x - \tan x = ax \cdot \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{ax - \sin x}{\cos x}$$

Dengan demikian kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sec x - \tan x}{ax^3 + 8x^4 - 10x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\cos x \cdot (ax^3 + 8x^4 - 10x^5)}$$

Selanjutnya, kita coba mensubstitusikan nilai $x = 0$ ke $\frac{ax - \sin x}{\cos x \cdot (ax^3 + 8x^4 - 10x^5)}$.

$$\frac{a \cdot 0 - \sin 0}{\cos 0 \cdot (a \cdot 0^3 + 8 \cdot 0^4 - 10 \cdot 0^5)} = \frac{0 - 0}{1 \cdot (a \cdot 0 + 8 \cdot 0 - 10 \cdot 0)} = \frac{0}{1 \cdot 0} = \frac{0}{0}.$$

Kita mendapatkan bentuk tak tentu $0/0$, dengan begitu mari kita gunakan aturan L'Hospital. Mumpung di soal tidak ada larangan penggunaan aturan L'Hospital.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sec x - \tan x}{ax^3 + 8x^4 - 10x^5} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\cos x \cdot (ax^3 + 8x^4 - 10x^5)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(ax - \sin x)}{\frac{d}{dx}(\cos x \cdot (ax^3 + 8x^4 - 10x^5))} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{-\sin x \cdot (ax^3 + 8x^4 - 10x^5) + \cos x \cdot (3ax^2 + 32x^3 - 50x^4)}
\end{aligned}$$

Woolha...

Malah bentuk limitnya jadi makin mumet! Males deh ngerjainnya.

Hmmm....

Yang jelas, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sec x - \tan x}{ax^3 + 8x^4 - 10x^5}$ ini "bau-baunya" dikerjakan pakai aturan L'Hospital.

Masalahnya, setelah dielaborasi panjang, kita bisa membuat berbagai macam bentuk tak tentu 0/0 seperti

$$\frac{\left(\frac{ax \sec x - \tan x}{x}\right)}{ax^2 + 8x^3 - 10x^4} \text{ atau } \frac{\left(\frac{ax \sec x - \tan x}{x^2}\right)}{ax + 8x^2 - 10x^3} \text{ atau } \frac{\left(\frac{ax - \sin x}{\cos x}\right)}{ax^3 + 8x^4 - 10x^5} \text{ atau } \frac{\left(\frac{ax - \sin x}{x \cos x}\right)}{ax^2 + 8x^3 - 10x^4}$$

dan masih banyak lagi.

Satu-satunya cara untuk menyelesaikan limit ini ya dengan mencoba satu per satu bentuk tak tentu 0/0 seperti di atas itu. Syukur-syukur ketemu bentuk tak tentu 0/0 yang sederhana.

Pada praktiknya, mengerjakan soal ini **sangat menyita waktu**. Apalagi kalau kita tidak diberkati dengan semacam kelebihan "**indera ketujuh**" yang memungkinkan kita untuk melihat bentuk tak tentu limit yang paling sederhana.

Kasarnya, kalau dari orok tidak berbakat matematika, ya mengerjakan soal limit ini sangat menyita waktu.

Aku sendiri butuh waktu sekitar dua minggu untuk menyelesaikan limit ini. Waktunya lama, mungkin karena aku sudah lama nggak belajar matematika dan sebatas dikerjakan sambil *ngendog* di toilet. Kalau setiap hari belajar matematika, mungkin bisa lebih *sat-set* mengerjakan limit ini.

Jadi, berikut inilah hasil pencerahan selama 2 minggu di toilet itu.

Di awal tadi kan kita punya persamaan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sec x - \tan x}{ax^3 + 8x^4 - 10x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\cos x \cdot (ax^3 + 8x^4 - 10x^5)}.$$

Nah, sekarang kita faktorkan x^3 dari $ax^3 + 8x^4 - 10x^5$. Dengan demikian kita akan memperoleh persamaan ini.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\cos x \cdot (ax^3 + 8x^4 - 10x^5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\cos x \cdot x^3 \cdot (a + 8x - 10x^2)}.$$

Kemudian, kita pisahkan bentuk limit tunggal tersebut menjadi perkalian limit dua fungsi rasional sebagai berikut.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\cos x \cdot x^3 \cdot (a + 8x - 10x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x \cdot (a + 8x - 10x^2)}. \quad \dots(\text{P1})$$

Kita kerjakan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x \cdot (a + 8x - 10x^2)}$ sebagai berikut.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x \cdot (a + 8x - 10x^2)} = \frac{1}{\cos 0 \cdot (a + 8 \cdot 0 - 10 \cdot 0^2)} = \frac{1}{1 \cdot (a + 0 + 0)} = \frac{1}{a}$$

Oke, diperoleh $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x \cdot (a + 8x - 10x^2)} = \frac{1}{a}$.

Perhatian!

Karena soal sudah meyakinkan kita bahwasanya $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sec x - \tan x}{ax^3 + 8x^4 - 10x^5}$ ada (berhingga), maka kita bisa dengan sangat yakin menyatakan bahwa $\frac{1}{a}$ terdefinisi dengan baik. Dengan kata lain, kita yakin bahwa $a \neq 0$.

Kembali ke (P1)! Kita akan mendapatkan persamaan berikut.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x \cdot (a + 8x - 10x^2)} = \frac{1}{a} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{x^3} \quad \dots(\text{P2})$$

Kita lanjut menentukan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{x^3}$. Jelas banget ya bahwa limit ini bisa dikerjakan dengan Aturan L'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(ax - \sin x)}{\frac{d}{dx}(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{3x^2}$$

Nah ini!

Perhatian!

Karena soal sudah meyakinkan kita bahwasanya $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sec x - \tan x}{ax^3 + 8x^4 - 10x^5}$ ada (berhingga), maka kita bisa dengan sangat yakin menyatakan bahwa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{3x^2}$ ada dan terdefinisi dengan baik.

Nah iniii!

Jika kita substitusikan $x = 0$ ke $\frac{a - \cos x}{3x^2}$, maka akan didapat hasil seperti berikut.

$$\frac{a - \cos 0}{3 \cdot 0^2} = \frac{a - 1}{0}$$

Nah iniiii!

Jika kita menetapkan $a = 1$, maka kita akan memiliki bentuk tak tentu $0/0$ pada $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{3x^2}$!

Oke! Jadi, kita tetapkan $a = 1$ dan kita kerjakan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{3x^2}$ menggunakan aturan L'Hospital sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(1 - \cos x)}{\frac{d}{dx}(3x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\ &= \frac{1}{6} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$.

Eh, jangan lupa ya! Kita tadi sudah menetapkan nilai $a = 1$.

Kembali ke (P2)! Kita akan memperoleh hasil sebagai berikut.

$$\frac{1}{a} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{x^3} = \frac{1}{1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Kita punya persamaan panjang berikut.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sec x - \tan x}{ax^3 + 8x^4 - 10x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\cos x \cdot (ax^3 + 8x^4 - 10x^5)} = \frac{1}{a} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

Jadi, kita bisa menyimpulkan bahwa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sec x - \tan x}{ax^3 + 8x^4 - 10x^5} = \frac{1}{6}$ dengan nilai $a = 1$.

Soal (b)

Wew! Mantap!

Bentuk limitnya sangat **beringas sekaleee!**

Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) \ln \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right)$ jika ada?

Waduh....

Kok diakhiri kata "jika ada" segala?

Kan jadi mikir yang "enggak-enggak" nih!

Jadi punya pikiran bahwasanya limitnya memang tidak ada dan membuat **bendera putih** semakin mantap untuk dikibarkan.

Tapi, dari awal kok niatnya sudah mengibarkan bendera putih? Hanya karena melihat bentuk limit yang beringas? Padahal sama sekali belum dikerjakan?

Hmmm....

Kalau level mentalnya seperti itu sih pantasnya mengibarkan *sempak* putih dekil bolong-bolong yang sudah keseringan dipakai!

Nah, daripada mengibarkan *sempak* yang tidak bermutu, mending kita kerjakan saja! Kita coba cari tahu apakah nilai limitnya ada. Jangan takut melihat bentuk limit yang beringas! Kita kerjakan pelan-pelan saja.

Keep calm and tetap nggarap!

Toh, ini kan bukan ujian. Hanya sebatas tulisan berformat PDF.

Sekali lagi, ayo kita cermati bentuk limit yang beringas itu.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x) \ln \left(\frac{x^2}{x^2-1} \right)$$

Sebagai manusia yang selama satu semester bergelut dengan Kalkulus, umumnya di kepala akan terlintas beberapa hal berikut ketika melihat bentuk limit tersebut.

- $x^2 - 1$ bisa difaktorkan menjadi $(x-1)(x+1)$.
- $\frac{x^2}{x^2-1}$ bisa diubah bentuknya menjadi $1 + \frac{1}{x^2-1}$.
- $(2-x)$ bisa diubah bentuknya jadi $-((x-1)-1)$.

Berdasarkan hal-hal di atas, umumnya akan terlintas ide untuk melakukan substitusi: $y = x - 1$. Karena substitusi tersebut, ketika $x \rightarrow 1^+$ akan berakibat $y \rightarrow 0^+$. Dengan demikian, kita akan punya persamaan berikut.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x) \ln \left(\frac{x^2}{x^2-1} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} (-(y-1)) \ln \left(1 + \frac{1}{y(y+2)} \right)$$

Nah, dari sini umumnya bingung mau diotak-atik macam apa lagi bentuk limitnya. Sebelum otak semakin *worn out* lebih baik dicoba mensubstitusikan nilai $y = 0$ ke bentuk $(-(y-1)) \ln \left(1 + \frac{1}{y(y+2)} \right)$.

$$(-(0-1)) \ln \left(1 + \frac{1}{0 \cdot (0+2)} \right) = {}_1 \ln \left(1 + \frac{1}{0} \right) = {}_1 \ln(+\infty) = {}_1^{+\infty}$$

Hihhi! Mantap! Ketemu bentuk tak tentu $1^{+\infty}$!

Bau-baunya bisa dikerjakan pakai aturan L'Hospital nih!

Hmmm....

Masalahnya sekarang adalah bagaimana cara membawa bentuk limit tersebut sehingga aturan L'Hospital bisa digunakan.

Sepertinya sih harus pakai substitusi lagi. Sekarang pakai variabel t deh.

Tapi, substitusi apa?

Apakah substitusi $t = y - 1$?

Apakah $t = -(y - 1)$?

Apakah $t = \frac{1}{y(y+2)}$?

Cobain saja satu-satu, kemudian lihat substitusi mana yang menghasilkan bentuk yang "bisa dinalar" lebih lanjut.

Been there. Done all of that. Such waste of time and energy.

Hmmm....

Kalau dipikir-pikir, yang membuat bentuk limitnya menjadi **beringas** itu kan $\ln\left(1 + \frac{1}{y(y+2)}\right)$ yang bertengger sebagai pangkat toh?

Kita coba deh pakai substitusi "ekstrem" untuk mengenyahkan hal yang membuat beringas itu:

$$t = \ln\left(1 + \frac{1}{y(y+2)}\right).$$

Nah, karena substitusi $t = \ln\left(1 + \frac{1}{y(y+2)}\right)$, maka akan terjadi ekuivalensi berikut.

$$\begin{aligned}
 t = \ln\left(1 + \frac{1}{y(y+2)}\right) &\iff e^t = 1 + \frac{1}{y(y+2)} \\
 &\iff e^t - 1 = \frac{1}{y(y+2)} \\
 &\iff \frac{1}{e^t - 1} = y(y+2) \\
 &\iff \frac{1}{e^t - 1} = y^2 + 2y
 \end{aligned}$$

Hmmm....

Jadi, agak mumet ini.

Okelah! Ayo kita kembali ke bentuk awal $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x) \ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)$ kemudian melakukan substitusi: $t = \ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)$.

Nah, karena substitusi $t = \ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)$, maka akan terjadi ekuivalensi berikut.

$$\begin{aligned}
 t = \ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) &\iff e^t = \frac{x^2}{x^2-1} \\
 &\iff e^t \cdot (x^2-1) = x^2 \\
 &\iff e^t \cdot x^2 - e^t = x^2 \\
 &\iff e^t \cdot x^2 - x^2 = e^t \\
 &\iff x^2 \cdot (e^t - 1) = e^t \\
 &\iff x^2 = \frac{e^t}{e^t - 1} \\
 &\iff x = \sqrt{\frac{e^t}{e^t - 1}}
 \end{aligned}$$

Aaaah, *much better!*

Perhatikan bahwa, ketika $x \rightarrow 1^+$, maka akan menyebabkan $t = \ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) \rightarrow +\infty$.

Kalau sulit membayangkan, misalkan kita pilih $x' = 1,0001$ sebagai $x' \rightarrow 1^+$. Perhatikan bahwa:

$$\ln\left(\frac{x'^2}{x'^2-1}\right) = \ln\left(\frac{1,0001^2}{1,0001^2-1}\right) = \ln\left(\frac{1,00020001}{0,00020001}\right) = \ln\left(1,00020001 \cdot \frac{100.000.000}{20.001}\right)$$

Perhatikan bahwa nilai di dalam fungsi ln akan semakin besar jika dipilih nilai x yang semakin dekat dengan 1 dari kanan.

Jadi, jelas ya ketika $x \rightarrow 1^+$, maka akan menyebabkan $t \rightarrow +\infty$!

Dengan demikian kita punya persamaan berikut.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x) \ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(2 - \sqrt{\frac{e^t}{e^t-1}}\right)^t = 2 - \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{e^t}{e^t-1}}\right)^t$$

Kalau secara *feeling* sih, nilai $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{e^t}{e^t-1}}\right)^t = 1$. Untuk penjelasan lebih jelasnya, silakan simak bab pembahasan ekstra setelah bab ini.

Okelah! Karena $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{e^t}{e^t-1}}\right)^t = 1$, maka kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x) \ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) = 2 - \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{e^t}{e^t-1}}\right)^t = 2 - 1 = 1.$$

$$\text{Jadi, } \lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x) \ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) = 1.$$

Ada kan nilai limitnya?

■

11

Ekstra!

Penjelasan Tambahan 3

Ujian Akhir Semester

Soal Nomor 1

Tentang

Menentukan $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{e^t}{e^t - 1}} \right)^t$.

Penjelasan

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{e^t}{e^t - 1}} \right)^t &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{e^t}{e^t - 1} \right)^{1/2} \right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^t}{e^t - 1} \right)^{t/2} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^t}{e^t - 1} \right)^{t \cdot 1/2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(\frac{e^t}{e^t - 1} \right)^t} = \sqrt{\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^t}{e^t - 1} \right)^t} \end{aligned}$$

Sekarang kita perhatikan $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^t}{e^t - 1} \right)^t$!

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^t}{e^t - 1} \right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^t - 1} \right)^t$$

Perhatikan bahwa:

1. $e > 1$,
2. Jika $t \rightarrow +\infty$, maka $e^t \rightarrow \infty$,
3. Jika $t \rightarrow +\infty$, maka $e^t > 1$,
4. Jika $t \rightarrow +\infty$, maka $(e^t - 1) \rightarrow \infty$,
5. Jika $t \rightarrow +\infty$, maka $\frac{1}{e^t - 1} \rightarrow 0$,
6. Jika $t \rightarrow +\infty$, maka $1 + \frac{1}{e^t - 1} \rightarrow 1$,

Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^t - 1}\right)^t$ adalah bentuk tak tentu 1^∞ .

Oke! Misalkan $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^t - 1}\right)^t = L$ dengan demikian kita akan memiliki persamaan:

$$\ln \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^t - 1}\right)^t \right) = \ln(L)$$

Menggunakan sifat limit dan logaritma, kita akan mendapatkan persamaan berikut.

$$\ln \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^t - 1}\right)^t \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{e^t - 1}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{e^t - 1}\right)}{1/t}$$

Perhatikan bahwa $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{e^t - 1}\right)}{1/t}$ adalah bentuk tak tentu $0/0$. Dengan demikian kita bisa menggunakan aturan L'Hospital sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{e^t - 1}\right)}{1/t} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{dx} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{e^t - 1}\right) \right)}{\frac{d}{dx} (1/t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{e^t - 1}} \cdot \frac{-1}{(e^t - 1)^2} \cdot e^t}{-1/t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\frac{e^t}{e^t - 1}} \cdot \frac{1}{(e^t - 1)^2} \cdot e^t}{1/t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \cdot \frac{e^t - 1}{e^t} \cdot \frac{1}{(e^t - 1)^2} \cdot e^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t - 1} = +\infty \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\ln(L) = \ln\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^t - 1}\right)^t\right) = 0$$

dengan kata lain:

$$L = e^0 = 1.$$

Dengan demikian diperoleh $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^t}{e^t - 1}\right)^t = 1$.

$$\text{Jadi, } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{e^t}{e^t - 1}}\right)^t = \sqrt{\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^t}{e^t - 1}\right)^t} = \sqrt{1} = 1.$$

■

12

Ayo Kerjakan!

Ujian Akhir Semester

Soal Nomor 2

Soal

Determine $f'(3)$, if

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 7 & \text{if } 1 \leq x < 3 \\ 2\sqrt{x^2 - 8} & \text{if } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Dikerjakan

Kita kerjakan pakai bahasa Indonesia saja ya, supaya menjelaskannya lebih gampang.

Untuk menentukan $f'(3)$ kita harus menentukan dahulu nilai dari $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(3) - f(x)}{3 - x}$ dan $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(3) - f(x)}{3 - x}$.

Perhatikan! Karena cabang fungsi f yang bersesuaian dengan $x = 3$ adalah $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 8}$, maka

$$f(3) = 2\sqrt{3^2 - 8} = 2 \cdot \sqrt{1} = 2.$$

Kita mulai dengan menentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(3) - f(x)}{3 - x}$. Untuk $x \rightarrow 3^-$, maka cabang fungsi f yang bersesuaian adalah $f(x) = x^2 - 7$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(3) - f(x)}{3 - x} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2 - (x^2 - 7)}{3 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{9 - x^2}{3 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3 - x)(3 + x)}{3 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{3 - x}{3 - x} \right) \cdot (3 + x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} 3 + x \\ &= 3 + 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Dengan demikian, kita memperoleh nilai $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(3) - f(x)}{3 - x} = 6$.

Selanjutnya, kita akan menentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(3) - f(x)}{3 - x}$. Untuk $x \rightarrow 3^+$, maka cabang fungsi f yang bersesuaian adalah $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 8}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(3) - f(x)}{3 - x} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(2\sqrt{3^2 - 8}) - 2\sqrt{x^2 - 8}}{3 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(2\sqrt{9 - 8}) - 2\sqrt{x^2 - 9 + 1}}{3 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(2\sqrt{1}) - 2\sqrt{(x - 3)(x + 3) + 1}}{3 - x} \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - \sqrt{(x - 3)(x + 3) + 1}}{3 - x} \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - \sqrt{(x - 3)(x + 3) + 1}}{3 - x} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{(x - 3)(x + 3) + 1}}{1 + \sqrt{(x - 3)(x + 3) + 1}} \right) \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - \left((x - 3)(x + 3) + 1 \right)}{3 - x} \cdot \left(\frac{1}{1 + \sqrt{(x - 3)(x + 3) + 1}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{... lanjutan ...} &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(3-x)(x+3)}{3-x} \cdot \left(\frac{1}{1 + \sqrt{(x-3)(x+3)+1}} \right) \\
&= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x+3}{1 + \sqrt{(x-3)(x+3)+1}} \right) \\
&= 2 \cdot \frac{3+3}{1 + \sqrt{(3-3)(3+3)+1}} \\
&= 2 \cdot \frac{6}{1 + \sqrt{0 \cdot 6 + 1}} \\
&= 2 \cdot \frac{6}{2} \\
&= 6
\end{aligned}$$

Dengan demikian, kita memperoleh nilai $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(3) - f(x)}{3 - x} = 6$.

Berdasarkan penjabaran di atas, karena $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(3) - f(x)}{3 - x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(3) - f(x)}{3 - x} = 6$, maka kita dapat menyimpulkan bahwa $f'(3) = 6$.

■

13

Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 3

Soal

Tentukan $\frac{d^2y}{dx^2}$ jika diketahui

$$\sin y + \cos x + xy^3 = 0.$$

Dikerjakan

Kita harus mencari $\frac{dy}{dx}$ terlebih dahulu supaya bisa menentukan $\frac{d^2y}{dx^2}$. Jadi, ayo kita cari $\frac{dy}{dx}$!

Untuk mencari $\frac{dy}{dx}$ kita diferensialkan kedua ruas persamaan $\sin y + \cos x + xy^3 = 0$ terhadap variabel x sebagaimana berikut.

$$\sin y + \cos x + xy^3 = 0 \iff \frac{d}{dx} (\sin y + \cos x + xy^3) = \frac{d}{dx} (0)$$

Karena $\frac{d}{dx} (0) = 0$, maka kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$\iff \frac{d}{dx} (\sin y + \cos x + xy^3) = 0$$

Menggunakan sifat penjumlahan derivatif, maka kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(\sin y) + \frac{d}{dx}(\cos x) + \frac{d}{dx}(xy^3) = 0 \quad \text{(P1)}$$

Selanjutnya, mari kita cari nilai $\frac{d}{dx}(\sin y)$, $\frac{d}{dx}(\cos x)$, dan $\frac{d}{dx}(xy^3)$ terlebih dahulu.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sin y) &= \frac{d}{dy}(\sin y) \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \cos y \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(xy^3) &= x \cdot \frac{d}{dx}(y^3) + y^3 \cdot \frac{d}{dx}(x) \\ &= x \cdot \left(\frac{d}{dy}(y^3) \cdot \frac{dy}{dx} \right) + y^3 \cdot 1 \\ &= x \cdot \left(3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} \right) + y^3 \\ &= 3xy^2 \cdot \frac{dy}{dx} + y^3 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan hasil poin 1, 2, dan 3 di atas ke persamaan (P1), maka kita akan memperoleh hasil berikut.

$$\Leftrightarrow \cos y \cdot \frac{dy}{dx} + (-\sin x) + 3xy^2 \cdot \frac{dy}{dx} + y^3 = 0$$

Selanjutnya, kita pindahkan suku-suku yang tidak mengandung perkalian dengan $\frac{dy}{dx}$ ke ruas kanan persamaan. Hasilnya adalah sebagai berikut.

$$\Leftrightarrow \cos y \cdot \frac{dy}{dx} + 3xy^2 \cdot \frac{dy}{dx} = \sin x - y^3$$

Selanjutnya, kita faktorkan ruas kiri persamaan terhadap $\frac{dy}{dx}$. Hasilnya adalah sebagai berikut.

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} \cdot \left(\cos y + 3xy^2 \right) = \sin x - y^3$$

Nah, dengan mengalikan kedua ruas persamaan dengan $\left(\frac{1}{\cos y + 3xy^2}\right)$, maka kita akan memperoleh $\frac{dy}{dx}$ sebagai berikut.

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x - y^3}{\cos y + 3xy^2}$$

Nah, berhubung $\frac{dy}{dx}$ sudah diketahui, jadi ayo kita lanjut menentukan $\frac{d^2y}{dx^2}$!

Perhatian!

Mulai dari sini penjabaran hitung-hitungan bakal membuat kepala cenat-cenut. Jadi, ya harap bersiap!

Karena diketahui $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right)$ dan $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x - y^3}{\cos y + 3xy^2}$, maka kita akan mendapatkan persamaan berikut.

$$\Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x - y^3}{\cos y + 3xy^2}\right)$$

Nah, dengan menggunakan rumus:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x, y)}{g(x, y)}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(f(x, y)) \cdot g(x, y) - f(x, y) \cdot \frac{d}{dx}(g(x, y))}{g(x, y)^2}$$

maka $\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x - y^3}{\cos y + 3xy^2}\right)$ dapat kita tentukan sebagai berikut.

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x - y^3}{\cos y + 3xy^2}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(\sin x - y^3) \cdot (\cos y + 3xy^2) - (\sin x - y^3) \cdot \frac{d}{dx}(\cos y + 3xy^2)}{(\cos y + 3xy^2)^2}$$

Bagaimana? Sudah mulai mencium "aroma" penjabaran yang **sangat rumit** belum?

Oke!

Jadi, untuk mengerjakan ini

$$\frac{\frac{d}{dx}(\sin x - y^3) \cdot (\cos y + 3xy^2) - (\sin x - y^3) \cdot \frac{d}{dx}(\cos y + 3xy^2)}{(\cos y + 3xy^2)^2}$$

maka:

1. Kita harus menentukan $\frac{d}{dx}(\sin x - y^3)$,
2. Kita harus menentukan $\frac{d}{dx}(\sin x - y^3) \cdot (\cos y + 3xy^2)$,
3. Kita harus menentukan $\frac{d}{dx}(\cos y + 3xy^2)$, dan
4. Kita harus menentukan $(\sin x - y^3) \cdot \frac{d}{dx}(\cos y + 3xy^2)$.

Keempat poin di atas harus kita kerjakan, semata-mata untuk menentukan hasil dari

$$\frac{d}{dx}(\sin x - y^3) \cdot (\cos y + 3xy^2) - (\sin x - y^3) \cdot \frac{d}{dx}(\cos y + 3xy^2).$$

...Menghela napas...

Ayo kita kerjakan!

#1 Menentukan $\frac{d}{dx} (\sin x - y^3)$

$$\iff \frac{d}{dx} (\sin x - y^3) = \frac{d}{dx} (\sin x) - \frac{d}{dx} (y^3)$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita perlu menentukan $\frac{d}{dx} (\sin x)$ dan $\frac{d}{dx} (y^3)$.

$$\iff \frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x$$

$$\begin{aligned} \iff \frac{d}{dx} (y^3) &= \frac{d}{dy} (y^3) \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

Dengan demikian, kita akan memperoleh hasil berikut.

$$\iff \frac{d}{dx} (\sin x - y^3) = \frac{d}{dx} (\sin x) - \frac{d}{dx} (y^3) = \cos x - 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx}$$

#2 Menentukan $\frac{d}{dx} (\sin x - y^3) \cdot (\cos y + 3xy^2)$

$$\begin{aligned} \iff & \frac{d}{dx} (\sin x - y^3) \cdot (\cos y + 3xy^2) \\ = & \left(\cos x - 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} \right) \cdot (\cos y + 3xy^2) \\ = & \cos x \cos y + 3xy^2 \cos x - 3y^2 \cos y \cdot \frac{dy}{dx} - 9xy^4 \cdot \frac{dy}{dx} \\ = & \left[\cos x \cos y + 3xy^2 \cos x \right] + \left[-3y^2 \cos y - 9xy^4 \right] \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

Untuk memudahkan perhitungan selanjutnya, kita kelompokkan suku-suku yang memuat perkalian dengan $\frac{dy}{dx}$.

#3 Menentukan $\frac{d}{dx} (\cos y + 3xy^2)$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} (\cos y + 3xy^2) = \frac{d}{dx} (\cos y) + \frac{d}{dx} (3xy^2)$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita perlu menentukan $\frac{d}{dx} (\cos y)$ dan $\frac{d}{dx} (3xy^2)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\cos y) &= \frac{d}{dy} (\cos y) \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= -\sin y \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (3xy^2) &= 3 \cdot \left(\frac{d}{dx} (x) \cdot y^2 + x \cdot \frac{d}{dx} (y^2) \right) \\ &= 3 \cdot \left(1 \cdot y^2 + x \cdot \frac{d}{dy} (y^2) \cdot \frac{dy}{dx} \right) \\ &= 3 \cdot \left(y^2 + 2xy \cdot \frac{dy}{dx} \right) \\ &= 3y^2 + 6xy \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

Dengan demikian, kita akan memperoleh hasil berikut.

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} (\cos y + 3xy^2) = \frac{d}{dx} (\cos y) + \frac{d}{dx} (3xy^2) = -\sin y \cdot \frac{dy}{dx} + 3y^2 + 6xy \cdot \frac{dy}{dx}$$

#4 Menentukan $(\sin x - y^3) \cdot \frac{d}{dx} (\cos y + 3xy^2)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & (\sin x - y^3) \cdot \frac{d}{dx} (\cos y + 3xy^2) \\ &= (\sin x - y^3) \cdot \left(-\sin y \cdot \frac{dy}{dx} + 3y^2 + 6xy \cdot \frac{dy}{dx} \right) \\ &= (\sin x - y^3) \cdot (-1) \cdot \left(\sin y \cdot \frac{dy}{dx} - 3y^2 - 6xy \cdot \frac{dy}{dx} \right) \\ &= (-1) \left(\sin x \sin y \cdot \frac{dy}{dx} - 3y^2 \sin x - 6xy \sin x \cdot \frac{dy}{dx} - y^3 \sin y \cdot \frac{dy}{dx} + 3y^5 + 6xy^4 \cdot \frac{dy}{dx} \right) \\ &= (-1) \left(\left[-3y^2 \sin x + 3y^5 \right] + \left[\sin x \sin y - 6xy \sin x - y^3 \sin y + 6xy^4 \right] \cdot \frac{dy}{dx} \right) \end{aligned}$$

Untuk memudahkan perhitungan selanjutnya, kita kelompokkan suku-suku yang memuat perkalian dengan $\frac{dy}{dx}$.

Nah! Setelah menentukan hasil-hasil dari poin #1 hingga #4 di atas, ayo kita tentukan hasil dari

$$\frac{d}{dx} (\sin x - y^3) \cdot (\cos y + 3xy^2) - (\sin x - y^3) \cdot \frac{d}{dx} (\cos y + 3xy^2)$$

Karena kita sudah mengelompokkan suku-suku yang memuat perkalian dengan $\frac{dy}{dx}$, maka "seharusnya" pekerjaan kita menjadi sedikit lebih "mudah". Kita akan menggunakan hasil dari poin #2 dan poin #4.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{d}{dx} (\sin x - y^3) \cdot (\cos y + 3xy^2) - (\sin x - y^3) \cdot \frac{d}{dx} (\cos y + 3xy^2) \\ &= \left[\cos x \cos y + 3xy^2 \cos x \right] + \left[-3y^2 \cos y - 9xy^4 \right] \cdot \frac{dy}{dx} \\ &\quad - \left[(-1) \left(\left[-3y^2 \sin x + 3y^5 \right] + \left[\sin x \sin y - 6xy \sin x - y^3 \sin y + 6xy^4 \right] \cdot \frac{dy}{dx} \right) \right] \\ &= \left[\cos x \cos y + 3xy^2 \cos x \right] + \left[-3y^2 \cos y - 9xy^4 \right] \cdot \frac{dy}{dx} \\ &\quad + \left[-3y^2 \sin x + 3y^5 \right] + \left[\sin x \sin y - 6xy \sin x - y^3 \sin y + 6xy^4 \right] \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \left[\cos x \cos y + 3xy^2 \cos x - 3y^2 \sin x + 3y^5 \right] \\ &\quad + \left[-3y^2 \cos y + \sin x \sin y - 6xy \sin x - y^3 \sin y - 3xy^4 \right] \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

Demi Tuhan! Berikut ini adalah bagian yang paling memuaskan!

Karena diketahui $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x - y^3}{\cos y + 3xy^2}$, maka kita harus mensubstitusikan $\frac{dy}{dx}$ tersebut ke

$$\begin{aligned} &\left[\cos x \cos y + 3xy^2 \cos x - 3y^2 \sin x + 3y^5 \right] \\ &\quad + \left[-3y^2 \cos y + \sin x \sin y - 6xy \sin x - y^3 \sin y - 3xy^4 \right] \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

...Menghela napas dulu...

Mengerjakan substitusi $\frac{dy}{dx}$ ini benar-benar sangat membutuhkan konsentrasi tinggi dan juga lumayan memakan banyak waktu. Sangat disarankan untuk mengerjakan soal ini sebagai yang terakhir.

Sebetulnya, jika berkenan, bagian substitusi $\frac{dy}{dx}$ ini tidak usah dikerjakan saja. Tidak apa-apalah jika pada akhirnya "hanya" mendapat nilai A – atau B . Pokoknya, kita sudah paham bagaimana cara mencari $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Asal tahu saja ya! Pada zaman modern ini, urusan hitung-menghitung yang butuh ketelitian tinggi sudah menjadi tugasnya komputer. Lha, ini dalam ujian, corat-coretnya masih di kertas bu-ram? Waktu pengerjannya terbatas pula.

...Menghela napas lagi....

Ayo kita kerjakan!

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left[\cos x \cos y + 3xy^2 \cos x - 3y^2 \sin x + 3y^5 \right] \\ &\quad + \left[-3y^2 \cos y + \sin x \sin y - 6xy \sin x - y^3 \sin y - 3xy^4 \right] \cdot \left(\frac{\sin x - y^3}{\cos y + 3xy^2} \right) \\ &= \frac{\left[\cos x \cos y + 3xy^2 \cos x - 3y^2 \sin x + 3y^5 \right] \cdot (\cos y + 3xy^2)}{\cos y + 3xy^2} \\ &\quad + \frac{\left[-3y^2 \cos y + \sin x \sin y - 6xy \sin x - y^3 \sin y - 3xy^4 \right] \cdot (\sin x - y^3)}{\cos y + 3xy^2} \end{aligned}$$

Fokus menjabarkan bagian pembilang!

$$\begin{aligned} &\cos x \cos^2 y + 3xy^2 \cos x \cos y - 3y^2 \sin x \cos y + 3y^5 \cos y \\ &+ 3xy^2 \cos x \cos y + 9x^2 y^4 \cos x - 9xy^4 \sin x + 9xy^7 \\ &- 3y^2 \sin x \cos y + \sin^2 x \sin y - 6xy \sin^2 x - y^3 \sin x \sin y - 3xy^4 \sin x \\ &+ 3y^5 \cos y - y^3 \sin x \sin y + 6xy^4 \sin x + y^6 \sin y + 3xy^7 \end{aligned}$$

Kemudian, mana saja nih suku-suku yang bisa dikelompokkan?

$$\begin{aligned} & \cos x \cos^2 y + 3xy^2 \cos x \cos y - 3y^2 \sin x \cos y + 3y^5 \cos y \\ & + 3xy^2 \cos x \cos y + 9x^2y^4 \cos x - 9xy^4 \sin x + 9xy^7 \\ & - 3y^2 \sin x \cos y + \sin^2 x \sin y - 6xy \sin^2 x - y^3 \sin x \sin y - 3xy^4 \sin x \\ & + 3y^5 \cos y - y^3 \sin x \sin y + 6xy^4 \sin x + y^6 \sin y + 3xy^7 \end{aligned}$$

Hasil dari pengelompokkan tersebut adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & \cos x \cos^2 y + 6xy^2 \cos x \cos y - 6y^2 \sin x \cos y + 6y^5 \cos y \\ & + 9x^2y^4 \cos x - 6xy^4 \sin x + 12xy^7 \\ & + \sin^2 x \sin y - 6xy \sin^2 x - 2y^3 \sin x \sin y + y^6 \sin y \end{aligned}$$

...Menghela napas panjang....

Oke!

Dengan demikian, kita memperoleh hasil berikut.

$$\begin{aligned} & \iff \left[\cos x \cos y + 3xy^2 \cos x - 3y^2 \sin x + 3y^5 \right] \\ & + \left[-3y^2 \cos y + \sin x \sin y - 6xy \sin x - y^3 \sin y - 3xy^4 \right] \cdot \left(\frac{\sin x - y^3}{\cos y + 3xy^2} \right) \\ & = \frac{\cos x \cos y - 6y^2 \sin x \cos y + 6y^5 \cos y + 9x^2y^4 \cos x - 6xy^4 \sin x}{\cos y + 3xy^2} \\ & \quad + \frac{12xy^7 + \sin^2 x \sin y - 6xy \sin^2 x - 2y^3 \sin x \sin y + y^6 \sin y}{\cos y + 3xy^2} \end{aligned}$$

Dengan kata lain

$$\begin{aligned} & \iff \frac{d}{dx} (\sin x - y^3) \cdot (\cos y + 3xy^2) - (\sin x - y^3) \cdot \frac{d}{dx} (\cos y + 3xy^2) \\ & = \frac{\cos x \cos y - 6y^2 \sin x \cos y + 6y^5 \cos y + 9x^2y^4 \cos x - 6xy^4 \sin x}{\cos y + 3xy^2} \\ & \quad + \frac{12xy^7 + \sin^2 x \sin y - 6xy \sin^2 x - 2y^3 \sin x \sin y + y^6 \sin y}{\cos y + 3xy^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iff \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x - y^3}{\cos y + 3xy^2} \right) \\
&= \frac{\frac{d}{dx} (\sin x - y^3) \cdot (\cos y + 3xy^2) - (\sin x - y^3) \cdot \frac{d}{dx} (\cos y + 3xy^2)}{(\cos y + 3xy^2)^2} \\
&= \frac{1}{(\cos y + 3xy^2)^2} \cdot \left(\frac{d}{dx} (\sin x - y^3) \cdot (\cos y + 3xy^2) - (\sin x - y^3) \cdot \frac{d}{dx} (\cos y + 3xy^2) \right) \\
&= \frac{1}{(\cos y + 3xy^2)^2} \cdot \left(\frac{\cos x \cos y - 6y^2 \sin x \cos y + 6y^5 \cos y + 9x^2 y^4 \cos x - 6xy^4 \sin x}{+ 12xy^7 + \sin^2 x \sin y - 6xy \sin^2 x - 2y^3 \sin x \sin y + y^6 \sin y} \right. \\
&\quad \left. \frac{\cos x \cos y - 6y^2 \sin x \cos y + 6y^5 \cos y + 9x^2 y^4 \cos x - 6xy^4 \sin x}{+ 12xy^7 + \sin^2 x \sin y - 6xy \sin^2 x - 2y^3 \sin x \sin y + y^6 \sin y} \right) \\
&= \frac{\cos x \cos y - 6y^2 \sin x \cos y + 6y^5 \cos y + 9x^2 y^4 \cos x - 6xy^4 \sin x}{(\cos y + 3xy^2)^3} \\
\text{Jadi, } \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\cos x \cos y - 6y^2 \sin x \cos y + 6y^5 \cos y + 9x^2 y^4 \cos x - 6xy^4 \sin x}{(\cos y + 3xy^2)^3}.
\end{aligned}$$

■

14

Ayo Kerjakan!

Ujian Akhir Semester

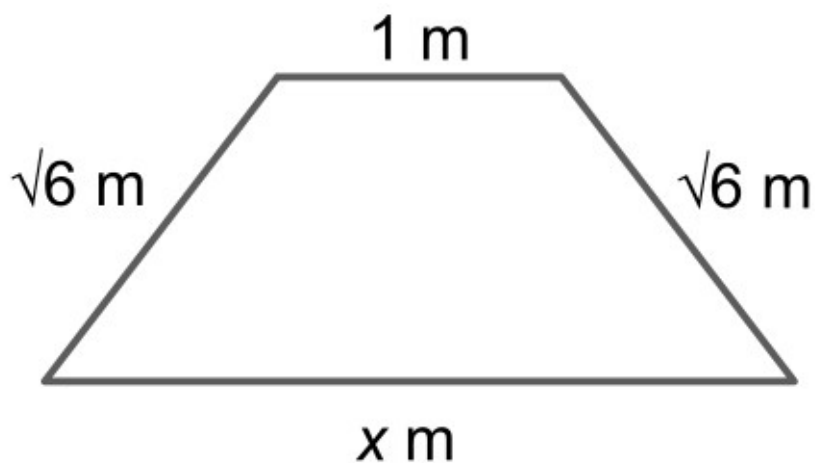
Soal Nomor 4

Soal

Akan dibuat jendela berbentuk trapesium. Jika panjang kedua sisi miring masing-masing adalah $\sqrt{6}$ dan panjang salah satu sisi sejajar adalah 1, maka tentukan panjang sisi sejajar yang lain agar luas jendela maksimum!

Dikerjakan

Ayo kita sketsa dulu rancangan jendelanya!



Eee, sebetulnya panjang salah satu sisi sejajar yang 1 meter itu bisa sisi sejajar yang paling pendek, bisa juga sisi sejajar yang paling panjang. Tapi, karena di soal meminta untuk menentukan panjang sisi sejajar supaya luas jendela maksimum, jadi panjang sisi sejajar yang 1 meter itu dipilih sajalah sebagai sisi sejajar yang paling pendek. Dengan kata lain, kita harus menentukan sisi sejajar bawah yang panjangnya x meter itu supaya luas jendela maksimum.

Oke! Untuk menentukan luas jendela, berarti kita harus tahu luas trapesium. Ingat rumus luas trapesium berikut!

$$\text{Luas trapesium} = \frac{\text{Jumlah kedua sisi sejajar} \times \text{tinggi trapesium}}{2}$$

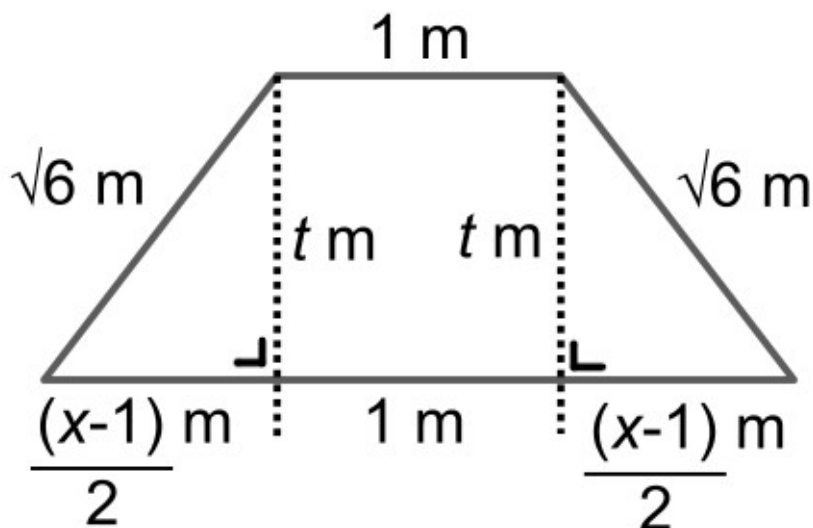
Karena panjang sisi trapesium adalah 1 meter dan x meter, maka rumus luas trapesium di atas akan menjadi seperti ini.

$$\text{Luas trapesium} = \frac{(1 + x) \times \text{tinggi trapesium}}{2}$$

Nah ini!

Muncul pertanyaan, "*Tinggi trapesiumnya berapa ya?*"

Naaah, Untuk mencari tinggi trapesium, kita bisa mulai dengan "mengubah" sketsa rancangan jendela menjadi seperti di bawah ini. Tinggi trapesium kita nyatakan sebagai t meter.



Nah, menggunakan rumus Pythagoras, kita akan mendapatkan persamaan

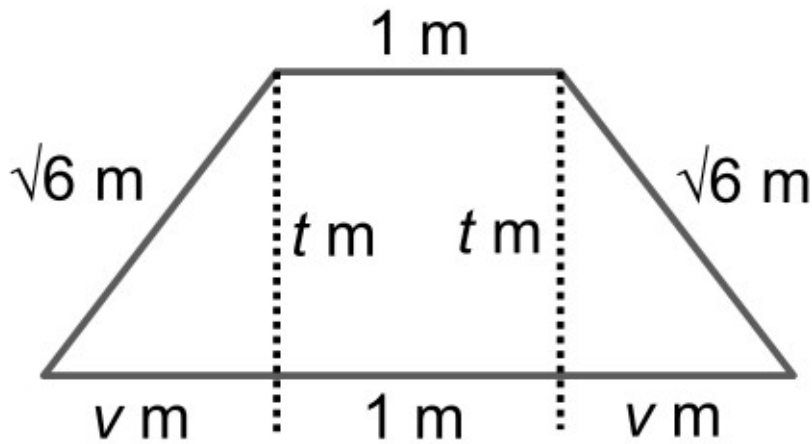
$$(\sqrt{6})^2 = t^2 + \left(\frac{x-1}{2}\right)^2$$

Owww, karena bentuk $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2$ terlalu *njlimet*, kita substitusikan saja $v = \frac{x-1}{2}$. Dengan demikian, kita akan punya persamaan

$$(\sqrt{6})^2 = t^2 + v^2$$

yang ekuivalen dengan persamaan

$$t = \sqrt{6 - v^2}$$



Diperoleh tinggi trapesium adalah $t = \sqrt{6 - v^2}$ meter.

Oke! Langsung kita substitusikan variabel t ke rumus luas trapesium.

$$\text{Luas trapesium} = \frac{(1 + x) \times \sqrt{6 - v^2}}{2}$$

Woolha... kok di rumus luas trapesium jadi ada variabel x dan v ?

Karena tadi kita substitusikan $v = \frac{x-1}{2}$, maka sekarang kita substitusikan $x = 2v + 1$ ke luas trapesium. Hasilnya adalah seperti ini.

$$\text{Luas trapesium} = \frac{(1 + 2v + 1) \times \sqrt{6 - v^2}}{2} = \frac{(2v + 2) \times \sqrt{6 - v^2}}{2} = (v + 1) \times \sqrt{6 - v^2}$$

Oke! Diperoleh rumus luas trapesium sebagai berikut, yang mana adalah fungsi real dengan peubah v . Oleh sebab itu, kita akan panggil luas trapesium ini sebagai fungsi L .

$$L(v) = (v + 1) \cdot \sqrt{6 - v^2}.$$

Oh iya, harap ingat ya bahwa $Domain(L)$ adalah himpunan $\{v \in \mathbb{R} : v > 0\}$. Kenapa? Karena yang namanya panjang sisi trapesium kan harus bilangan positif. Masak panjang sisi trapesium 0 atau negatif?

Oke! Selanjutnya, perhatikan definisi di bawah.

Titik Maksimum Lokal Fungsi L

Diketahui suatu fungsi real L dengan $Domain(L) \subseteq \mathbb{R}$.

Lebih lanjut, diketahui pula titik $c \in Domain(L)$ dan fungsi L kontinu di titik c .

Jika fungsi L memiliki derivatif tingkat pertama di titik c , yaitu $L'(c)$ ada dan terdefinisi dengan baik dengan $L'(c) = 0$, maka titik c disebut sebagai **titik kritis fungsi L** .

Jika fungsi L memiliki derivatif tingkat kedua di titik c , yaitu $L''(c)$ ada dan terdefinisi dengan baik dengan titik c adalah titik kritis fungsi L serta berlaku $L''(c) < 0$, maka titik c disebut sebagai **titik maksimum lokal fungsi L** .

Berdasarkan definisi di atas, kita akan menentukan titik kritis fungsi L . Sebelumnya, kita akan menentukan dulu derivatif tingkat pertama fungsi L , yaitu L' , yang tidak lain adalah $\frac{d}{dv}(L(v))$.

$$\begin{aligned} L' &= \frac{d}{dv}(L(v)) \\ &= \frac{d}{dv}((v + 1) \cdot \sqrt{6 - v^2}) \\ &= \frac{d}{dv}(v + 1) \cdot \sqrt{6 - v^2} + (v + 1) \cdot \frac{d}{dv}(\sqrt{6 - v^2}) \\ &= 1 \cdot \sqrt{6 - v^2} + (v + 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6 - v^2}} \cdot \frac{d}{dv}(6 - v^2) \\ &= \sqrt{6 - v^2} + \frac{v + 1}{2\sqrt{6 - v^2}} \cdot (-2v) \\ &= \sqrt{6 - v^2} - \frac{v(v + 1)}{\sqrt{6 - v^2}} \\ &= \frac{6 - v^2 - v(v + 1)}{\sqrt{6 - v^2}} \\ &= \frac{6 - v - 2v^2}{\sqrt{6 - v^2}} \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita memperoleh $L'(v) = \frac{6 - v - 2v^2}{\sqrt{6 - v^2}}$.

Selanjutnya, kita akan mencari titik kritis fungsi L , yaitu titik $c \in \text{Domain}(L)$ sedemikian sehingga $L'(c) = 0$. Perhatikan bahwa $L'(c) = 0$ jika dan hanya jika $6 - c - 2c^2 = (c + 2)(-2c + 3) = 0$. Dengan demikian, nilai c yang memenuhi adalah -2 atau $3/2$. Dari dua nilai c yang memenuhi tersebut, yang benar-benar memenuhi syarat sebagai titik kritis adalah $3/2$, karena $3/2 \in \text{Domain}(L)$. Jadi, titik kritis fungsi L adalah $3/2$.

Kita lanjut dengan menentukan derivatif tingkat kedua fungsi L , yaitu L'' , yang tidak lain adalah $\frac{d}{dv}(L'(v))$.

$$\begin{aligned}
 L'' &= \frac{d}{dv}(L'(v)) \\
 &= \frac{d}{dv} \left(\frac{6 - v - 2v^2}{\sqrt{6 - v^2}} \right) \\
 &= \frac{d}{dv} \left((6 - v - 2v^2) \cdot (6 - v^2)^{-1/2} \right) \\
 &= \frac{d}{dv} \left((6 - v - 2v^2) \right) \cdot (6 - v^2)^{-1/2} + (6 - v - 2v^2) \cdot \frac{d}{dv} \left((6 - v^2)^{-1/2} \right) \\
 &= (0 - 1 - 4v) \cdot (6 - v^2)^{-1/2} + (6 - v - 2v^2) \cdot (-2v) \cdot (-1/2) \cdot (6 - v^2)^{-3/2} \\
 &= (-1 - 4v) \cdot (6 - v^2)^{-1/2} + v(6 - v - 2v^2) \cdot (6 - v^2)^{-3/2} \\
 &= (-1 - 4v) \cdot (6 - v^2) \cdot (6 - v^2)^{-3/2} + v(6 - v - 2v^2) \cdot (6 - v^2)^{-3/2} \\
 &= \left((-1 - 4v) \cdot (6 - v^2) + v(6 - v - 2v^2) \right) \cdot (6 - v^2)^{-3/2} \\
 &= 2 \cdot (v^3 - 9v - 3) \cdot (6 - v^2)^{-3/2}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita memperoleh $L''(v) = 2 \cdot (v^3 - 9v - 3) \cdot (6 - v^2)^{-3/2}$.

Nah, selanjutnya kita akan mengecek apakah $L''(3/2) < 0$ dengan cara mengecek apakah $(3/2)^3 - 9(3/2) - 3 < 0$. Lha, kan nilai $(6 - (3/2)^2)^{-3/2}$ sudah pasti bilangan positif toh?

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - 3 &= \frac{27}{8} - \frac{27}{2} - 3 \\
 &= \frac{27 - 108 - 24}{8} \\
 &= \frac{-105}{8}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita memperoleh $L''(3/2) = -105/8 < 0$. Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa titik kritis $3/2$ adalah titik maksimum lokal fungsi L . Dengan kata lain, kita bisa menyimpulkan bahwa fungsi $L(v) = (v+1) \cdot \sqrt{6-v^2}$ mencapai nilai maksimum untuk $v = 3/2$.

Ingat bahwa fungsi L adalah fungsi luas trapesium yang merupakan bentuk dari jendela yang hendak dibuat. Ingat juga bahwa panjang sisi trapesium yang mau kita maksimalkan itu dinotasikan dengan variabel x . Karena kita mensubstitusikan $v = \frac{x-1}{2}$, maka kita akan memperoleh nilai variabel x sebagai berikut.

$$\begin{aligned}v = \frac{x-1}{2} &\iff 2v + 1 = x \\ &\iff 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = x \\ &\iff 3 + 1 = x \\ &\iff 4 = x\end{aligned}$$

Jadi, jika dibuat jendela berbentuk trapesium dengan panjang kedua sisi miring masing-masing adalah $\sqrt{6}$ meter dan panjang salah satu sisi sejajar adalah 1 meter, maka panjang sisi sejajar yang lain haruslah 4 meter supaya luas jendela menjadi maksimum.

■

15

Ayo Kerjakan!

Ujian Akhir Semester

Soal Nomor 5

Soal

Jika fungsi g mempunyai derivatif pada \mathbb{R} , dengan $g(-1) = -2$ dan $g'(-1) = 3$, dan fungsi f memiliki rumus

$$f(x) = e^{2x} g\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

tentukan persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik dengan absis $x = 0$!

Dikerjakan

Sebelumnya, itu definisi fungsi f kok agak ribet ya?

Ayo, kita "sederhanakan" definisi fungsi f sebagai:

$$f(x) = k(x) \cdot g(h(x))$$

dengan $k(x) = e^{2x}$ dan $h(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

Selanjutnya, ayo ingat hal-hal yang berkaitan dengan garis singgung suatu fungsi berikut!

Persamaan Garis Singgung

Diketahui fungsi real f dan titik $c \in \mathbb{R}$. Diketahui pula fungsi f kontinu di titik c dan juga memiliki derivatif tingkat pertama di titik c .

- Gradien garis singgung fungsi f di titik c adalah $f'(c)$, yaitu derivatif tingkat pertama fungsi f di titik c .
- Persamaan garis singgung fungsi f di titik c adalah $y - f(c) = f'(c) \cdot (x - c)$.

Selanjutnya, ayo kita tentukan $f'(x)$!

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} (f(x)) \\ &= \frac{d}{dx} (k(x) \cdot g(h(x))) \\ &= \frac{d}{dx} (k(x)) \cdot g(h(x)) + k(x) \cdot \frac{d}{dx} (g(h(x))) \quad \dots(\text{P1}) \end{aligned}$$

Ayo kita tentukan $\frac{d}{dx} (k(x))$ dan $\frac{d}{dx} (g(h(x)))$!

Nanti hasilnya kita gunakan untuk menjabarkan (P1).

Menentukan $\frac{d}{dx} (k(x))$

Karena $k(x) = e^{2x}$, maka $\frac{d}{dx} (k(x)) = \frac{d}{dx} (e^{2x}) = 2e^{2x}$.

Menentukan $\frac{d}{dx} (g(h(x)))$

$$\frac{d}{dx} (g(h(x))) = g'(h(x)) \cdot \frac{d}{dx} (h(x)).$$

Karena $h(x) = \frac{x-1}{x+1}$, maka akan berlaku:

$$\frac{d}{dx} (h(x)) = \frac{\frac{d}{dx} (x-1) \cdot (x+1) - (x-1) \cdot \frac{d}{dx} (x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Dengan demikian, $\frac{d}{dx}(g(h(x))) = g'(h(x)) \cdot \frac{2}{(x+1)^2}$

Kembali ke (P1), maka kita akan memperoleh:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(f(x)) \\ &= \frac{d}{dx}(k(x) \cdot g(h(x))) + k(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(h(x))) \\ &= 2e^{2x} \cdot g(h(x)) + k(x) \cdot g'(h(x)) \cdot \frac{2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Selanjutnya, kita akan cari gradien garis singgung kurva fungsi f di titik dengan absis $x = 0$!

$$\begin{aligned} f'(0) &= 2e^{2 \cdot 0} \cdot g(h(0)) + k(0) \cdot g'(h(0)) \cdot \frac{2}{(0+1)^2} \\ &= 2e^0 \cdot g\left(\frac{0-1}{0+1}\right) + e^{2 \cdot 0} \cdot g'\left(\frac{0-1}{0+1}\right) \cdot \frac{2}{(0+1)^2} \\ &= 2 \cdot 1 \cdot g(-1) + e^0 \cdot g'(-1) \cdot \frac{2}{1} \\ &= 2 \cdot 1 \cdot g(-1) + e^0 \cdot g'(-1) \cdot \frac{2}{1} \\ &= 2 \cdot g(-1) + 2 \cdot g'(-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pada soal diketahui } g(-1) &= -2 \text{ dan } g'(-1) = 3 \\ &= 2 \cdot -2 + 2 \cdot 3 \\ &= -4 + 6 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Dengan demikian gradien garis singgung fungsi f di titik dengan absis $x = 0$ adalah $f'(0) = 2$.

Selanjutnya, kita akan mencari koordinat titik singgung jika absis-nya $x = 0$. Kita harus mencari tahu dulu ordinat titik singgung jika absis-nya $x = 0$, yang tidak lain adalah $f(0)$.

$$\begin{aligned}f(0) &= k(0) \cdot g(h(0)) \\&= e^{2 \cdot 0} \cdot g\left(\frac{0-1}{0+1}\right) \\&= e^0 \cdot g(-1) \\&= 1 \cdot -2 \\&= -2\end{aligned}$$

Dengan demikian, koordinat titik singgung jika absis-nya $x = 0$ adalah $(0, f(0)) = (0, -2)$.

Dengan demikian pula, persamaan garis singgung fungsi f di titik dengan absis $x = 0$ adalah $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$.

$$\iff y - (-2) = 2 \cdot x$$

$$\iff y = 2x - 2.$$

Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik dengan absis $x = 0$ adalah $y = 2x - 2$.



16

Ayo Kerjakan!

Ujian Akhir Semester

Soal Nomor 6

Soal

Diberikan

$$f(x) = 2x + \ln(x^2 - 3)$$

Tentukan:

1. domain fungsi f ;
2. daerah naik/turun fungsi f ;
3. titik ekstrem f dan jenisnya;
4. daerah cekung ke atas/bawah dan titik belok fungsi f ;
5. asimtot-asimtot untuk f

Dengan memanfaatkan hasil yang telah diperoleh, buatlah sketsa grafik fungsi f !

Dikerjakan

#Persiapan. Mencari Turunan Pertama dan Kedua dari Fungsi f .

Ayo kita awali pembahasan dengan mencari turunan pertama dan kedua fungsi f ! Turunan pertama dari fungsi f dinotasikan dengan f' . Turunan kedua dari fungsi f dinotasikan dengan f'' .

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{d}{dx} (f(x)) \\
 &= \frac{d}{dx} (2x + \ln(x^2 - 3)) \\
 &= \frac{d}{dx} (2x) + \frac{d}{dx} (\ln(x^2 - 3)) \\
 &= 2 + \left(\frac{1}{x^2 - 3} \cdot \frac{d}{dx} (x^2 - 3) \right) \\
 &= 2 + \frac{2x}{x^2 - 3} \\
 &= \frac{2(x^2 + x - 3)}{x^2 - 3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} (f(x)) \right) \\
 &= \frac{d}{dx} \left(\frac{2(x^2 + x - 3)}{x^2 - 3} \right) \\
 &= 2 \cdot \left(\frac{\frac{d}{dx} (x^2 + x - 3) \cdot (x^2 - 3) - (x^2 + x - 3) \cdot \frac{d}{dx} (x^2 - 3)}{(x^2 - 3)^2} \right) \\
 &= 2 \cdot \left(\frac{(2x + 1) \cdot (x^2 - 3) - (x^2 + x - 3) \cdot (2x)}{(x^2 - 3)^2} \right) \\
 &= \frac{-2(x^2 + 3)}{(x^2 - 3)^2}
 \end{aligned}$$

#1. Domain Fungsi f

Ayo kita cari domain fungsi f ! Eh, supaya gampang, kita sebut sebagai $Domain(f)$.

Sesuai definisi pada soal, fungsi f adalah jumlahan 2 suku, yaitu $2x$ dan $\ln(x^2 - 3)$. Jelas bahwa $2x$ akan selalu terdefinisi dengan baik untuk sebarang $x \in \mathbb{R}$. Di lain sisi, suku $\ln(x^2 - 3)$ ini nih yang **bisa jadi** tidak terdefinisi untuk suatu nilai $x \in \mathbb{R}$ tertentu.

Oke! Mari kita selidiki $\ln(x^2 - 3)$!

Kita tahu bahwa nilai $\ln(x)$ terdefinisi dengan baik jika dan hanya jika $x > 0$. Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa $\ln(x^2 - 3)$ akan terdefinisi dengan baik jika dan hanya jika $x^2 - 3 > 0$.

Oh iya! Supaya manggilnya gampang, kita namakan $x^2 - 3$ sebagai fungsi h . Dengan demikian, $h(x) = x^2 - 3$.

Perhatikan bahwa fungsi h terdefinisi dengan baik untuk sebarang $x \in \mathbb{R}$. Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa $Domain(h) = \mathbb{R}$.

Kemudian, sesuai sifat *trichotomy* bilangan real, untuk sebarang $x \in \mathbb{R}$ akan berlaku tepat satu kejadian, yaitu $h(x) < 0$, atau $h(x) = 0$, atau $h(x) > 0$.

Kita akan mencari tahu himpunan $D' \subseteq Domain(h)$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in D'$ akan menyebabkan $h(x) = x^2 - 3 > 0$. Salah satu caranya adalah dengan menyelidiki grafik fungsi h .

Sewaktu SMA, tentu kita sudah belajar bahwa bentuk grafik fungsi kuadrat adalah **parabola**. Karena $h(x) = x^2 - 3$ adalah fungsi kuadrat, maka grafiknya berbentuk parabola. Kita sebut grafik ini sebagai parabola fungsi h .

Selanjutnya, kita akan mencari tahu apakah parabola fungsi h memotong sumbu X. Maksud dari memotong itu adalah garis $y = 0$ membagi parabola fungsi h menjadi dua bagian sedemikian sehingga terdapat bagian parabola yang berada di atas garis $y = 0$ dan juga terdapat bagian parabola yang berada di bawah garis $y = 0$.

Salah satu cara menyelidiki apakah parabola fungsi h memotong sumbu X adalah dengan menentukan $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $h(c_1) = h(c_2) = 0$. Karena $h(x) = x^2 - 3 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$, maka $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $h(c_1) = h(c_2) = 0$ adalah $c_1 = -\sqrt{3}$ dan $c_2 = \sqrt{3}$ (kita tetapkan c_1 sebagai yang lebih kecil dari c_2). Jadi, kita bisa menyimpulkan bahwa parabola fungsi h memotong sumbu X di titik $-\sqrt{3}$ dan $\sqrt{3}$.

Perhatikan! Karena c_1 adalah titik potong parabola fungsi h dengan sumbu X, maka untuk sebarang $\epsilon \in \mathbb{R}$ positif yang sangat kecil, nilai $h(c_1 - \epsilon)$ dan $h(c_1 + \epsilon)$ akan berbeda tanda. Hal serupa juga berlaku untuk titik potong c_2 .

Kemudian, dengan menggunakan titik-titik potong grafik dengan sumbu X, kita dapat membuat interval I_1 , I_2 , dan I_3 sebagai berikut.

1. $I_1 = (-\infty, -\sqrt{3}) = \{x \in \mathbb{R} : x < -\sqrt{3}\}$
2. $I_2 = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = \{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$
3. $I_3 = (\sqrt{3}, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > \sqrt{3}\}$

Perhatikan dua hal berikut!

- $\mathbb{R} = \text{Domain}(h) = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$
- Terdapat interval $I_i \in \{I_1, I_2, I_3\}$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in I_i$ akan berlaku $h(x) > 0$. Dalam visualisasi grafik, I_i adalah himpunan bagian dari $\text{Domain}(h)$ di mana parabola fungsi h pada domain himpunan bagian tersebut berada di atas garis $y = 0$.

Selanjutnya, kita akan menyelidiki nilai $h(x)$ ketika $x \in I_1$, $x \in I_2$, dan $x \in I_3$.

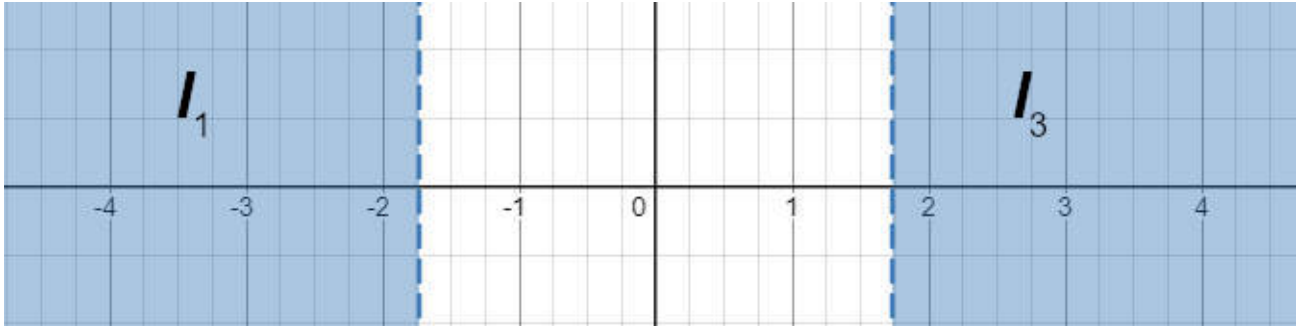
1. Untuk menyelidiki nilai $h(x)$ ketika $x \in I_1$, kita ambil sebarang contoh titik di interval I_1 . Misalkan kita ambil $x = -10 \in I_1$. Perhatikan bahwa $h(-10) = (-10)^2 - 3 = 100 - 3 = 97 > 0$. Dengan demikian, karena fungsi kuadrat itu kontinu, maka kita dapat menyimpulkan bahwa $h(x) > 0$ untuk setiap $x \in I_1$.
2. Untuk menyelidiki nilai $h(x)$ ketika $x \in I_2$, kita ambil sebarang contoh titik di interval I_2 . Misalkan kita ambil $x = 1 \in I_2$. Perhatikan bahwa $h(1) = (1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2 < 0$. Dengan demikian, karena fungsi kuadrat itu kontinu, maka kita dapat menyimpulkan bahwa $h(x) < 0$ untuk setiap $x \in I_2$.
3. Untuk menyelidiki nilai $h(x)$ ketika $x \in I_3$, kita ambil sebarang contoh titik di interval I_3 . Misalkan kita ambil $x = 9 \in I_3$. Perhatikan bahwa $h(9) = (9)^2 - 3 = 81 - 3 = 78 > 0$. Dengan demikian, karena fungsi kuadrat itu kontinu, maka kita dapat menyimpulkan bahwa $h(x) > 0$ untuk setiap $x \in I_3$.

Nah, berdasarkan uraian tiga poin di atas, karena berlaku $h(x) > 0$ untuk setiap $x \in I_1$ dan $x \in I_3$, maka himpunan D' yang kita cari tidak lain adalah $D' = I_1 \cup I_3 = \{x \in \mathbb{R} : x < -\sqrt{3} \text{ atau } x > \sqrt{3}\}$.

Dengan demikian, supaya $\ln(x^2 - 3)$ terdefinisi dengan baik, maka nilai-nilai x harus berasal dari himpunan D' .

Dengan kata lain, himpunan $D' = \{x \in \mathbb{R} : x < -\sqrt{3} \text{ atau } x > \sqrt{3}\}$ adalah $\text{Domain}(f)$.

Apabila divisualisasikan dalam garis bilangan, maka $Domain(f)$ adalah daerah berwarna biru berikut. Dengan kata lain, grafik fungsi f berada pada daerah berwarna biru tersebut.



Supaya gampang, kita sebut interval I_1 sebagai $Domain(f)$ sebelah kiri dan interval I_3 sebagai $Domain(f)$ sebelah kanan.

#2. Daerah Naik/Turun Fungsi f

Untuk mengetahui daerah di mana fungsi f naik atau turun, kita perlu tahu **titik-titik kritis** fungsi f . Perhatikan definisi di bawah!

Titik Kritis Fungsi f

Diketahui suatu fungsi real f dengan $Domain(f) \subseteq \mathbb{R}$.

Lebih lanjut, diketahui pula titik $c \in Domain(f)$ dan fungsi f kontinu di titik c .

1. Jika f memiliki derivatif tingkat pertama di c , yaitu $f'(c)$ ada terdefinisi dengan baik, maka:
 - (a) Jika $f'(c) = 0$, maka titik c adalah titik kritis fungsi f .
 - (b) Jika $f'(c) \neq 0$, maka titik c **bukan titik kritis** fungsi f .

2. Jika f tidak memiliki derivatif tingkat pertama di c , yaitu $f'(c)$ tidak terdefinisi dengan baik, maka titik c adalah titik kritis fungsi f .

Berdasarkan **Bagian #Persiapan**, kita sudah tahu bahwa $f'(x) = \frac{2(x^2 + x - 3)}{x^2 - 3}$. Berdasarkan **Bagian #1**, kita juga tahu bahwa $Domain(f) = \{x \in \mathbb{R} : x < -\sqrt{3} \text{ atau } x > \sqrt{3}\}$.

Selanjutnya, kita akan mencari titik $c \in Domain(f)$, sedemikian sehingga $f'(c) = 0$. Perhatikan bahwa $f'(c) = 0$ jika dan hanya jika $c^2 + c - 3 = 0$. Kita bisa menggunakan rumus *ABC* untuk mencari nilai c yang memenuhi persamaan $c^2 + c - 3 = 0$.

$$c_1, c_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (1)}$$

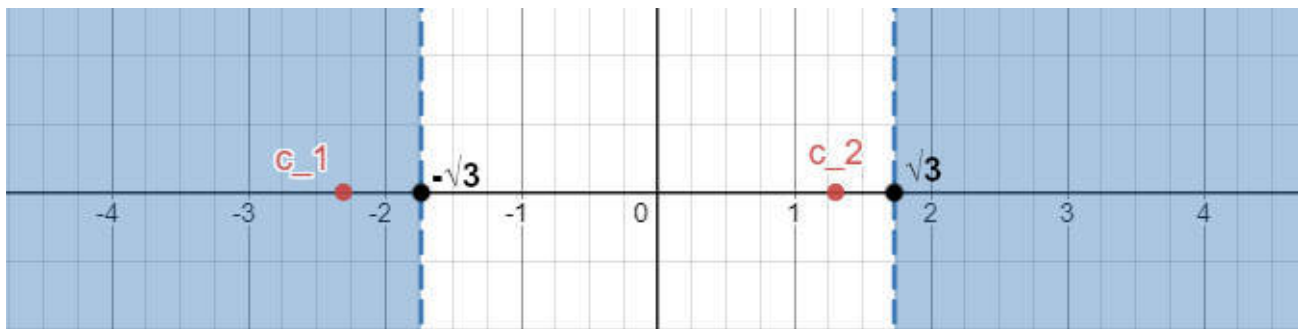
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Diperoleh titik $c_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$ dan $c_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$ memenuhi persamaan $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$.

Selanjutnya, kita akan mengecek apakah c_1 dan c_2 merupakan elemen di $Domain(f)$.

Perhatikan bahwa 13 berada di antara 9 dan 16. Dengan demikian, nilai $\sqrt{13}$ berada di antara nilai $\sqrt{9}$ dan $\sqrt{16}$ ($\sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16}$). Karena $\sqrt{9} = 3$ dan $\sqrt{16} = 4$, maka nilai $\sqrt{13}$ itu kira-kira sekitar 3 koma sekian yang mendekati 4.

Karena nilai $\sqrt{13}$ itu kira-kira sekitar 3 koma sekian, maka nilai c_1 itu sekitar -2 koma sekian dan nilai c_2 itu sekitar 1 koma sekian. Perhatikan pula bahwa nilai $\sqrt{3}$ itu sekitar satu koma sekian yang mendekati 2. Dengan demikian, visualisasi posisi titik c_1 dan c_2 di garis bilangan kira-kira seperti ini.



Berdasarkan garis bilangan di atas, terlihat bahwa hanya titik c_1 yang berada di $Domain(f)$.

Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa $c_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$ adalah titik kritis fungsi f .

Selanjutnya, kita akan mencari titik di $d \in Domain(f)$, sedemikian sehingga $f'(d)$ tidak terdefinisi. Perhatikan bahwa $f'(d)$ tidak akan terdefinisi jika dan hanya jika $d = \sqrt{3}$. Akan tetapi, karena $\sqrt{3} \notin Domain(f)$, maka kita bisa menyimpulkan bahwa tidak ada $d \in Domain(f)$, sedemikian sehingga $f'(d)$ tidak terdefinisi.

Nah, berdasarkan uraian di atas, kita bisa menyimpulkan bahwa $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$ hanyalah satu-satunya titik kritis fungsi f .

Ingat! Jika α adalah sebarang titik di $\text{Domain}(f)$, maka $f'(\alpha)$ adalah gradien garis singgung kurva fungsi f di titik α . Sesuai sifat *trichotomy* bilangan real, nilai $f'(\alpha)$ bisa positif (> 0), negatif (< 0), dan 0.

Berdasarkan uraian sebelum ini, kita tahu bahwa $f'\left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}\right) = 0$. Di titik kritis ini terjadi perubahan nilai gradien garis singgung kurva fungsi f . Kita ingin tahu apakah perubahan yang terjadi dari positif ke negatif, ataukah sebaliknya, yaitu dari negatif ke positif.

Kita ambil sebarang titik di $\text{Domain}(f)$ yang berada di sebelah kiri titik kritis $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$. Perhatikan bahwa titik ini akan berada di $\text{Domain}(f)$ sebelah kiri.

Misalkan kita pilih titik -4 . Kita akan mencari tahu nilai gradien garis singgung kurva fungsi f di titik -4 . Caranya ya dengan menghitung nilai $f'(-4)$ seperti di bawah ini.

$$f'(-4) = \frac{2((-4)^2 + (-4) - 3)}{(-4)^2 - 3} = \frac{2 \cdot (16 - 4 - 3)}{16 - 3} = \frac{2 \cdot (9)}{13} = \frac{18}{3}.$$

Karena $f'(-4) = \frac{18}{3}$ itu adalah bilangan positif, maka kita bisa menyimpulkan bahwa untuk sebarang $x \in \text{Domain}(f)$ sebelah kiri dengan $x < \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$, akan menyebabkan $f'(x)$ bernilai positif. Jika diperhatikan lebih saksama, nilai $f'(x)$ yang positif tersebut akan semakin mengecil menuju 0 ketika titik x semakin dekat dengan titik $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$.

Selanjutnya, kita akan menyelidiki titik di $\text{Domain}(f)$ yang berada di sebelah kanan titik kritis $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$ dan di sebelah kiri titik batas $-\sqrt{3}$. Perhatikan bahwa titik ini akan berada di $\text{Domain}(f)$ sebelah kiri.

Misalkan kita pilih titik -2 . Kita akan mencari tahu nilai gradien garis singgung kurva fungsi f di titik -2 . Caranya ya dengan menghitung nilai $f'(-2)$ seperti di bawah ini.

$$f'(-2) = \frac{2((-2)^2 + (-2) - 3)}{(-2)^2 - 3} = \frac{2 \cdot (4 - 2 - 3)}{4 - 3} = \frac{2 \cdot (-1)}{1} = -2.$$

Karena -2 itu adalah bilangan negatif, maka kita bisa menyimpulkan bahwa untuk sebarang $x \in \text{Domain}(f)$ sebelah kiri dengan $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2} < x < -\sqrt{3}$, akan menyebabkan $f'(x)$ bernilai negatif. Jika diperhatikan lebih saksama, nilai $f'(x)$ yang negatif tersebut akan semakin membesar menuju 0 ketika titik x semakin dekat dengan titik $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$.

Berdasarkan uraian di atas, terjadi perubahan nilai gradien garis singgung fungsi f dari positif menuju negatif untuk kurva fungsi f yang terletak di domain bagian kiri. Dengan demikian kita bisa menyimpulkan dua hal berikut.

1. Fungsi f naik pada interval $(-\infty, \frac{-1-\sqrt{13}}{2})$.
2. Fungsi f turun pada interval $(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, -\sqrt{3})$.

... Eh!

$Domain(f)$ kan masih ada satu lagi!

Yang $Domain(f)$ bagian sebelah kanan!

Oke! Untuk menyelidiki apakah fungsi f naik atau turun di $Domain(f)$ bagian sebelah kanan, kita akan pilih sebarang titik di $Domain(f)$ bagian sebelah kanan. Misalkan kita pilih titik 10. Dengan demikian $10 \in Domain(f)_{\text{sebelah kanan}}$ karena $10 > \sqrt{3}$.

Selanjutnya, kita akan menyelidiki gradien garis singgung kurva fungsi f di titik 10.

Oh iya! Jangan lupa bahwa $x\sqrt{3}$ termasuk ke dalam $Domain(f)$. Kita ambil sebarang $x\sqrt{3}$, misalkan $x = 10$, kemudian kita cari nilai dari $f'(10)$. Caranya ya dengan menghitung nilai $f'(10)$ seperti di bawah ini.

$$f'(10) = \frac{2((10)^2 + (10) - 3)}{(10)^2 - 3} = \frac{2 \cdot (100 + 10 - 3)}{100 - 3} = \frac{2 \cdot (107)}{97} = \frac{214}{97}$$

Karena $f'(10) = \frac{214}{97}$ adalah bilangan positif, maka kita bisa menyimpulkan bahwa untuk sebarang $x > \sqrt{3}$ akan menyebabkan $f'(x)$ bernilai positif. Jika diperhatikan lebih saksama, nilai $f'(x)$ yang positif tersebut akan semakin mengecil menuju 2 ketika titik x semakin menuju $+\infty$.

Kenapa bisa begitu?

$$\text{Karena } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x^2 + x - 3)}{x^2 - 3} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x^2 \cdot (x^2 + x - 3)}{1/x^2 \cdot (x^2 - 3)} = 2 \cdot 1 = 2$$

Kenapa pula dikatakan mengecil?

$$\text{Karena } f'(2) = 3 = \frac{291}{97} > f'(10) = \frac{214}{97}.$$

Jadi, pada akhirnya, kita bisa menyimpulkan bahwa:

1. Fungsi f naik pada interval $(-\infty, \frac{-1 - \sqrt{13}}{2})$ dan $(\sqrt{3}, +\infty)$.
2. Fungsi f turun pada interval $(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, -\sqrt{3})$.

#3. Titik Ekstrem Fungsi f dan Jenisnya.

Berdasarkan **Bagian #2**, kita tahu bahwa:

- Fungsi f hanya punya satu titik kritis, yaitu $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$, dan
- Titik kritis fungsi f terletak di $Domain(f)$ sebelah kiri, di mana terjadi perubahan gradien garis singgung kurva fungsi f dari positif menuju negatif.

Berdasarkan dua hal di atas kita dapat menyimpulkan bahwa titik $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$ adalah titik ekstrem lokal maksimum fungsi f di interval $(-\infty, -\sqrt{3})$. Fungsi f tidak punya titik ekstrem lain selain titik tersebut.

#4. Daerah Cekung ke Atas/Bawah dan Titik Belok Fungsi f .

Titik belok fungsi f adalah titik $c \in Domain(f)$ sedemikian sehingga berlaku $f''(c) = 0$.

Berdasarkan **Bagian #Persiapan**, kita sudah tahu bahwa $f''(x) = \frac{-2(x^2 + 3)}{(x^2 - 3)^2}$.

Perhatikan bahwa $f''(c) = 0$ jika dan hanya jika $c^2 + 3 = 0$ jika dan hanya jika $c^2 = -3$. Perhatikan bahwa tidak ada $c \in \mathbb{R}$ yang memenuhi persamaan $c^2 = -3$. Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa fungsi f tidak punya titik belok.

Sebagaimana yang sudah dibahas di **Bagian #2** dan **Bagian #3** daerah cekung fungsi f berada di sekitar titik ekstremnya. Karena fungsi f hanya punya 1 titik ekstrem, yaitu titik ekstrem lokal maksimum di interval $(-\infty, -\sqrt{3})$, maka kita dapat menyimpulkan bahwa kurva fungsi f cekung ke bawah di interval $(-\infty, -\sqrt{3})$.

#5. Asimtot-Asimtot Fungsi f .

Berdasarkan definisi $Domain(f)$, maka fungsi f memiliki 2 asimtot, yaitu $x = -\sqrt{3}$ dan $x = \sqrt{3}$.

#6. Gambar Sketsa Grafik Fungsi f .

Karena $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$ adalah titik ekstrem lokal fungsi f , maka ayo kita cari koordinatnya!

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}\right) &= 2 \cdot \left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}\right) + \ln\left(\left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}\right)^2 - 3\right) \\ &= -1 - \sqrt{13} + \ln\left(\frac{7 + \sqrt{13}}{2} - 3\right) \\ &\approx -1 - 3,6 + \ln\left(\frac{7 + 3,6}{2} - 3\right) \\ &= -4,6 + \ln(2,3) \\ &\text{Karena } \ln(e) = 1 \text{ dan } e \text{ sekitar } 2,76... \\ &\text{maka nilai } \ln(2,3) \text{ mungkin sekitar } 0,7... \\ &\approx -4,6 + 0,7 \\ &= -3,9 \end{aligned}$$

Supaya memudahkan: $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \approx \frac{-1 - 3,6}{2} = \frac{-4,6}{2} = -2,3$.

Jadi, $(-2,3 ; -3,9)$ kira-kira adalah koordinat titik ekstrem fungsi f .

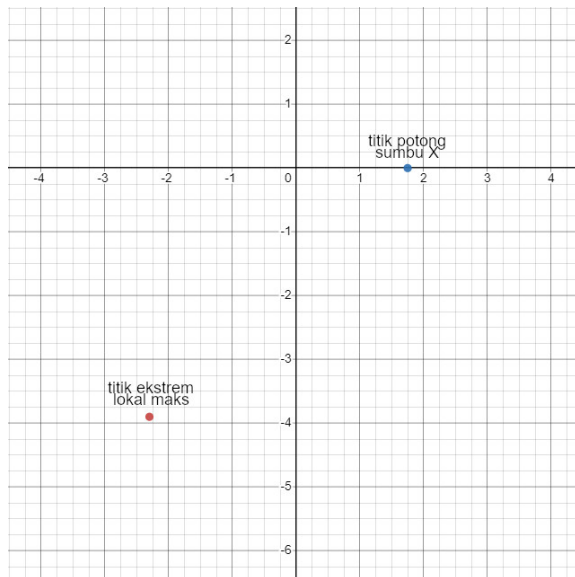
Lanjut kita cari titik potong kurva fungsi f dengan sumbu X.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff 2x + \ln(x^2 - 3) = 0 \\ &\iff \ln(x^2 - 3) = -2x \\ &\iff x^2 - 3 = e^{-2x} \\ &\iff x^2 - 3 = (e^{-2})^x \\ &\iff \text{Kira-kira mendekati } x^2 - 3 = (0,13)^x \\ &\iff \text{Kira-kira dipenuhi oleh } x = 1,75 \end{aligned}$$

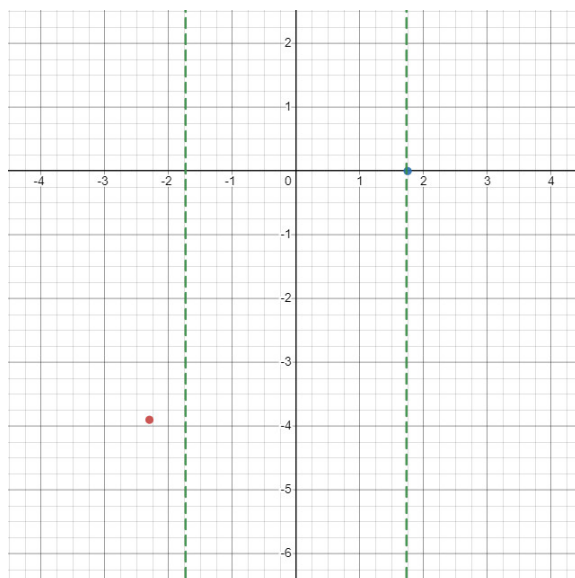
Jadi, $(1,75 ; 0)$ kira-kira adalah koordinat titik potong kurva fungsi f dengan sumbu X.

Oh iya, kurva fungsi f tidak memotong sumbu Y ya, karena $0 \notin \text{Domain}(f)$.

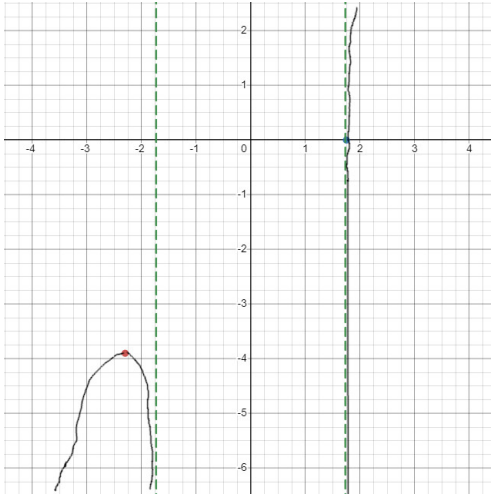
Oke! Ayo kita *plot* titik-titik yang diketahui di atas.



Kemudian kita gambar asimtot-asimtotnya.



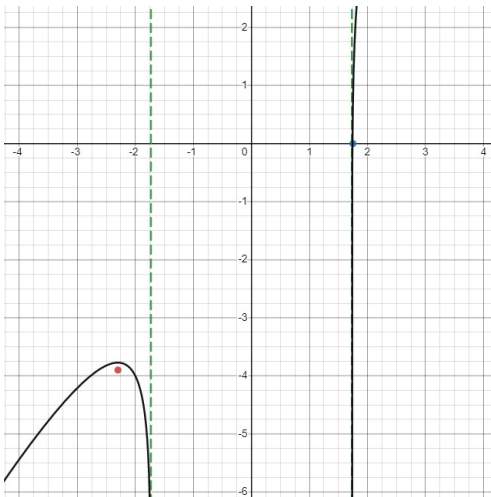
Setelah itu kita sketsa kurva fungsinya. Ingat! Kurva di $Domain(f)$ sebelah kiri itu cekung ke bawah (menganga ke bawah). Sementara kurva di $Domain(f)$ sebelah kanan itu teruss mendekati tak berhingga.



Haduuuh...

Hasil sketsaku jelek banget! Memang karena nggak bisa menggambar kurva yang bagus atau karena sudah kelelahan menghitung-hitung $\sqrt{13}$ dan $\sqrt{3}$ ya?

Anyway, karena zaman sudah modern, ayo kita pasrahkan saja sketsa grafik fungsi f kepada **Desmos Calculator**. Seperti inilah kira-kira wujud kurva fungsi $f(x) = 2x + \ln(x^2 - 3)$.



Gimana? Hampir mirip kan?

Hmmph... siapa suruh bikin fungsi pakai fungsi ln dan titik yang ada akarnya!



17

Ayo Kerjakan!

Ujian Akhir Semester

Soal Nomor 7

Soal

Perderetkan $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x-1}$ secara Maclaurin! Berikan deret Anda minimal sampai 4 suku!

Dikerjakan

Membuat deret minimal 4 suku toh? Jadi, ayo kita tentukan f' , f'' , dan f''' . Syukur-syukur kalau tenaganya masih kuat ditambah dengan f'''' dan f''''' .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} (f(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln(1-x)}{x-1} \right) \\ &= \frac{\frac{d}{dx} (\ln(1-x)) \cdot (x-1) - \frac{d}{dx} (x-1) \cdot \ln(1-x)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{1-x} \cdot -1 \cdot (x-1) - 1 \cdot \ln(1-x)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{\frac{1-x}{1-x} - \ln(1-x)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1 - \ln(1-x)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1 - \ln(1-x)}{(x-1)^2} \right) \\
&= \frac{\frac{d}{dx}(1 - \ln(1-x)) \cdot (x-1)^2 - \frac{d}{dx}((x-1)^2) \cdot (1 - \ln(1-x))}{((x-1)^2)^2} \\
&= \frac{\frac{-1}{1-x} \cdot -1 \cdot (x-1)^2 - \{2 \cdot (x-1) \cdot 1 \cdot (1 - \ln(1-x))\}}{(x-1)^4} \\
&= \frac{\frac{-1}{x-1} \cdot (x-1)^2 - 2 \cdot (x-1) \cdot (1 - \ln(1-x))}{(x-1)^4} \\
&= \frac{\frac{-1}{x-1} \cdot (x-1) - 2 \cdot (1 - \ln(1-x))}{(x-1)^3} \\
&= \frac{-1 - 2 + 2 \ln(1-x)}{(x-1)^3} \\
&= \frac{-3 + 2 \ln(1-x)}{(x-1)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= \frac{d}{dx}(f''(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{-3 + 2 \ln(1-x)}{(x-1)^3} \right) \\
&= \frac{\frac{d}{dx}(-3 + 2 \ln(1-x)) \cdot (x-1)^3 - \frac{d}{dx}((x-1)^3) \cdot (-3 + 2 \ln(1-x))}{((x-1)^3)^2} \\
&= \frac{\left(0 + 2 \left(\frac{1}{1-x} \cdot -1\right)\right) \cdot (x-1)^3 - (3 \cdot (x-1)^2 \cdot 1) \cdot (-3 + 2 \ln(1-x))}{(x-1)^6} \\
&= \frac{\frac{2}{x-1} \cdot (x-1) - 3 \cdot (-3 + 2 \ln(1-x))}{(x-1)^4} \\
&= \frac{2 + 9 - 6 \ln(1-x)}{(x-1)^4} \\
&= \frac{11 - 6 \ln(1-x)}{(x-1)^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''''(x) &= \frac{d}{dx}(f'''(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{11 - 6 \ln(1-x)}{(x-1)^4} \right) \\
&= \frac{\frac{d}{dx}(11 - 6 \ln(1-x)) \cdot (x-1)^4 - \frac{d}{dx}((x-1)^4) \cdot (11 - 6 \ln(1-x))}{((x-1)^4)^2} \\
&= \frac{\left(0 - 6 \left(\frac{1}{1-x} \cdot -1\right)\right) \cdot (x-1)^4 - (4 \cdot (x-1)^3 \cdot 1) \cdot (11 - 6 \ln(1-x))}{(x-1)^8} \\
&= \frac{\frac{-6}{x-1} \cdot (x-1) - 4 \cdot (11 - 6 \ln(1-x))}{(x-1)^5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-6 - 44 + 24 \ln(1-x)}{(x-1)^5} \\
&= \frac{-50 + 24 \ln(1-x)}{(x-1)^5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''''(x) &= \frac{d}{dx} (f''''(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{-50 + 24 \ln(1-x)}{(x-1)^5} \right) \\
&= \frac{\frac{d}{dx} (-50 + 24 \ln(1-x)) \cdot (x-1)^5 - \frac{d}{dx} ((x-1)^5) \cdot (-50 + 24 \ln(1-x))}{((x-1)^5)^2} \\
&= \frac{\left(0 + 24 \left(\frac{1}{1-x} \cdot -1\right)\right) \cdot (x-1)^5 - (5 \cdot (x-1)^4 \cdot 1) \cdot (-50 + 24 \ln(1-x))}{(x-1)^{10}} \\
&= \frac{\frac{24}{x-1} \cdot (x-1) - 5 \cdot (-50 + 24 \ln(1-x))}{(x-1)^6} \\
&= \frac{24 + 250 - 120 \ln(1-x)}{(x-1)^6} \\
&= \frac{274 - 120 \ln(1-x)}{(x-1)^6}
\end{aligned}$$

Fiih...

Setelah kita menentukan f' hingga f'''' , sekarang saatnya kita bentuk deret Mclaurin dengan 6 suku!

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{f(0)}{0!} x^0 + \frac{f'(0)}{1!} x^1 + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \frac{f''''(0)}{4!} x^4 + \frac{f''''''(0)}{5!} x^5 \\
&= \frac{1}{1} \cdot \frac{\ln(1-0)}{(0-1)} x^0 + \frac{1}{1} \cdot \frac{1 - \ln(1-0)}{(0-1)^2} x^1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-3 - 2 \ln(1-0)}{(0-1)^3} x^2 \\
&+ \frac{1}{6} \cdot \frac{11 - 6 \ln(1-0)}{(0-1)^4} x^3 + \frac{1}{24} \cdot \frac{-50 + 24 \ln(1-0)}{(0-1)^5} x^4 + \frac{1}{120} \cdot \frac{274 - 120 \ln(1-0)}{(0-1)^6} x^5 \\
&= \frac{\ln(1)}{-1} \cdot 1 + \frac{1 - \ln(1)}{1} x^1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-3 - 2 \ln(1)}{-1} x^2 \\
&+ \frac{1}{6} \cdot \frac{11 - 6 \ln(1)}{1} x^3 + \frac{1}{24} \cdot \frac{-50 + 24 \ln(1)}{-1} x^4 + \frac{1}{120} \cdot \frac{274 - 120 \ln(1)}{1} x^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{0}{-1} \cdot 1 + \frac{1-0}{1}x^1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-3-2 \cdot 0}{-1}x^2 \\
&+ \frac{1}{6} \cdot \frac{11-6 \cdot 0}{1}x^3 + \frac{1}{24} \cdot \frac{-50+24 \cdot 0}{-1}x^4 + \frac{1}{120} \cdot \frac{274-120 \cdot 0}{1}x^5 \\
&= 0 + \frac{1}{1}x^1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-3}{-1}x^2 \\
&+ \frac{1}{6} \cdot \frac{11}{1}x^3 + \frac{1}{24} \cdot \frac{-50}{-1}x^4 + \frac{1}{120} \cdot \frac{274}{1}x^5 \\
&= x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + \frac{50}{24}x^4 + \frac{274}{120}x^5
\end{aligned}$$

Eee... niatnya mau 6 suku, jadinya malah 5 suku.

Jadi deret Mclaurin fungsi $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x-1}$ adalah $x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + \frac{50}{24}x^4 + \frac{274}{120}x^5$.

■