Pembahasan Ujian Tengah Semester TA 2004/2005 untuk Mata Kuliah:

Aljabar Linear Elementer

Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Gadjah Mada
Yogyakarta

Mawi Wijna *

Marets 2021

*Walaupun pembahasan soal ujian ini belum tentu benar, akan tetapi semoga ada manfaatnya meskipun sedikit. Dibuat untuk mengisi waktu luang sambil menidurkan bayi. :p

Soal

1. Tentukan sistem persamaan linear homogen dengan dua persamaan di mana persamaan yang satu bukan merupakan kelipatan dari yang lain sedemikian hingga

   - $x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2$
   - $x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = -1$

   adalah penyelesaian dari sitem tersebut!

2. Setiap hari, seorang pasien harus mengonsumsi 5 mg vitamin A, 13 mg vitamin B, dan 23 mg vitamin C. Suatu apotek menyediakan 3 merek pil suplemen yang mengandung vitamin A, B, dan C sebagaimana yang tampak pada tabel di bawah.

	VITAMIN		
MEREK	A	B	C
I	1 mg	2 mg	4 mg
II	1 mg	1 mg	3 mg
III	0 mg	1 mg	1 mg

   (a) Tentukan semua kombinasi pil suplemen yang memenuhi kebutuhan harian dari pasien tersebut (pil harus utuh).

   (b) Jika harga pil merek I, II, III berturut-turut adalah \$0,9, \$0,6, dan \$1,5 per pil, maka tentukan pengobatan yang paling mahal!

3. Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

   (a) Selidiki apakah A *invertible*!

   (b) Jika A *invertible*, tentukanlah inversnya!

4. (a) Tunjukan bahwa persamaan garis g pada bidang yang melalui titik $P_1(a_1, b_1)$ dan $P_2(a_2, b_2)$ dapat dinyatakan dengan

$$g = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

   (b) Dengan menggunakan soal pada poin (a) di atas, tunjukan bahwa titik $P_1(a_1, b_1)$, $P_2(a_2, b_2)$, dan $P_3(a_3, b_3)$ berada dalam satu garis lurus, jika

$$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. (a) Tunjukan jika $P_1(a_1, b_1)$, $P_2(a_2, b_2)$, dan $P_3(a_3, b_3)$ tak segaris, maka

$$\text{Luas segitiga } P_1P_2P_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

   (b) Hitung luas segitiga yang dibentuk oleh titik $P_1(100, 1)$, $P_2(-10, 8)$, dan $P_3(1, 100)$!

6. Misalkan $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k,$ dan l merupakan digit angka yang nilainya dapat berupa 1,2,3,... hingga 9. Kemudian, dari $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k,$ dan l tersebut dibentuk bilangan abc, def, ghi, dan jkl.

   Jika abc, def, ghi, dan jkl habis dibagi 7, buktikan bahwa

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+j & e+k & f+l \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

   juga habis dibagi 7.

Pembahasan Soal Nomor 1

Soal
Tentukan sistem persamaan linear homogen dengan dua persamaan di mana persamaan yang satu bukan merupakan kelipatan dari yang lain sedemikian hingga

- $x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2$
- $x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = -1$

adalah penyelesaian dari sitem tersebut!

Pembahasan
Misalkan

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 &= 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 &= 0 \end{cases}$$

adalah sistem persamaan linear homogen yang memiliki penyelesaian:

- $x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2$
- $x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = -1$

Itu artinya:

- $a_1(1) + a_2(-1) + a_3(1) + a_4(2) \ = \ 0$
- $b_1(1) + b_2(-1) + b_3(1) + b_4(2) \ = \ 0$

- $a_1(2) + a_2(0) + a_3(3) + a_4(-1) \ = \ 0$
- $b_1(2) + b_2(0) + b_3(3) + b_4(-1) \ = \ 0$

Nah, tugas kita sekarang adalah menemukan nilai a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, dan b_4 sehingga persamaan linear homogen di atas menjadi sempurna.

***

Kita fokus dulu mencari nilai dari a_1, a_2, a_3, dan a_4, sehingga persamaan linear homogen:

- $a_1(1) + a_2(-1) + a_3(1) + a_4(2) \ = \ 0$, dan
- $a_1(2) + a_2(0) + a_3(3) + a_4(-1) \ = \ 0$

berlaku benar.

Perhatikan bahwa dua persamaan linear homogen di atas dapat diubah menjadi bentuk perkalian matriks seperti berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{... \textbf{(pers-1)}}$$

Kita notasikan matriks $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ pada persamaan di atas sebagai K.

Selanjutnya, kita akan mengubah matriks K menjadi **matriks eselon baris tereduksi** untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Berikut adalah urutan rangkaian operasi baris elementer yang dioperasikan pada matriks K sehingga pada akhirnya menghasilkan martiks eselon baris tereduksi.

1. Langkah ke-1: Baris ke-2 = Baris ke-2 $-$ (2 $\times$ Baris ke-1).
2. Langkah ke-2: Baris ke-2 = Baris ke-2 dibagi 2.
3. Langkah ke-3: Baris ke-1 = Baris ke-1 + Baris ke-2.

Matriks eselon baris tereduksi yang kita peroleh setelah melakukan serangkaian operasi baris elementer di atas pada K secara berurutan adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -5/2 \end{bmatrix}$.
Kita notasikan matriks eselon baris tereduksi tersebut sebagai K'.

Dengan demikian, **(pers-1)** di atas akan menjadi seperti ini.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{... } \textbf{(pers-2)}$$

Dengan menyelesaian perkalian matriks di atas, kita akan memperoleh hasil:

- $a_1 + \frac{3}{2}a_3 - \frac{1}{2}a_4 \; = \; 0$
- $a_2 + \frac{1}{2}a_3 - \frac{5}{2}a_4 \; = \; 0$

Atau dengan kata lain:

- $a_1 = \dfrac{s - 3r}{2}$
- $a_2 = \dfrac{5s - r}{2}$
- $a_3 = r$
- $a_4 = s$

untuk sebarang $r, s \in \mathbb{R}$.

***

Dengan persamaan

$$a_1 = \frac{s - 3r}{2}\ ,\ a_2 = \frac{5s - r}{2},\ a_3 = r, \text{ dan } a_4 = s, \text{ untuk sebarang } r, s \in \mathbb{R}$$

yang sudah kita peroleh sebelumnya, kita dapat menentukan a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, dan b_4 yang diinginkan soal.

Soal menginginkan agar persamaan yang satu bukan merupakan kelipatan dari yang lain. Ini bisa kita lakukan dengan menentukan (r_1, s_1) dan (r_2, s_2) yang bukan kelipatan satu sama lain.

Misalkan kita pilih $(r_1, s_1) = (5, 1)$ dan $(r_2, s_2) = (1, 7)$. Jelas bahwa $(5, 1)$ bukan kelipatan dari $(1, 7)$.

Kita gunakan $r_1 = 5$ dan $s_1 = 1$ untuk menentukan a_1, a_2, a_3, dan a_4 sebagaimana berikut ini.

- $a_1 = \dfrac{s_1 - 3r_1}{2} = \dfrac{1 - 3(5)}{2} = \dfrac{1 - 15}{2} = \dfrac{-14}{2} = -7$
- $a_2 = \dfrac{5(s_1) - r_1}{2} = \dfrac{5(1) - 5}{2} = \dfrac{5 - 5}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$
- $a_3 = r_1 = 5$
- $a_4 = s_1 = 1$

Persamaan linear homogen pertama yang diperoleh adalah:

$$-7x_1 \; + \; 5x_3 \; + \; x_4 \; = \; 0$$

Selanjutnya, kita gunakan $r_2 = 1$ dan $s_2 = 7$ untuk menentukan b_1, b_2, b_3, dan b_4 sebagaimana berikut ini.

- $b_1 = \dfrac{s_2 - 3r_2}{2} = \dfrac{7 - 3(1)}{2} = \dfrac{7 - 3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$
- $b_2 = \dfrac{5(s_2) - r_2}{2} = \dfrac{5(7) - 1}{2} = \dfrac{35 - 1}{2} = \dfrac{34}{2} = 17$
- $b_3 = r_2 = 1$
- $b_4 = s_2 = 7$

Persamaan linear homogen kedua yang diperoleh adalah:

$$2x_1 \ + \ 17x_2 \ + \ x_3 \ + \ 7x_4 \ = \ 0$$

Jadi diperoleh

$$\begin{cases} -7x_1 + 5x_3 + x_4 \ = \ 0 \\ 2x_1 + 17x_2 + x_3 + 7x_4 \ = \ 0 \end{cases}$$

sebagai sistem persamaan linear homogen yang memiliki penyelesaian:

- $x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2$
- $x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = -1$

dengan kedua persamaan linear homogen tersebut bukan kelipatan satu dengan lainnya.

Pembahasan Soal Nomor 2

Soal
Setiap hari, seorang pasien harus mengonsumsi 5 mg vitamin A, 13 mg vitamin B, dan 23 mg vitamin C. Suatu apotek menyediakan 3 merek pil suplemen yang mengandung vitamin A, B, dan C sebagaimana yang tampak pada tabel di bawah.

MEREK	VITAMIN A	VITAMIN B	VITAMIN C
I	1 mg	2 mg	4 mg
II	1 mg	1 mg	3 mg
III	0 mg	1 mg	1 mg

(a) Tentukan semua kombinasi pil suplemen yang memenuhi kebutuhan harian dari pasien tersebut (pil harus utuh).

(b) Jika harga pil merek I, II, III berturut-turut adalah \$0,9, \$0,6, dan \$1,5 per pil, maka tentukan pengobatan yang paling mahal!

Pembahasan
Dari penjelasan soal dan tabel di atas, apotek menyediakan 3 merek pil suplemen yaitu Merek I, Merek II, dan Merek III, dengan kandungan vitamin seperti berikut.

- Pil Suplemen Merek I mengandung: 1 mg Vitamin A, 2 mg Vitamin B, dan 4 mg Vitamin C.
  Harga satu pilnya \$0,9.
- Pil Suplemen Merek II mengandung: 1 mg Vitamin A, 1 mg Vitamin B, dan 3 mg Vitamin C.
  Harga satu pilnya \$0,6.
- Pil Suplemen Merek III mengandung: 1 mg Vitamin B dan 1 mg Vitamin C.
  Harga satu pilnya \$1,5.

Si pasien harus mengonsumsi pil dalam bentuk utuh. Jadi, si pasien harus mengonsumsi sebanyak 1,2,3,4.. dst pil. Pasien tidak boleh mengonsumsi hanya 1/2, 1/3, 1/4, dst... dari pil tersebut.

Kita misalkan:

- x menyatakan jumlah pil suplemen Merek I yang dikonsumsi si pasien.
- y menyatakan jumlah pil suplemen Merek II yang dikonsumsi si pasien.
- z menyatakan jumlah pil suplemen Merek III yang dikonsumsi si pasien.

Karena setiap hari si pasien harus mengonsumsi 5 mg vitamin A, maka:

$$5 \text{ mg} = \Big(\text{jumlah pil suplemen Merek I yang dikonsumsi si pasien} \times \text{kandungan vitamin A di pil suplemen Merek I}\Big) + \Big(\text{jumlah pil suplemen Merek II yang dikonsumsi si pasien} \times \text{kandungan vitamin A di pil suplemen Merek II}\Big) + \Big(\text{jumlah pil suplemen Merek III yang dikonsumsi si pasien} \times \text{kandungan vitamin A di pil suplemen Merek III}\Big)$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned} 5 \text{ mg} &= x(1) + y(1) + z(0) \\ &= x + y + 0 \\ &= x + y \end{aligned} \tag{1}$$

Jadi, kita peroleh 5 mg vitamin A $= x + y$.

Selanjutnya, kita juga tahu bahwa setiap hari si pasien harus mengonsumsi 13 mg vitamin B. Dengan cara serupa seperti di atas kita akan memperoleh:

13 mg vitamin B $= 2x + y + z$.

Terakhir, kita tahu bahwa bahwa setiap hari si pasien harus mengonsumsi 23 mg vitamin C. Dengan cara serupa seperti di atas kita akan memperoleh:

23 mg vitamin C $= 4x + 3y + z$.

***

Dari, bagian di atas kita akan memiliki 3 persamaan sebagaimana berikut.

- 5 mg vitamin A $= x + y$
- 13 mg vitamin B $= 2x + y + z$
- 23 mg vitamin C $= 4x + 3y + z$

Tiga persamaan di atas apabila disajikan dalam bentuk matrik augmentasi akan menjadi seperti ini.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 13 \\ 4 & 3 & 1 & 23 \end{array}\right]$$

Dengan serangkaian operasi baris elementer, matriks augmentasi di atas dapat kita ubah menjadi bentuk eselon baris tereduksi seperti di bawah ini.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

Dengan demikian kita akan memperoleh persamaan seperti berikut.

- $x + y = 5$
- $x + z = 8$

Atau dengan kata lain seperti ini. $*part_1$

- $y = 5 - x$
- $z = 8 - x$

Ingat, bahwa nilai x, y, dan z tidak boleh pecahan alias harus berupa bilangan bulat. Bilangan bulatnya pun harus ≥ 0, karena mana mungkin jumlah pil suplemen yang dikonsumsi bernilai negatif kan? Atas, syarat nilai x, y, dan z ini, kita akan memperoleh:

- $x \geq 0$
- $y \geq 0$ jika dan hanya jika $x =$ 0,1,2,3,4, atau 5.
- $z \geq 0$ jika dan hanya jika $x =$ 0,1,2,3,4,6,7, atau 8.

Dari ketiga syarat di atas, jika diiriskan akan diperoleh

$$x = 0{,}1{,}2{,}3{,}4, \text{ atau } 5.$$

artinya adalah

> Jumlah pil suplemen Merek I yang dikonsumsi oleh si pasien dapat berjumlah 0,1,2,3,4, atau 5 pil.

Jangan lupa, jumlah pil suplemen Merek II dan Merek III yang dikonsumsi oleh si pasien bergantung dari jumlah pil suplemen Merek I yang dikonsumsinya! (Lihat $*part_1$ di atas)

Kita akan memperoleh beberapa kemungkinan kombinasi paket pil suplemen yang dikonsumsi oleh si pasien seperti berikut.

1. Paket-1 = 0 pil Merk I + 5 pil Merek II + 8 pil Merek III.
2. Paket-2 = 1 pil Merk I + 4 pil Merek II + 7 pil Merek III.
3. Paket-3 = 2 pil Merk I + 3 pil Merek II + 6 pil Merek III.
4. Paket-4 = 3 pil Merk I + 2 pil Merek II + 5 pil Merek III.
5. Paket-5 = 4 pil Merk I + 1 pil Merek II + 4 pil Merek III.
6. Paket-6 = 5 pil Merk I + 0 pil Merek II + 3 pil Merek III.

Karena harga 1 pil Merek I, Merek II, dan Merek III berturut-turut adalah \$0,9, \$0,6, dan \$1,5, maka harga per paket di atas akan seperti ini.

1. Harga Paket-1 $= (0 \times \$0{,}9) + (5 \times \$0{,}6) + (8 \times \$1{,}5) = \$15$. $paling - mahal$
2. Harga Paket-2 $= (1 \times \$0{,}9) + (4 \times \$0{,}6) + (7 \times \$1{,}5) = \$13,8$.
3. Harga Paket-3 $= (2 \times \$0{,}9) + (3 \times \$0{,}6) + (6 \times \$1{,}5) = \$12,6$.
4. Harga Paket-4 $= (3 \times \$0{,}9) + (2 \times \$0{,}6) + (5 \times \$1{,}5) = \$11,4$.
5. Harga Paket-5 $= (4 \times \$0{,}9) + (1 \times \$0{,}6) + (4 \times \$1{,}5) = \$10,2$.
6. Harga Paket-6 $= (5 \times \$0{,}9) + (0 \times \$0{,}6) + (3 \times \$1{,}5) = \$9$.

Pembahasan Soal Nomor 3

Soal
Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

(a) Selidiki apakah A *invertible*!

(b) Jika A *invertible*, tentukanlah inversnya!

Pembahasan
Agar tidak banyak membuang waktu dan tenaga, untuk menyelidiki apakah A invertibel sekaligus menyelidiki pula seperti apakah inversnya (bila invertibel) adalah dengan cara meng-*augment*-kan A dengan matriks identitas berukuran 4×4. Kemudian, serangkaian operasi baris elementer dilakukan pada matriks augmentasi tersebut dengan tujuan mengubah A menjadi matriks identitas. Matriks invers dari A adalah hasil pada matriks augmentasi di sisi kanan (yang semula adalah matriks identitas).

Oke, kita punya

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \text{ dan matriks identitas } 4 \times 4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kedua matriks tersebut di-*augment*-kan menjadi

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Lanjut kita melakukan operasi baris elementer pada matriks yang di-*augment*-kan tersebut dengan tujuan supaya matriks A yang berada di sisi kiri menjadi matriks identitas.

1. **OBE Langkah ke-1**
   Baris ke-1 dan baris ke-2 ditukar posisinya.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{menjadi}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. **OBE Langkah ke-2**
   Baris ke-2 dan baris ke-3 ditukar posisinya.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{menjadi}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

3. **OBE Langkah ke-3**
   Baris ke-2 dikalikan dengan -1.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{menjadi}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

4. **OBE Langkah ke-4**
   Baris ke-3 dibagi 2.

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{menjadi}} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

5. **OBE Langkah ke-5**
   Baris ke-2 ditambahkan dengan (3$\times$ Baris ke-3).

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{menjadi}} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

6. **OBE Langkah ke-6**
   Baris ke-4 dikurangi dengan (2$\times$ Baris ke-1).

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{menjadi}} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -5 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

7. **OBE Langkah ke-7**
   Baris ke-4 dikurangi dengan Baris ke-2.

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -5 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{menjadi}} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -3/2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

8. **OBE Langkah ke-8**
   Baris ke-4 dikurangi dengan (5$\times$ Baris ke-3).

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -3/2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{menjadi}} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -4 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

9. **OBE Langkah ke-9**
   Baris ke-4 dibagi dengan $-1/5$.

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -4 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{menjadi}} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/5 & 2/5 & -1/5 & -1/5 \end{array}\right]$$

10. **OBE Langkah ke-10**
    Baris ke-1 dikurangi dengan Baris ke-4.

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/5 & 2/5 & -1/5 & -1/5 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{menjadi}} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -4/5 & 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/5 & 2/5 & -1/5 & -1/5 \end{array}\right]$$

Pada langkah ke-10 di atas, ternyata matriks A yang berada di sisi kiri matriks *augmented* telah berubah menjadi matriks identitas berukuran 4×4. Dengan demikian, matriks A adalah matriks yang invertibel, yaitu matriks yang memiliki invers.

Invers dari matriks A sendiri tidak lain adalah matriks yang berada di sisi kanan dari matriks *augmented*, yaitu $\begin{bmatrix} -4/5 & 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 4/5 & 2/5 & -1/5 & -1/5 \end{bmatrix}$.

Pembahasan Soal Nomor 4

Soal

(a) Tunjukan bahwa persamaan garis lurus g pada bidang yang melalui titik $P_1(a_1, b_1)$ dan $P_2(a_2, b_2)$ dapat dinyatakan dengan

$$g = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(b) Dengan menggunakan soal pada poin (a) di atas, tunjukan bahwa titik $P_1(a_1, b_1)$, $P_2(a_2, b_2)$, dan $P_3(a_3, b_3)$ berada dalam satu garis lurus, jika

$$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pembahasan
Persamaan garis lurus yang melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) dengan $x_1 \neq x_2$ kan bisa dinyatakan dengan rumus:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1).$$

Jadi, persamaan garis lurus yang melalui titik $P_1(a_1, b_1)$ dan $P_2(a_2, b_2)$ dengan $a_1 \neq a_2$ adalah:

$$y - b_1 = \left(\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}\right)(x - a_1).$$

Persamaan di atas bisa kita jabarkan menjadi seperti ini.

$$\begin{aligned}
y - b_1 = \left(\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}\right)(x - a_1) &\iff (y - b_1)(a_2 - a_1) = (b_2 - b_1)(x - a_1) \\
&\iff (y - b_1)(a_2 - a_1) - (b_2 - b_1)(x - a_1) = 0 \\
&\iff (y - b_1)(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)(a_1 - x) = 0 \\
&\iff ya_2 - ya_1 - b_1a_2 + b_1a_1 \;+\; b_2a_1 - b_2x - b_1a_1 + b_1x = 0 \\
&\iff ya_2 - ya_1 \;-\; b_2x + b_1x \;+\; b_1a_1 - b_1a_1 \;+\; b_2a_1 - b_1a_2 = 0 \\
&\iff y(a_2 - a_1) \;-\; x(b_2 - b_1) \;-\; 0 \;+\; b_2a_1 - b_1a_2 = 0 \\
&\iff y(a_2 - a_1) \;-\; x(b_2 - b_1) \;+\; (b_2a_1 - b_1a_2) = 0 \\
&\iff y\begin{vmatrix} a_2 & 1 \\ a_1 & 1 \end{vmatrix} \;-\; x\begin{vmatrix} b_2 & 1 \\ b_1 & 1 \end{vmatrix} \;+\; \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} y & x & 1 \\ b_2 & a_2 & 1 \\ b_1 & a_1 & 1 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Kita memperoleh hasil $\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ b_2 & a_2 & 1 \\ b_1 & a_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Padahal matriks di soal adalah $\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{bmatrix}$

Ingat bahwa memindah baris atau kolom pada suatu matriks akan menyebabkan dari determinan matriks tersebut berubah tanda (positif/negatif).

Untuk membuat matriks $\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{bmatrix}$ dari $\begin{bmatrix} y & x & 1 \\ b_2 & a_2 & 1 \\ b_1 & a_1 & 1 \end{bmatrix}$, kita perlu menukar posisi kolom ke-1 dengan kolom ke-2, dilanjutkan dengan menukar posisi baris ke-2 dengan baris ke-3. Total kita melakukan 2 operasi elementer pada matriks awal. Sehingga dengan demikian, nilai determinan matriks hasil adalah $(-1)^2\times$ determinan matriks awal. Karena $(-1)^2 = 1$, maka determinan matriks awal dan matriks hasil adalah sama.

Jadi, dengan demikian $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & 1 \\ b_2 & a_2 & 1 \\ b_1 & a_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

***

Untuk persamaan garis lurus yang melalui titik $P_1(a_1, b_1)$ dan $P_2(a_2, b_2)$ dengan $a_1 = a_2 = a$ jelas adalah $x = a$.

Ingat juga lho! Jika $a_1 = a_2$, maka b_1 harus berbeda dengan b_2. Lha, kalau $a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$, itu artinya cuma ada 1 titik dong? Mana bisa dibuat garis lurus?

Jika titik $P_1(a, b_1)$ dan $P_2(a, b_2)$ dijadikan entri-entri dari matriks $\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ a & b_1 & 1 \\ a & b_2 & 1 \end{bmatrix}$ kemudian dicari nilai determinannya akan diperoleh:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ a & b_1 & 1 \\ a & b_2 & 1 \end{bmatrix} &= x(b_1 - b_2) - y(a - a) + a(b_2 - b_1) \\ &= x(b_1 - b_2) - 0 + a(b_2 - b_1) \\ &= x(b_1 - b_2) - a(b_1 - b_2) \end{aligned}$$

Jika $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b_1 & 1 \\ a & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ kita akan memperoleh persamaan $x(b_1 - b_2) - a(b_1 - b_2) = 0$.
Atau dengan kata lain:

$$\begin{aligned} x(b_1 - b_2) - a(b_1 - b_2) = 0 &\iff x(b_1 - b_2) = a(b_1 - b_2) \\ &\iff x = a \end{aligned}$$

Jadi, terbukti benar bahwa $g = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ merupakan persamaan untuk garis lurus g yang melewati titik $P_1(a_1, b_1)$ dan $P_2(a_2, b_2)$.

***

Untuk soal poin (b) ini jelas sekali ya.

Apabila semua titik $P_1(a_1, b_1)$, $P_2(a_2, b_2)$, dan $P_3(a_3, b_3)$ terletak pada suatu garis lurus g, maka sesuai soal poin (a) yang sudah kita buktikan di atas, persamaan di bawah akan berlaku benar.

$$g = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Perhatikan bahwa x dan y pada persamaan di atas adalah peubah bebas. Jika nilainya disubstitusi dengan sebarang titik (x_0, y_0) yang terletak pada garis g, maka persamaan

- $y_0 - b_1 = \left(\dfrac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}\right)(x_0 - a_1)$ akan berlaku benar, untuk garis g yang tidak berbentuk garis vertikal.
- $x = x_0 = a_1 = a_2$ akan berlaku benar, untuk garis g yang berbentuk garis vertikal.

Dengan demikian, akan berlaku $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Jika titik (x_0, y_0) diganti notasi dengan $P_3(a_3, b_3)$, akan diperoleh $\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Pembahasan Soal Nomor 5

Soal

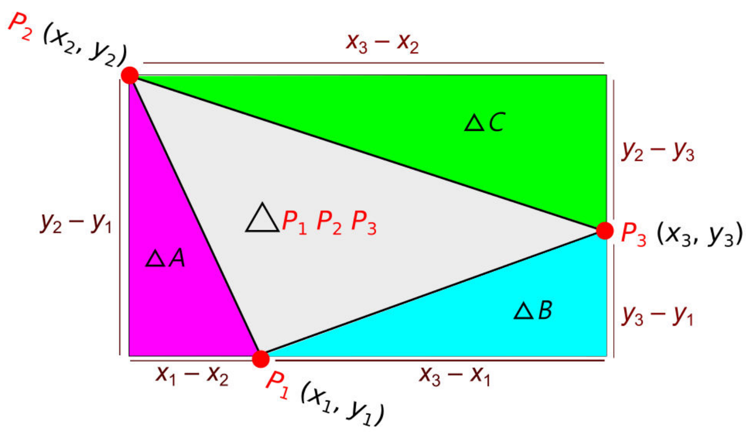
(a) Tunjukan jika $P_1(a_1, b_1)$, $P_2(a_2, b_2)$, dan $P_3(a_3, b_3)$ tak segaris, maka

$$\text{Luas segitiga } P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

(b) Hitung luas segitiga yang dibentuk oleh titik $P_1(100, 1)$, $P_2(-10, 8)$, dan $P_3(1, 100)$!

Pembahasan

Dengan sebarang titik $P_1(a_1, b_1)$, $P_2(a_2, b_2)$, dan $P_3(a_3, b_3)$, kita bisa meng-*assign* titik (a_i, b_i) ke (x_j, y_j) sehingga membentuk segitiga seperti skestsa di bawah ini.



Perhatikan bahwa

$$\text{Luas } \triangle P_1P_2P_3 = \text{Luas Persegi} - \text{Luas } \triangle A - \text{Luas } \triangle B - \text{Luas } \triangle C$$

Dari skesta kita tahu bahwa:

- Luas Persegi $= (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$.
- Luas $\triangle A = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(y_2 - y_1)$.
- Luas $\triangle B = \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_3 - y_1)$.
- Luas $\triangle C = \frac{1}{2}(x_3 - x_2)(y_2 - y_3)$.

Persamaan empat luas di atas dijabarkan menjadi seperti ini.

- Luas Persegi $= x_3y_2 - x_3y_1 - x_2y_2 + x_2y_1$.
- Luas $\triangle A = \frac{1}{2}\,(x_1y_2 - x_1y_1 - x_2y_2 + x_2y_1)$.
- Luas $\triangle B = \frac{1}{2}\,(x_3y_3 - x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_1)$.
- Luas $\triangle C = \frac{1}{2}\,(x_3y_2 - x_3y_3 - x_2y_2 + x_2y_3)$.

Kemudian semua luas segitiga dijumlahkan.

$$\begin{aligned}\text{Luas } \triangle A + \text{Luas } \triangle B + \text{Luas } \triangle C = \frac{1}{2}\Big(&x_1y_2 - x_1y_1 - x_2y_2 + x_2y_1 \\ &+ x_3y_3 - x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_1 \\ &+ x_3y_2 - x_3y_3 - x_2y_2 + x_2y_3\Big)\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa yang berwarna biru bisa kita jumlahkan. Sedangkan yang berwarna merah bisa kita hilangkan. Persamaan di atas akan menjadi:

$$\begin{aligned}\text{Luas } \triangle A + \text{Luas } \triangle B + \text{Luas } \triangle C = \frac{1}{2}\Big(&x_1y_2 - 2x_2y_2 + x_2y_1 \\ &- x_3y_1 - x_1y_3 \\ &+ x_3y_2 + x_2y_3\Big)\end{aligned}$$

Karena:

$$\begin{aligned}\text{Luas } \triangle P_1P_2P_3 &= \text{Luas Persegi} - \text{Luas } \triangle A - \text{Luas } \triangle B - \text{Luas } \triangle C \\ &= \text{Luas Persegi} - \Big(\text{Luas } \triangle A + \text{Luas } \triangle B + \text{Luas } \triangle C\Big).\end{aligned}$$

Jadi kita masukkan saja yang sudah kita ketahui di atas.

$$\begin{aligned}\text{Luas } \triangle P_1P_2P_3 &= x_3y_2 - x_3y_1 - x_2y_2 + x_2y_1 - \frac{1}{2}\Big(x_1y_2 - 2x_2y_2 + x_2y_1 - x_3y_1 - x_1y_3 + x_3y_2 + x_2y_3\Big) \\ &= (x_3y_2 - \frac{1}{2}x_3y_2) + (-x_3y_1 + \frac{1}{2}x_3y_1) + (-x_2y_2 + x_2y_2) + (x_2y_1 - \frac{1}{2}x_2y_1) - \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_1y_3 - \frac{1}{2}x_2y_3 \\ &= \frac{1}{2}x_3y_2 - \frac{1}{2}x_3y_1 + 0 + \frac{1}{2}x_2y_1 - \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_1y_3 - \frac{1}{2}x_2y_3 \\ &= \left(\frac{1}{2}x_3y_2 - \frac{1}{2}x_3y_1\right) \; - \; \left(\frac{1}{2}x_2y_3 - \frac{1}{2}x_2y_1\right) \; + \; \left(\frac{1}{2}x_1y_3 - \frac{1}{2}x_1y_2\right) \\ &= \frac{1}{2}\Bigg((x_3y_2 - x_3y_1) \; - \; (x_2y_3 - x_2y_1) \; + \; (x_1y_3 - x_1y_2)\Bigg) \\ &= \frac{1}{2}\Bigg(x_3\,(y_2 - y_1) \; - \; x_2\,(y_3 - y_1) \; + \; x_1\,(y_3 - y_2)\Bigg) \\ &= \frac{1}{2}\left(x_3\begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 1 & 1\end{vmatrix} \; - \; x_2\begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ 1 & 1\end{vmatrix} \; + \; x_1\begin{vmatrix} y_3 & y_2 \\ 1 & 1\end{vmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & x_2 & x_1 \\ y_3 & y_2 & y_1 \\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} \\ &\text{Ingat bahwa determinan } A = \text{ determinan } A^T, \text{ sehingga:} \\ &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1\end{vmatrix}\end{aligned}$$

***

Untuk menghitung luas segitiga yang dibentuk oleh titik $P_1(100, 1)$, $P_2(-10, 8)$, dan $P_3(1, 100)$, tinggal kita masukkan saja angka-angka tersebut ke rumus di bawah.

$$\begin{aligned}\text{Luas } \triangle P_1P_2P_3 &= \frac{1}{2}\Bigg(x_3\,(y_2 - y_1) \; - \; x_2\,(y_3 - y_1) \; + \; x_1\,(y_3 - y_2)\Bigg) \\ &= \frac{1}{2}\Bigg(1\,(8 - 1) \; - \; (-10)\,(100 - 1) \; + \; 100\,(100 - 8)\Bigg) \\ &= \frac{1}{2}\Bigg(1 \cdot 7 \; + \; 10 \cdot 99 \; + \; 100 \cdot 92\Bigg) \\ &= \frac{1}{2}\Bigg(7 \; + \; 990 \; + \; 9200\Bigg) \\ &= \frac{10197}{2}\end{aligned}$$

Pembahasan Soal Nomor 6

Soal

Misalkan $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$, dan l merupakan digit angka yang nilainya dapat berupa 1,2,3,... hingga 9. Kemudian, dari $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$, dan l tersebut dibentuk bilangan abc, def, ghi, dan jkl.

Jika abc, def, ghi, dan jkl habis dibagi 7, buktikan bahwa

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+j & e+k & f+l \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

juga habis dibagi 7.

Pembahasan

Misalkan $abc = 715$ itu berarti $a = 7$, $b = 1$, dan $c = 5$ ya!
Dari sini kita juga dapat menyimpulkan bahwa $abc = (100 \cdot a) + (10 \cdot b) + (1 \cdot c)$.
Hal yang sama juga berlaku untuk def, ghi, dan jkl.

Kemudian jangan lupa juga dengan sifat determinan berikut.

Jika A adalah matriks persegi berukuran $n \times n$ dan r adalah suatu konstanta, maka $det(rA) = r^n \cdot det(A)$.

Sebetulnya sifat di atas itu bisa digeneralisasi seperti ini.

Jika:

- A adalah matriks persegi berukuran $n \times n$,
- $A = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & ... & k_n \end{bmatrix}$, k_n adalah vektor kolom berukuran $n \times 1$, dan
- $r_1, r_2, ..., r_n$ adalah konstanta-konstanta.

maka $\begin{vmatrix} r_1k_1 & r_2k_2 & ... & r_nk_n \end{vmatrix} = (r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot ... \cdot r_n) \cdot det(A)$.

Contoh:

Misal $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Dengan mudah kita dapat menghitung determinan A sebagai berikut.

$$\begin{aligned} det(A) &= (3)(-8-1) - (-1)(4-(-1)) + (2)(1-(2)) \\ &= (3)(-9) + (4+1) + (2)(-1) \\ &= -27 + 5 - 2 \\ &= -24 \end{aligned}$$

Kemudian misal kita bentuk matriks A' yaitu matriks A dengan kolom pertamanya dikalikan -2 dan kolom ketiganya dikalikan 3.

$A' = \begin{bmatrix} -6 & -1 & 6 \\ -2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 12 \end{bmatrix}$. Determinan dari A' adalah seperti berikut ini.

$$\begin{aligned} det(A') &= (-6)(-24-3) - (-1)(-24-6) + (6)(-2-(-4)) \\ &= (-6)(-27) + (-30) + (6)(-2+4) \\ &= 162 - 30 + 12 \\ &= 144 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $det(A') = (-2 \cdot 3) \cdot det(A)$.

***

Selanjutnya, jangan lupa dengan teorema operasi kolom elementer berikut.

Jika A adalah matriks persegi berukuran $n \times n$ dan A' merupakan matriks hasil operasi kolom elementer tipe ke-3 dari A, maka determinan A dan determinan A' adalah **sama**.

Yang dimaksud dengan operasi kolom elementer tipe ke-3 itu tidak lain adalah menjumlahkan suatu kolom dengan kelipatan kolom lainnya.

***

Oke! Setelah menjabarkan teorema dan sifat yang bakal dipergunakan, kita akan mulai menunjukkan bahwa $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+j & e+k & f+l \\ g & h & i \end{vmatrix}$ habis dibagi 7!

Pertama-tama, kita sebut $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d+j & e+k & f+l \\ g & h & i \end{bmatrix}$ sebagai matriks A. Kemudian kita akan melakukan serangkaian operasi berikut secara berurutan.

1. **Operasi ke-1:**
   Kita bentuk matriks A'_1 yang diperoleh dengan mengalikan kolom pertama pada matriks A dengan 100 seperti di bawah ini.

$$A'_1 = \begin{bmatrix} a00 & b & c \\ d00+j00 & e+k & f+l \\ g00 & h & i \end{bmatrix}$$

   Penulisan entri pada kolom pertama memang seperti itu ya, dikarenakan $a, b, c, ..., i$ itu kan adalah sebarang angka dari 1,2,3 hingga 9. Semisal $a = 4$, jadi ya $a00$ itu $= 400$. Dari sini mengerti ya!

   Sesuai sifat determinan matriks yang sudah disinggung di bagian teratas pembahasan berlaku ini.

$$det(A'_1) = 100 \cdot det(A)$$

2. **Operasi ke-2:**
   Selanjutnya, kita bentuk matriks A'_2 yang diperoleh dengan melakukan operasi kolom elementer tipe ke-3 pada kolom pertama matriks A'_1 dengan rumus seperti di bawah ini.

   Kolom pertama matriks A'_2 = Kolom pertama matriks A'_1 + (10 × Kolom kedua matriks A'_1).

$$A'_2 = \begin{bmatrix} ab0 & b & c \\ de0+jk0 & e+k & f+l \\ gh0 & h & i \end{bmatrix}$$

   Jangan salah ya! Kolom kedua matriks A'_1 itu kan $\begin{bmatrix} b \\ e+k \\ h \end{bmatrix}$. Jika kolom tersebut dikali dengan 10, hasilnya kan $\begin{bmatrix} b0 \\ e0+k0 \\ h0 \end{bmatrix}$.

   Perkara $d00 + j00 + (e0 + k0)$ menjadi $de0 + jk0$ itu kan jelas diperoleh menggunakan sifat asosiatif dan komutatifnya sistem bilangan Real.

   Sesuai sifat determinan matriks terkait operasi kolom elementer, kan bakal berlaku ini.

$$det(A'_2) = det(A'_1) = 100 \cdot det(A)$$

3. **Operasi ke-3:**
   Selanjutnya, kita bentuk matriks A'_3 yang diperoleh dengan melakukan operasi kolom elementer tipe ke-3 pada kolom pertama matriks A'_2 dengan rumus seperti di bawah ini.

   Kolom pertama matriks A'_3 = Kolom pertama matriks A'_2 + (1 × Kolom ketiga matriks A'_2).

$$A'_3 = \begin{bmatrix} abc & b & c \\ def+jkl & e+k & f+l \\ ghi & h & i \end{bmatrix}$$

   Sesuai sifat determinan matriks terkait operasi kolom elementer, kan bakal berlaku ini.

$$det(A'_3) = det(A'_2) = 100 \cdot det(A)$$

Oke! Operasi stop sampai di sini. Kita sudah memiliki matriks A'_3 yang nilai determinannya harus dibuktikan habis dibagi 7. Ya toh?

Ingat! Pada soal diketahui bahwa abc, def, ghi, dan jkl itu habis dibagi 7, yang berarti:

- $abc \;=\; 7 \cdot x_1$
- $def \;=\; 7 \cdot x_2$
- $ghi \;=\; 7 \cdot x_3$
- $jkl \;=\; 7 \cdot x_4$

Untuk suatu x_1, x_2, x_3, dan $x_4 \in \mathbb{Z}$.

Perhatikan bahwa dengan demikian kita bisa mengeluarkan 7 dari kolom pertama matriks A_3' menjadi seperti ini.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} abc & b & c \\ def + jkl & e+k & f+l \\ ghi & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (7 \cdot x_1) & b & c \\ (7 \cdot x_2) + (7 \cdot x_4) & e+k & f+l \\ (7 \cdot x_3) & h & i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 \cdot (x_1) & b & c \\ 7 \cdot (x_2 + x_4) & e+k & f+l \\ 7 \cdot (x_3) & h & i \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Kita sebut matriks $\begin{bmatrix} x_1 & b & c \\ x_2 + x_4 & e+k & f+l \\ x_3 & h & i \end{bmatrix}$ di atas sebagai X.

Dengan demikian untuk urusan determinannya:

$$det(A_3') = 7 \cdot det(X)$$

Ingat! Ingat! Ingat!

Karena

$$det(A_3') = 100 \cdot det(A)$$

maka

$$det(A_3') \;=\; 100 \cdot det(A) = 7 \cdot det(X)$$

atau dengan kata lain

$$100 \cdot det(A) = 7 \cdot det(X).$$

Perhatikan deh. Dari persamaan di atas, diketahui bahwa:

$$\frac{100 \cdot det(A)}{7} \;=\; det(X).$$

Dari sini jelas, karena 100 tidak bisa dibagi habis dengan 7, maka, mau tidak mau, 7 pasti membagi habis $det(A)$.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa 7 membagi habis determinan dari matriks $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d+j & e+k & f+l \\ g & h & i \end{bmatrix}$.