Pembahasan
Ujian Tengah Semester
TA 2004/2005

Kalkulus 1

Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Gadjah Mada
Yogyakarta

Mawi Wijna *

2021

*Walaupun pembahasan soal ujian ini belum tentu benar, akan tetapi semoga ada manfaatnya meskipun sedikit. Dibuat untuk mengisi waktu luang sambil menidurkan bayi. :p

Soal

1. Diketahui $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & , x > 0 \\ 1 - x^2 & , x \leq 0 \end{cases}$ dan $g(x) = \begin{cases} 2x & , x < 1 \\ x^2 + 2 & , x \geq 1 \end{cases}$.

   Carilah $(f \circ g)$!

2. Fungsi f didefinisikan:

   $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & , \text{untuk } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 - x & , \text{untuk } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

   (a) Selidiki apakah f kontinu di $x = 1$!

   (b) Tentukan $f'(1)$ jika ada.

3. Diketahui kurva dalam koordinat kutub:

   $$\rho = 1 + \cos\theta \quad \text{dan} \quad \rho = 1 - \cos\theta$$

   Tentukan koordinat titik potong kedua kurva tersebut! Kemudian arsirlah daerah di luar kurva itu dan di dalam kurva $\rho = 2$!

4. Hitunglah *(tidak boleh menggunakan turunan!)*:

   (a) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{\tan\left(1 - \sqrt{x-1}\right)}{x^2 - 3x + 2}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3^{2x} + 1 - 2^{x+1}}{2x}$

Pembahasan Soal Nomor 1

Soal

Diketahui $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & , x > 0 \\ 1 - x^2 & , x \leq 0 \end{cases}$ dan $g(x) = \begin{cases} 2x & , x < 1 \\ x^2 + 2 & , x \geq 1 \end{cases}$.

Carilah $(f \circ g)$!

Pembahasan

Ada beberapa hal yang harus kita cermati sebelum memulai pembahasan.

Pertama, kita dapat menyatakan fungsi f dan g sebagai:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & , x > 0 \\ \\ f_2(x) & , x \leq 0 \end{cases} \quad \text{dan} \quad g(x) = \begin{cases} g_1(x) & , x < 1 \\ \\ g_2(x) & , x \geq 1 \end{cases}$$

dengan:

- $f_1(x) = \sqrt{x+1}$,
- $f_2(x) = 1 - x^2$,
- $g_1(x) = 2x$, dan
- $g_2(x) = x^2 + 2$

Selanjutnya, kita jelaskan terlebih dahulu beberapa notasi interval yang mungkin membingungkan mereka yang baru belajar Kalkulus 1. :D

Diketahui $a, b, x \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$, maka:

- $(a, b) = \{v \in \mathbb{R} \ : \ a < v < b\}, \quad a < x < b \iff x \in (a, b)$.
- $[a, b) = \{v \in \mathbb{R} \ : \ a \leq v < b\}, \quad a \leq x < b \iff x \in [a, b)$.
- $(a, b] = \{v \in \mathbb{R} \ : \ a < v \leq b\}, \quad a < x \leq b \iff x \in (a, b]$.
- $[a, b] = \{v \in \mathbb{R} \ : \ a \leq v \leq b\}, \quad a \leq x \leq b \iff x \in [a, b]$.

Kemudian untuk interval yang melibatkan ∞.

- $(a, +\infty) = \{v \in \mathbb{R} \ : \ v > a\}, \quad x > a \iff x \in (a, +\infty)$.
- $[a, +\infty) = \{v \in \mathbb{R} \ : \ v \geq a\}, \quad x \geq a \iff x \in [a, +\infty)$.
- $(-\infty, b) = \{v \in \mathbb{R} \ : \ v < b\}, \quad x < b \iff x \in (-\infty, b)$.
- $(-\infty, b] = \{v \in \mathbb{R} \ : \ v \leq b\}, \quad x \leq b \iff x \in (-\infty, b]$.

Jadi, untuk suatu $x \in \mathbb{R}$, maka:

- $\mathbb{R} \ = \ (-\infty, x) \ \cup \ \{x\} \ \cup \ (x, +\infty)$.
- $\mathbb{R} - \{x\} \ = \ (-\infty, x) \ \cup \ (x, +\infty)$.

#

Oke! Pembahasan dimulai! :D

Kita akan mencari tahu hal-hal di bawah ini sebelum membuat $(f \circ g)$.

1. Memastikan bahwa fungsi f benar-benar terdefinisi dengan baik di *domain*-nya.
2. Memastikan bahwa fungsi g benar-benar terdefinisi dengan baik di *domain*-nya.
3. Mencari tahu *image* dari fungsi g.

Jadi, mari kita cari tahu satu per satu secara berurutan. :)

***

• (1) Memastikan bahwa fungsi f benar-benar terdefinisi dengan baik di *domain*-nya.

Pada soal, fungsi f didefinisikan sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \sqrt{x+1} & , x > 0 \\ \\ f_2(x) = 1 - x^2 & , x \leq 0 \end{cases}$$

Dengan defínsi yang demikian diketahui f merupakan fungsi *piecewise*. Selanjutnya, perhatikan syarat x yang dicetak biru pada definisi fungsi f di atas. Nilai x ini adalah elemen yang berada di *domain* fungsi f.

Perhatikan bahwa $x > 0$ ekuivalen dengan x adalah elemen di interval $(0, +\infty) \subset \mathbb{R}$. Sedangkan $x \leq 0$ ekuivalen dengan x adalah elemen di interval $(-\infty, 0] \subset \mathbb{R}$.

Karena $(0, +\infty) \cup (-\infty, 0] = \mathbb{R}$, maka kita dapat menyimpulkan bahwa *domain* fungsi f adalah $\mathbb{R}$.

Selanjutnya, kita akan mengambil sebarang elemen di *domain* fungsi f. Karena *domain* fungsi f adalah $\mathbb{R}$, maka dengan demikian kita ambil sebarang $x \in \mathbb{R}$.

Sesuai definisi fungsi f sebagai fungsi *piecewise*, $x \in \mathbb{R}$ yang kita ambil sebarang tersebut akan akan memenuhi kondisi $x > 0$ atau $x \leq 0$. Jelas bahwa x tidak bisa memenuhi $x > 0$ dan $x \leq 0$ sekaligus toh?

Jika $x > 0$, maka cabang fungsi f yang bersesuaian adalah $f_1(x) = \sqrt{x+1}$. Berdasarkan sifat bilangan real, jika $x > 0$, maka $x+1 > 0$. Selain itu, fungsi $\sqrt{x}$ akan selalu terdefinisi dengan baik jika dan hanya jika $x \geq 0$. Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa untuk $x > 0$, maka nilai $f(x) = f_1(x) = \sqrt{x+1}$ akan selalu terdefinisi dengan baik.

Di lain sisi, jika $x \leq 0$, maka cabang fungsi f yang bersesuaian adalah $f_2(x) = 1 - x^2$ yang tidak lain merupakan fungsi polinomial berderajat 2 yang kurvanya terbuka ke bawah. Kita tahu bahwa fungsi polinomial selalu terdefinisi dengan baik di $x \in \mathbb{R}$. Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa untuk $x \leq 0$, maka nilai $f(x) = f_2(x) = 1 - x^2$ akan selalu terdefinisi dengan baik.

Jadi, kita bisa menyimpulkan bahwa fungsi f terdefinisi dengan baik di *domain*-nya.

***

• (2) Memastikan bahwa fungsi g benar-benar terdefinisi dengan baik di *domain*-nya.

Pada soal, fungsi g didefinisikan sebagai berikut.

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = 2x & , x < 1 \\ \\ g_2(x) = x^2 + 2 & , x \geq 1 \end{cases}$$

Dengan definsi yang demikian diketahui g merupakan fungsi *piecewise*. Selanjutnya, perhatikan syarat x yang dicetak biru pada definisi fungsi g di atas. Nilai x ini adalah elemen yang berada di *domain* fungsi f.

Perhatikan bahwa $x < 1$ ekuivalen dengan x adalah elemen di interval $(-\infty, 1) \subset \mathbb{R}$. Sedangkan $x \geq 1$ ekuivalen dengan x adalah elemen di interval $[1, +\infty) \subset \mathbb{R}$.

Karena $(\infty, 1) \cup [1, +\infty) = \mathbb{R}$, maka kita dapat menyimpulkan bahwa *domain* fungsi g adalah $\mathbb{R}$.

Selanjutnya, kita akan mengambil sebarang elemen di *domain* fungsi g. Karena *domain* fungsi g adalah $\mathbb{R}$, maka dengan demikian kita ambil sebarang $x \in \mathbb{R}$.

Sesuai definisi fungsi g sebagai fungsi *piecewise*, $x \in \mathbb{R}$ yang kita ambil sebarang tersebut akan akan memenuhi kondisi $x < 1$ atau $x \geq 1$. Jelas bahwa x tidak bisa memenuhi $x < 1$ dan $x \geq 1$ sekaligus toh?

Jika $x < 1$, maka cabang fungsi g yang bersesuaian adalah $g_1(x) = 2x$ yang tidak lain merupakan fungsi linear. Kita tahu bahwa semua fungsi linear selalu terdefinisi dengan baik di $\mathbb{R}$. Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa untuk $x < 1$, maka nilai $g(x) = g_1(x) = 2x$ akan selalu terdefinisi dengan baik.

Di lain sisi, jika $x \geq 1$, maka cabang fungsi g yang bersesuaian adalah $g_2(x) = x^2 + 2$ yang tidak lain merupakan fungsi polinomial berderajat 2 yang kurvanya terbuka ke atas. Kita tahu bahwa fungsi polinomial akan selalu terdefinisi dengan baik di $\mathbb{R}$. Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa untuk $x \geq 1$, maka nilai $g(x) = g_2(x) = x^2 + 2$ akan selalu terdefinisi dengan baik.

Jadi, kita bisa menyimpulkan bahwa fungsi g terdefinisi dengan baik di *domain*-nya.

***

• (3) Mencari tahu *image* fungsi g.

Sesuai uraian di **Bagian (2)**, fungsi *piecewise* g terdefinisi dengan baik di $\mathbb{R}$. Cara termudah untuk menentukan *image* dari fungsi g adalah dengan menggambar grafik fungsi g. Tapi, kali ini kita akan mencari tahu *image* fungsi g tanpa menggambar.

Untuk $x < 1$, maka $g(x) = g_1(x) = 2x$. Misalkan kita pilih $x' < 1$ yang sangat dekat dengan 1 seperti $x' = 0,99999$. Dengan demikian kita akan memperoleh:

$2x' = 2 \cdot (0,99999) = 1,99998$.

Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan apabila $x \to 1$ dengan $x < 1$, maka $g_1(x) \to 2$.

Misalkan kita pilih $x'' < 1$ yang mendekati $-\infty$ seperti $x'' = -1000000$. Dengan demikian kita akan memperoleh:

$2x'' = 2 \cdot (-1000000) = -2000000$.

Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan apabila $x \to -\infty$, maka $g_1(x) \to -\infty$.

Kita juga dapat menyimpulkan bahwa fungsi $g_1(x) = 2x$ pada interval $(-\infty, 1)$ merupakan **fungsi naik (*increasing function*)** karena untuk sebarang $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$ dengan $x_1 > x_2$ akan berakibat $g_1(x_1) > g_1(x_2)$.

Untuk $x \geq 1$, maka $g(x) = g_2(x) = x^2 + 2$. Jelas bahwa jika $x = 1$, maka $g(x) = g(1) = g_2(1) = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3$. Kemudian, jika $x \to +\infty$, maka $g_2(x) \to +\infty$.

Dari uraian di atas, kita akan memperoleh hasil sebagai berikut.

Hasil 1.

- Jika $x \in (-\infty, 1)$, maka $g(x) = g_1(x) \in (-\infty, 2)$.
  Dengan kata lain $image(g_1) = (-\infty, 2)$.
- Jika $x \in [1, +\infty)$, maka $g(x) = g_2(x) \in [3, +\infty)$.
  Dengan kata lain $image(g_2) = [3, +\infty)$.

Jadi, kita bisa menyimpulkan bahwa *image* fungsi g adalah $(-\infty, 2) \cup [3, +\infty)$ atau $\mathbb{R} - [2, 3)$.

***

Jika diketahui fungsi f dan g, maka kita dapat membuat $f \circ g$ asalkan $Image(g) \subseteq Domain(f)$.

Jika $Image(g) \not\subset Domain(f)$, maka kita tetap dapat membuat $f \circ g$ asalkan $Image(g) \cap Domain(f) \neq \emptyset$. Jika $Image(g) \cap Domain(f) \neq \emptyset$, maka kita dapat membuat $f \circ g$ dengan cara mengubah *domain* fungsi g dan juga *domain* fungsi f supaya $Image_{\text{baru}}(g) \subseteq Domain_{\text{baru}}(f)$.

#

Dari uraian di atas, kita mengetahui bahwa:

1. $Domain(f) = \mathbb{R}$, dan
2. $Image(g) = \mathbb{R} - [2, 3)$.

Karena $(\mathbb{R} - [2, 3)) \subset \mathbb{R}$, dengan demikian kita bisa menyimpulkan bahwa $Image(g) \subset Domain(f)$. Jadi, kita dapat membuat $f \circ g$ tanpa mengubah *domain* fungsi g dan juga *domain* fungsi f.

Dari definisi, kita tahu bahwa fungsi f merupakan fungsi *piecewise* dengan dua fungsi cabang, yaitu f_1 dan f_2. *Domain* fungsi cabang f_1 adalah $(0, +\infty)$ sedangkan *domain* fungsi cabang f_2 adalah $(-\infty, 0]$.

•• Menyelidiki fungsi cabang f_1.

Mari kita menyelidiki fungsi cabang f_1!

Kita tahu bahwa $domain(f_1)$ adalah $(0, +\infty)$.
Untuk mudahnya kita notasikan $domain(f_1) = D_{f_1} = (0, +\infty)$.

Selanjutnya, mari kita cari jawaban dari pertanyaan berikut.

"Apakah ada $x \in \mathbb{R}$ dengan $g(x) \in D_{f_1}$?"
dengan kata lain
"Apakah ada $x \in \mathbb{R}$ dengan $g(x) \in (0, +\infty)$?"

Berdasarkan **Hasil 1**, jika $x \in (-\infty, 1)$, maka $g(x) = g_1(x) \in (-\infty, 2)$.
Ingat! Interval $(-\infty, 2)$ yang dimaksud ini tidak lain adalah $image(g_1)$!

Perhatikan bahwa $(-\infty, 2) = (-\infty, 0] \cup (0, 2)$.
Dengan kata lain, $image(g_1)$ memuat interval $(0, 2)$.

Ingat bahwa $(0, 2) \subset (0, +\infty)$. Karena $D_{f_1} = (0, +\infty)$, dengan demikian $(0, 2) \subset D_{f_1}$.

Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa terdapat $x \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $g(x) \in (0, +\infty)$.
Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa terdapat $x \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $g(x) \in D_{f_1}$.

Dengan demikian jawaban dari pertanyaan di atas adalah **Ya, Ada!**

#

Selanjutnya, mari kita cari jawaban dari pertanyaan berikut.

"Bilangan-bilangan $x \in \mathbb{R}$ apa sajakah yang mengakibatkan $g(x) \in D_{f_1}$?"
dengan kata lain
"Bilangan-bilangan $x \in \mathbb{R}$ apa sajakah yang mengakibatkan $g(x) \in (0, +\infty)$?"

Pada bagian di atas, kita sudah mengetahui bahwa $(0, 2) \subset D_{f_1}$ dan $image(g_1)$ memuat interval $(0, 2)$. Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa terdapat himpunan bagian dari $image(g_1)$ sedemikian sehingga himpunan bagian tersebut termuat di D_{f_1}.

Selain itu, berdasarkan **Hasil 1** kita juga tahu bahwa $image(g_2) = [3, +\infty)$. Karena $[3, +\infty) \subset (0, +\infty)$ dan $D_{f_1} = (0, +\infty)$, maka kita bisa menyimpulkan bahwa $image(g_2)$ termuat di D_{f_1}.

Karena terdapat himpunan bagian dari *image*(g_1) sedemikian sehingga himpunan bagian tersebut termuat di D_{f_1}, maka sekarang kita akan mencari himpunan bilangan $x \in domain(g_1)$ yang menyebabkan $g_1(x) \in D_{f_1}$. Kita tahu bahwa $D_{f_1} = (0, +\infty)$, $domain(g_1) = (-\infty, 1)$ dan $g_1(x) = 2x$. Supaya $g_1(x) \in D_{f_1}$, maka haruslah $2x \in (0, +\infty) \iff 2x > 0 \iff x > 0$. Perhatikan bahwa $x > 0$ berarti $x \in (0, +\infty)$. Dengan demikian, jika kita mengiriskan interval $(0, +\infty)$ dengan $domain(g_1)$, maka kita akan mendapatkan himpunan bilangan $x \in domain(g_1)$ yang menyebabkan $g_1(x) \in D_{f_1}$.

$(0, +\infty) \cap domain(g_1) = (0, +\infty) \cap (-\infty, 1) = (0, 1)$

Dengan demikian, himpunan bilangan $x \in domain(g_1)$ yang menyebabkan $g_1(x) \in D_{f_1}$ adalah $(0, 1)$.

Kemudian, karena *image*(g_2) termuat di D_{f_1}, maka kita dapat menyimpulkan bahwa setiap $x \in domain(g_2)$ akan menyebabkan $g_2(x) \in D_{f_1}$.Dengan demikian, himpunan bilangan $x \in domain(g_2)$ yang menyebabkan $g_2(x) \in D_{f_1}$ adalah $domain(g_2)$ itu sendiri, yaitu $[1, +\infty)$.

Mari kita tuliskan hasil yang kita peroleh dari uraian panjang di bagian ini pada kotak abu-abu di bawah.

Hasil 2.

- Jika $x \in (0, 1) \subset domain(g_1)$, maka $g(x) = g_1(x) \in D_{f_1}$.
- Jika $x \in domain(g_2) = [1, +\infty)$, maka $g(x) = g_2(x) \in D_{f_1}$.

•• Menyelidiki fungsi cabang f_2.

Mari kita menyelidiki fungsi cabang f_2!

Kita tahu bahwa $domain(f_2)$ adalah $(-\infty, 0]$.
Untuk mudahnya kita notasikan $domain(f_2) = D_{f_2} = (-\infty, 0]$.

Selanjutnya, mari kita cari jawaban dari pertanyaan berikut.

"Apakah ada $x \in \mathbb{R}$ dengan $g(x) \in D_{f_2}$?"
dengan kata lain
"Apakah ada $x \in \mathbb{R}$ dengan $g(x) \in (-\infty, 0]$?"

Berdasarkan **Hasil 1**, jika $x \in (-\infty, 1)$, maka $g(x) = g_1(x) \in (-\infty, 2)$.
Ingat! Interval $(-\infty, 2)$ yang dimaksud ini tidak lain adalah *image*(g_1)!

Perhatikan bahwa $(-\infty, 2) = (-\infty, 0] \cup (0, 2)$.
Dengan kata lain, *image*(g_1) memuat interval $(-\infty, 0]$.

Dengan demikian kita dapat menyimpulkan bahwa terdapat $x \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $g(x) \in (-\infty, 0]$.
Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa terdapat $x \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $g(x) \in D_{f_2}$.

Dengan demikian jawaban dari pertanyaan di atas adalah **Ya, Ada!**

#

Selanjutnya, mari kita cari jawaban dari pertanyaan berikut.

"Bilangan-bilangan $x \in \mathbb{R}$ apa sajakah yang mengakibatkan $g(x) \in D_{f_2}$?"
dengan kata lain
"Bilangan-bilangan $x \in \mathbb{R}$ apa sajakah yang mengakibatkan $g(x) \in (-\infty, 0]$?"

Pada bagian di atas, kita sudah mengetahui bahwa interval $(-\infty, 0]$ termuat di *image*(g_1). Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa D_{f_2} termuat di *image*(g_1).

Sekarang, kita akan mencari himpunan bilangan $x \in domain(g_1)$ sedemikian sehingga $g_1(x) \in D_{f_2}$. Kita tahu bahwa $g_1(x) = 2x$ dan $D_{f_2} = (-\infty, 0]$. Supaya $g_1(x) \in D_{f_2}$, maka haruslah $2x \in (-\infty, 0] \iff 2x \leq 0 \iff x \leq 0 \iff x \in (-\infty, 0]$.

Dengan demikian, jika kita mengiriskan interval $(-\infty, 0]$ dengan $domain(g_1)$, maka kita akan mendapatkan himpunan bilangan $x \in domain(g_1)$ yang menyebabkan $g_1(x) \in D_{f_2}$.

$(-\infty, 0] \cap domain(g_1) = (-\infty, 0] \cap (-\infty, 1) = (-\infty, 0]$

Dengan demikian, himpunan bilangan $x \in domain(g_1)$ yang menyebabkan $g_1(x) \in D_{f_2}$ adalah $(-\infty, 0]$.

Mari kita tuliskan hasil yang kita peroleh dari uraian panjang di bagian ini pada kotak abu-abu di bawah.

Hasil 3.

- Jika $x \in (-\infty, 0] \subset domain(g_1)$, maka $g(x) = g_1(x) \in D_{f_2}$.

•• Merangkai hasil $(f \circ g)$.

Hasil 2 dan **Hasil 3** dapat kita gunakan untuk merangkai definisi $(f \circ g)$.

- Berdasarkan **Hasil 3**, jika $x \in (-\infty, 0]$ (dengan kata lain $x \leq 0$), maka $g(x) = g_1(x) \in D_{f_2}$.
  Karena $g_1(x) = 2x$ dan $f_2(x) = 1 - x^2$, maka kita akan memperoleh:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= (f_2 \circ g_1)(x)\\ &= f_2(g_1(x))\\ &= f_2(2x)\\ &= 1 - (2x)^2\\ &= 1 - 4x^2\end{aligned}$$

- Berdasarkan **Hasil 2**, jika $x \in (0, 1)$, (dengan kata lain $0 < x < 1$), maka $g(x) = g_1(x) \in D_{f_1}$.
  Karena $g_1(x) = 2x$ dan $f_1(x) = \sqrt{x+1}$, maka kita akan memperoleh:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= (f_1 \circ g_1)(x)\\ &= f_1(g_1(x))\\ &= f_1(2x)\\ &= \sqrt{2x+1}\end{aligned}$$

- Berdasarkan **Hasil 2**, jika $x \in [1, +\infty)$, (dengan kata lain $x \geq 1$), maka $g(x) = g_2(x) \in D_{f_1}$.
  Karena $g_2(x) = x^2 + 2$ dan $f_1(x) = \sqrt{x+1}$, maka kita akan memperoleh:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= (f_1 \circ g_2)(x)\\ &= f_1(g_2(x))\\ &= f_1(x^2+2)\\ &= \sqrt{x^2+2+1}\\ &= \sqrt{x^2+3}\end{aligned}$$

Jadi, hasil $(f \circ g)$ adalah sebagai berikut.

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 - 4x^2, & x \leq 0 \\ \sqrt{2x+1}, & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x^2+3}, & x \geq 1 \end{cases}$$

■

Pembahasan Soal Nomor 2

Soal
Fungsi f didefinisikan:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{, untuk } -1 \leq x \leq 1 \\ 1-x & \text{, untuk } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

(a) Selidiki apakah f kontinu di $x = 1$!

(b) Tentukan $f'(1)$ jika ada.

Pembahasan
$\therefore$ **Tugas (a) Menyelidiki apakah f kontinu di $x = 1$.**

Terlebih dahulu, mari kita bahas apa itu fungsi yang kontinu. Perhatikan definisi berikut.

Definisi Fungsi Kontinu

Diketahui f adalah suatu fungsi yang terdefinisi di $A \subset \mathbb{R}$ dan $a \in A$.
Fungsi f dikatakan **kontinu di** a jika dan hanya jika keempat syarat berikut terpenuhi.

1. Fungsi f terdefinisi dengan baik di a.
2. Limit fungsi f untuk $x \to a^+$ (x mendekati a dari arah sumbu X positif) ada.
3. Limit fungsi f untuk $x \to a^-$(x mendekati a dari arah sumbu X negatif) ada.
4. Jika poin 1, 2, dan 3 terpenuhi, maka $f(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

Jadi, untuk menyelidiki apakah fungsi f kontinu di $x = 1$, kita akan melakukan keempat poin berikut secara berurutan.

1. Kita akan menyelidiki apakah fungsi f terdefinisi dengan baik di $x = 1$.
2. Kita akan menyelidiki apakah limit fungsi f untuk $x \to 1^+$ (x mendekati 1 dari arah sumbu X positif) ada.
3. Kita akan menyelidiki apakah limit fungsi f untuk $x \to 1^-$(x mendekati 1 dari arah sumbu X negatif) ada.
4. Jika poin 1, 2, dan 3 terpenuhi, maka kita akan menyelidiki apakah $f(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

Jika jawaban dari keempat poin di atas adalah **Ya**, maka kita dapat menyimpulkan bahwa fungsi f kontinu di $x = 1$.

Tanpa berlama-lama, ayo kita selidiki! :D

***

$\therefore\therefore$ **(1) Menyelidiki apakah fungsi f terdefinisi dengan baik di $x = 1$.**

Perhatikan definisi fungsi f berikut.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{, untuk } -1 \leq x \leq 1 \\ 1-x & \text{, untuk } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Berdasarkan definisi fungsi f di atas, jika $x = 1$, maka definisi fungsi f yang bersesuaian adalah $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Dengan demikian, kita akan memperoleh:

$$\begin{aligned} f(1) &= \sqrt{1-1^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jadi, karena nilai fungsi f di $x = 1$ ada, yaitu $f(1) = 0$, maka kita bisa menyimpulkan bahwa fungsi f terdefinisi dengan baik di $x = 1$.

***

$\therefore\therefore$ (2) Menyelidiki apakah limit fungsi f untuk $x \to 1^+$ (x mendekati 1 dari arah sumbu X positif) ada.

Perhatikan definisi fungsi f berikut.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{, untuk } -1 \le x \le 1 \\ 1-x & \text{, untuk } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Dari definisi di atas, terlihat bahwa *domain* fungsi f adalah interval tertutup $[-1, 2]$.
Jika x mendekati 1 dari arah sumbu X positif, maka nilai x yang mungkin adalah seperti:

- $x = 2$, atau
- $x = 1,673$, atau
- $x = 1,00004414$, dan sebagainya.

Oleh sebab itu, definisi fungsi f yang bersesuaian apabila x mendekati 1 dari arah sumbu X positif adalah $f(x) = 1 - x$.

Dengan demikian, kita akan memperoleh:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} 1 - x \\ &= 1 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jadi, kita bisa menyimpulkan bahwa limit fungsi f untuk $x \to 1^+$ ada, yaitu $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$.

***

$\therefore\therefore$ (3) Menyelidiki apakah limit fungsi f untuk $x \to 1^-$ (x mendekati 1 dari arah sumbu X negatif) ada.

Perhatikan definisi fungsi f berikut.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{, untuk } -1 \le x \le 1 \\ 1-x & \text{, untuk } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Dari definisi di atas, terlihat bahwa *domain* fungsi f adalah interval tertutup $[-1, 2]$.
Jika x mendekati 1 dari arah sumbu X negatif, maka nilai x yang mungkin adalah seperti:

- $x = -1$, atau
- $x = -0,0075$, atau
- $x = 0,90004414$, dan sebagainya.

Oleh sebab itu, definisi fungsi f yang bersesuaian apabila x mendekati 1 dari arah sumbu X negatif adalah $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Dengan demikian, kita akan memperoleh:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x^2} \\ &= \sqrt{1-1^2} \\ &= \sqrt{1-1} \\ &= \sqrt{0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jadi, kita bisa menyimpulkan bahwa limit fungsi f untuk $x \to 1^-$ ada, yaitu $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$.

***

∴∵ (4) Menyelidiki apakah $f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$.

Dari uraian poin (1), (2), dan (3) di atas, kita memperoleh hasil sebagai berikut.

1. Fungsi f terbukti terdefinisi dengan baik di $x = 1$.
   Nilai $f(1) = 0$.

2. Limit fungsi f untuk $x \to 1^+$ terbukti ada.
   Nilai $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$.

3. Limit fungsi f untuk $x \to 1^-$ terbukti ada.
   Nilai $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$.

Dengan demikian kita memperoleh hasil bahwa:

$f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0.$

Jadi, kita bisa menyimpulkan bahwa $f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$ adalah benar.

***

∴∵ Kesimpulan.

Berdasarkan uraian poin (1), (2), (3), dan (4) di atas, kita memperoleh hasil sebagai berikut.

1. **Ya!** Fungsi f terbukti terdefinisi dengan baik di $x = 1$.
2. **Ya!** Limit fungsi f untuk $x \to 1^+$ terbukti ada.
3. **Ya!** Limit fungsi f untuk $x \to 1^-$ terbukti ada.
4. **Ya!** Persamaan $f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$ terbukti benar.

Jadi, karena keempat poin di atas terbukti kebenarannya, maka kita dapat menyimpulkan bahwa fungsi f kontinu di $x = 1$.

■

$\therefore$ Tugas (b) Menyelidiki apakah $f'(1)$ ada.

Terlebih dahulu, mari kita kembali ke definisi awal dari turunan. Perhatikan definisi berikut.

Definisi Turunan Fungsi 1

Diketahui f adalah suatu fungsi yang terdefinisi di $A \subset \mathbb{R}$ dan $a \in A$.
Fungsi f dikatakan **memiliki turunan di** a jika dan hanya jika $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ ada.

Jika fungsi f memiliki turunan di a, maka turunan fungsi f di a dinyatakan sebagai $f'(a)$ dengan $f'(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$.

Karena fungsi f pada soal merupakan fungsi *piecewise*, maka definisi turunan fungsi akan menjadi seperti ini.

Definisi Turunan Fungsi 2

Diketahui f adalah suatu fungsi yang terdefinisi di $A \subset \mathbb{R}$ dan $a \in A$.
Fungsi f dikatakan **memiliki turunan di** a jika dan hanya jika tiga syarat berikut terpenuhi.

1. $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ ada.
2. $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ ada.
3. Jika poin 1 dan 2 terpenuhi, maka $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$.

Jika fungsi f memiliki turunan di a, maka turunan fungsi f di a dinyatakan sebagai $f'(a)$ dengan $f'(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$.

Jadi, untuk menyelidiki apakah fungsi f memiliki turunan di $x = 1$, kita akan melakukan ketiga poin berikut secara berurutan.

1. Kita akan menyelidiki apakah $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$ ada.
2. Kita akan menyelidiki apakah $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$ ada.
3. Jika poin 1 dan 2 terpenuhi, maka kita akan menyelidiki apakah $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$.

Jika jawaban dari keempat poin di atas adalah **Ya**, maka kita dapat menyimpulkan bahwa fungsi f memiliki turunan di $x = 1$.

Tanpa berlama-lama, ayo kita selidiki! :D

***

Sebelumnya, mari kita bahas simbol Δx yang termuat pada notasi limit.
Apakah sebetulnya Δx itu?
Kenapa bisa $\Delta x \to 0^+$ dan $\Delta x \to 0^-$?

Simbol Δx yang termuat pada notasi limit adalah **"jarak"** antar 2 elemen di *domain* fungsi f. Definisi "jarak" ini bisa beragam, tergantung **ruang metrik** apa yang menjadi semesta pembicaraan. Kita tidak akan membahas lebih jauh mengenai ruang metrik karena ini adalah topik mata kuliah semester akhir menjelang kelulusan. :p

Supaya tidak membuat bingung (karena Kalkulus 1 adalah mata kuliah semester awal :p), kita paku pikiran pada himpunan bilangan real ($\mathbb{R}$) saja. Ketahuilah bahwa fungsi jarak antar elemen x dan y di $\mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $\Delta(x, y) = |x - y|$. Perhatikan bahwa, nilai "jarak" dengan definisi tersebut akan selalu bernilai positif.

Kemudian, jika terdapat suatu fungsi, pastilah ada *domain* dari fungsi tersebut. Dari *domain* tersebut kita dapat mengambil satu elemen sebagai acuan. Katakanlah c merupakan elemen di *domain* yang kita ambil sebagai acuan.

Menggunakan elemen c tersebut kita dapat memperoleh "jarak" antara c dengan elemen-elemen di *domain*. Misalkan $x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ...$ adalah elemen-elemen di *domain*, maka kita dapat memperoleh $\Delta(c, x_1)$, $\Delta(c, x_2)$,$\Delta(c, x_3)$,...,$\Delta(c, x_i)$,... dsb.

Perhatikan bahwa dari banyaknya x_i yang merupakan elemen di *domain* tersebut, kita dapat memilah x_i mana sajakah yang mendekati c dari sumbu X positif dan juga dari sumbu X negatif. Ingat bahwa c adalah elemen acuan!

Misalkan x'_1, x'_2, x'_3,... adalah elemen-elemen di *domain* yang mendekati c dari arah sumbu X positif, maka kita dapat membentuk himpunan $\{\Delta(c, x'_1), \Delta(c, x'_2), \Delta(c, x'_3), ...\}$. Perhatikan bahwa jika x'_i semakin dekat dengan c, maka jarak antara c dengan x'_i (yaitu $\Delta(c, x'_i)$) akan semakin dekat dengan 0. Inilah yang kemudian dinotasikan sebagai $\Delta x \to 0^+$. Untuk $\Delta x \to 0^-$ penjelasannya serupa.

***

$\therefore$ (1) Menyelidiki apakah $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$ ada.

Perhatikan definisi fungsi f berikut.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{, untuk } -1 \le x \le 1 \\ 1-x & \text{, untuk } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Dari definisi di atas, terlihat bahwa *domain* fungsi f adalah interval tertutup $[-1, 2]$.

Contoh elemen-elemen di $[-1, 2]$ yang mendekati 1 dari arah sumbu X positif dengan jaraknya terhadap 1 mendekati 0 adalah sebagai berikut.

- $x = 1,5$. Karena $\Delta(1, 1,5) = |1 - 1,5| = 0,5$ mendekati 0.
- $x = 1,00257$. Karena $\Delta(1, 1,00257) = |1 - 1,00257| = 0,00257$ mendekati 0.

Perhatikan bahwa elemen-elemen di $[-1, 2]$ yang mendekati 1 dari arah sumbu X positif dengan jaraknya terhadap 1 mendekati 0 berada di interval $(1, 2]$. Oleh sebab itu, definisi fungsi f yang bersesuaian untuk elemen-elemen yang berada di interval ini adalah $f(x) = 1 - x$.

Selanjutnya, kita akan mencoba menghitung $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$ dengan $f(x) = 1 - x$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(1-(1+\Delta x)) - (1-1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(1-1-\Delta x) - (0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{0-\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-\Delta x}{\Delta x} \\
&= -\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} \\
&= -\lim_{\Delta x \to 0^+} 1 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Jadi, berdasarkan penjabaran di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$ ada.

Nilai $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$ adalah -1.

***

$\therefore$ (2) Menyelidiki apakah $\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$ ada.

Perhatikan definisi fungsi f berikut.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{, untuk } -1 \le x \le 1 \\ 1-x & \text{, untuk } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Dari definisi di atas, terlihat bahwa *domain* fungsi f adalah interval tertutup $[-1, 2]$.

Contoh elemen-elemen di $[-1, 2]$ yang mendekati 1 dari arah sumbu X negatif dengan jaraknya terhadap 1 mendekati 0 adalah sebagai berikut.

- $x = 0,5$. Karena $\Delta(1, 0,5) = |1 - 0,5| = 0,5$ mendekati 0.
- $x = 0,9999005$. Karena $\Delta(1, 0,9999005) = |1 - 0,9999005| = 0,0000995$ mendekati 0.

Perhatikan bahwa elemen-elemen di $[-1, 2]$ yang mendekati 1 dari arah sumbu X negatif dengan jaraknya terhadap 1 mendekati 0 berada di interval $[-1, 1)$. Oleh sebab itu, definisi fungsi f yang bersesuaian untuk elemen-elemen yang berada di interval ini adalah $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Selanjutnya, kita akan mencoba menghitung $\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$ dengan $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Atas dasar efisiensi tenaga dan menjaga kewarasan pikiran :p, kita akan beralih menggunakan aturan rantai (*Chain Rule*).

> ***Chain Rule***
> Diketahui fungsi f dan g.
> Jika g memiliki turunan di a dan f memiliki turunan di $g(a)$, maka $f(g(a))' = f'(g(a)) \cdot g'(a)$.

Kita bentuk 2 fungsi baru terhadap peubah x yaitu u dan v dengan definisi sebagai berikut.

- $u(x) = \sqrt{x}$.
- $v(x) = 1 - x^2$.

Dengan demikian, kita bisa menyatakan fungsi f sebagai $(u \circ v)$. Dengan kata lain, $f(x) = u(v(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Jika kita mengasumsikan bahwa v dan u memiliki turunan di x, maka:

- $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $v'(x) = -2x$.

Dengan demikian, jika kita mengasumsikan bahwa v memiliki turunan di a dan u memiliki turunan di $v(a)$, maka:

$$\begin{aligned} u(v(a))' &= u'(v(a)) \cdot v'(a) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{v(a)}} \cdot (-2a) \\ &= \frac{-2a}{2\sqrt{1-a^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \end{aligned}$$

Akan tetapi, setelah melihat bentuk dari $u(v(a))'$, ternyata $u(v(a))'$ tidak memiliki turunan di $a = 1$, karena:

$$\begin{aligned} u(v(1))' &= -\frac{1}{\sqrt{1-1^2}} \\ &= -\frac{1}{0} \end{aligned}$$

tidak terdefinisi dengan baik di $\mathbb{R}$. Jadi, kita bisa menyimpulkan bahwa $f(x) = u(v(x)) = \sqrt{1-x^2}$ tidak memiliki turunan di $x = 1$.

***

$\therefore$ **(3) Menyelidiki apakah** $\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$**.**

Berdasarkan uraian poin (1) dan (2) di atas, kita memperoleh hal-hal berikut.

- **Ya!** $\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ ada.
  Nilai $\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = -1$.
- **Tidak!** $\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ tidak ada.

Karena $\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ tidak ada, maka kita bisa menyimpulkan bahwa $f'(1)$ tidak ada.

$\blacksquare$

Pembahasan Soal Nomor 3

Soal
Diketahui kurva dalam koordinat kutub:

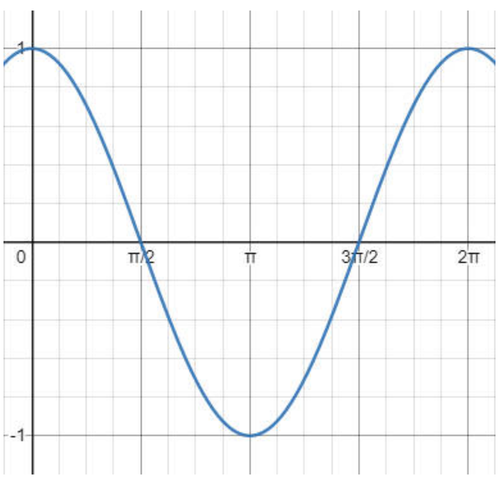
$$\rho = 1 + \cos\theta \quad \text{dan} \quad \rho = 1 - \cos\theta$$

Tentukan koordinat titik potong kedua kurva tersebut! Kemudian arsirlah daerah di luar kurva itu dan di dalam kurva $\rho = 2$!

Pembahasan
Untuk mengerjakan soal ini kita harus tahu seperti apa nilai-nilai fungsi $\cos\theta$ pada interval $[0, 2\pi]$. Tabel di bawah ini menyajikan beberapa nilai-nilai tersebut.

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos\theta$	1	0	-1	0	1

Sedangkan grafik fungsi $\cos\theta$ pada interval $[0, 2\pi]$ di bidang kartesius adalah seperti di bawah ini.



Dari grafik di atas terlihat bahwa fungsi $\cos\theta$ merupakan **fungsi periodik**, yaitu fungsi yang nilainya selalu berulang pada suatu interval tertentu. Perhatikan bahwa kurva fungsi $\cos\theta$ akan selalu berulang setiap panjang interval 2π. Sebagai contoh, bentuk kurva fungsi $\cos\theta$ pada interval $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$, $[6\pi, 8\pi]$, dst akan sama persis seperti pada interval $[0, 2\pi]$.

#

Kembali pada soal, diketahui kita memiliki 2 kurva, yaitu $\rho = 1 + \cos\theta$ dan $\rho = 1 - \cos\theta$. Kita diperintahkan untuk menentukan koordinat titik potong kedua kurva tersebut. Kemudian mengarsir daerah di luar kurva itu dan di dalam kurva $\rho = 2$.

Berdasarkan tugas yang diberikan itu sebaiknya kita mulai dengan menggambar kurva $\rho = 1 + \cos\theta$ dan $\rho = 1 - \cos\theta$ pada koordinat kutub (*polar coordinate*).

Tanpa berlama-lama, ayo kita mulai! :D

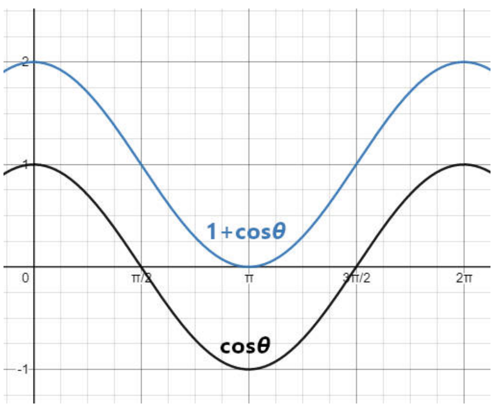
***

∴ **(1) Menggambar kurva $\rho = 1 + \cos\theta$ pada koordinat kutub.**

Mari kita bentuk fungsi h yang didefinisikan sebagai: $h(\theta) = 1 + \cos\theta$, dengan θ dalam radian.

Perhatikan bahwa sebetulnya grafik fungsi h ini (pada bidang kartesius) serupa dengan grafik fungsi $\cos\theta$. Perbedaannya hanya grafik fungsi h ini kita "geser ke atas" sejauh 1 satuan. Untuk lebih jelasnya, perhatikan tabel dan grafik berikut.

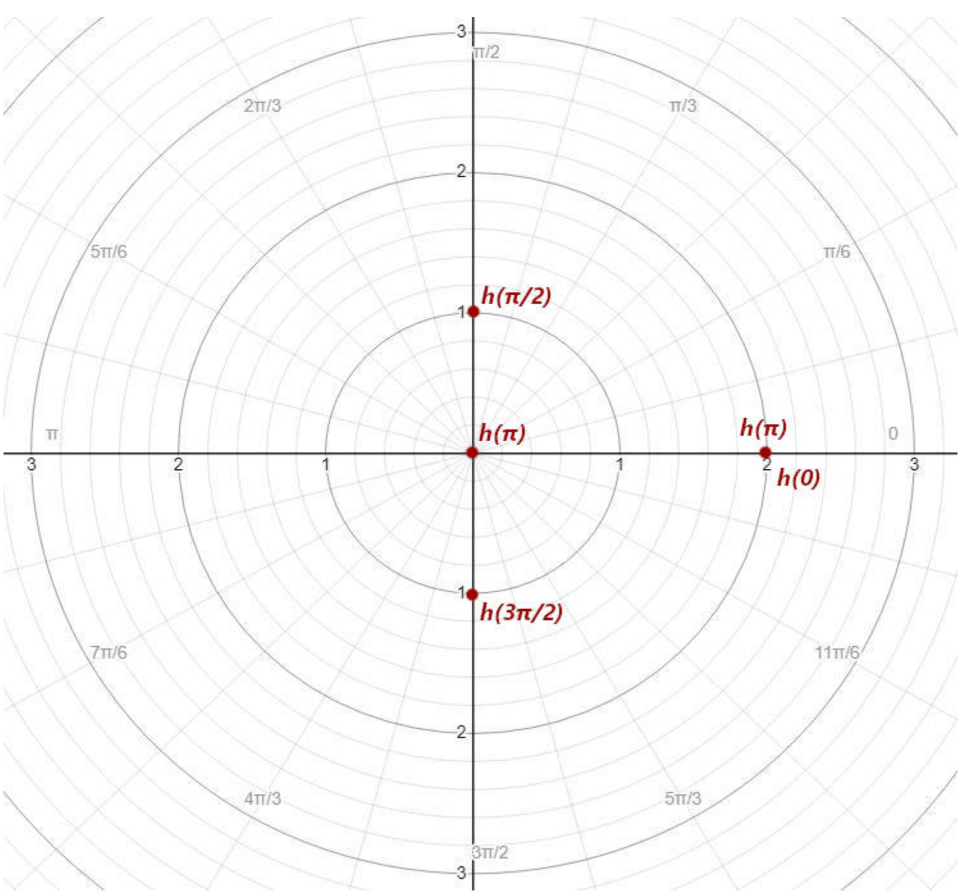
	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos\theta$	1	0	-1	0	1
$1 + \cos\theta$	2	1	0	1	2



Berdasarkan baris pada tabel yang berwarna kuning muda di atas, kita memperoleh:

- $h(0) = 2$,
- $h(\pi/2) = 1$,
- $h(\pi) = 0$,
- $h(3\pi/2) = 1$, dan
- $h(2\pi) = 2$.

Jadi, mari kita gelar grafik koordinat kutub kemudian "menitik-nitikkan" 5 titik di atas itu.



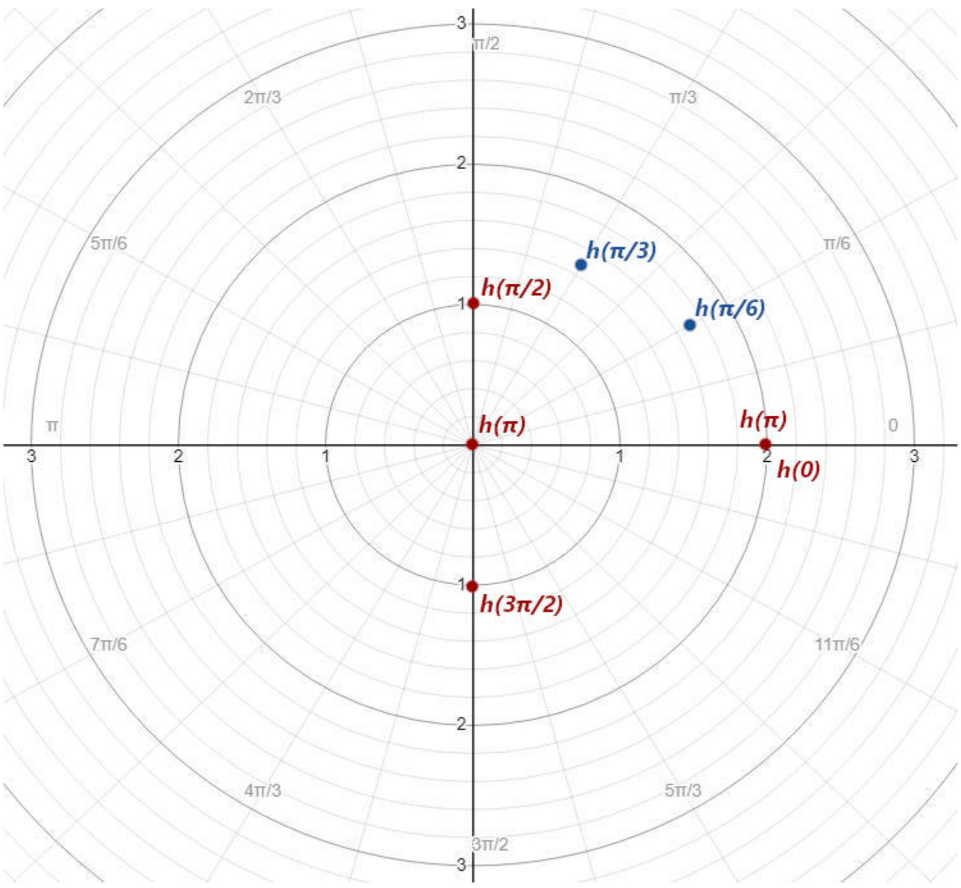
Heee... sepertinya jumlah titik-titiknya masih terlampau sedikit. Kita masih kesulitan untuk menerka bentuk kurva $\rho = 1 + \cos\theta$.

Oleh sebab itu, mari kita tambah jumlah titik-titiknya. :D

Kita mencoba menambah jumlah titik pada interval $[0, \pi/2]$. Pilih saja elemen yang merupakan sudut istimewa, seperti $\frac{\pi}{6}$ dan $\frac{\pi}{3}$. Dengan demikian kita akan memperoleh:

- $h\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1 + \frac{1.5}{2} = 1 + 0,75 = 1,75.$
- $h\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{\sqrt{1}}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1,5.$

Mari kita *plot* titik $\left(1,75\ ,\frac{\pi}{6}\right)$ dan $\left(1,5\ ,\frac{\pi}{3}\right)$ ke dalam grafik koordinat kutub kita di atas. Dua titik baru ini kita warnai biru.



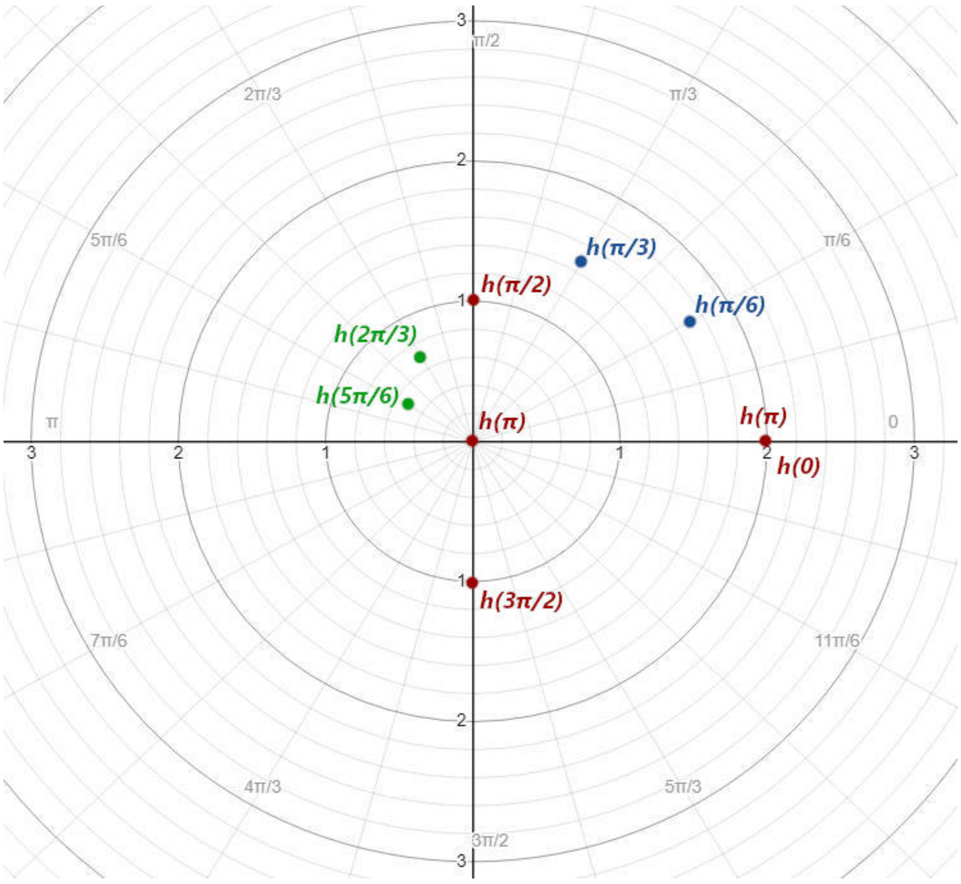
Heeeee... sepertinya jumlah titik-titiknya masih juga kurang. Khususnya untuk interval $[\pi/2, \pi]$.

Oleh sebab itu, mari kita tambah lagi jumlah titik-titiknya. :D

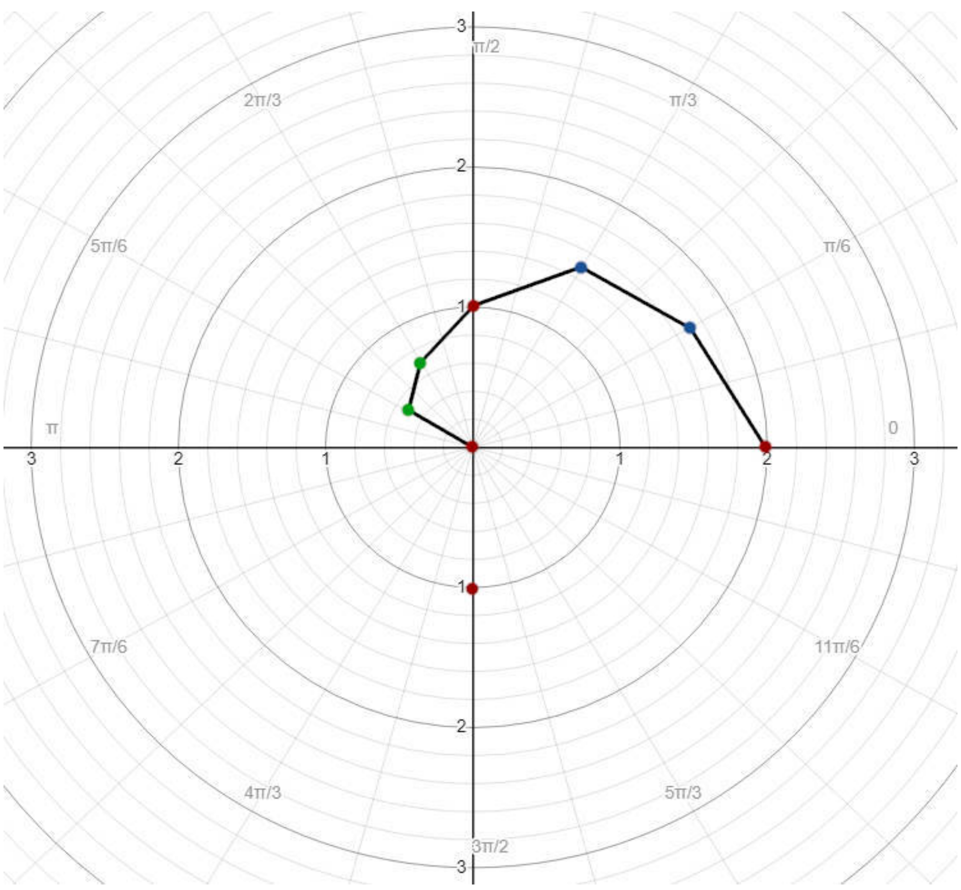
Kita mencoba menambah jumlah titik pada interval $[\pi/2, \pi]$. Pilih saja elemen yang merupakan sudut istimewa, seperti $\frac{2\pi}{3}$ dan $\frac{5\pi}{6}$. Dengan demikian kita akan memperoleh:

- $h\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 + \cos\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{\sqrt{1}}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 0,5.$
- $h\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1 + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1 + \cos\left(\frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1 - \frac{1.5}{2} = 1 - 0,75 = 0,25.$

Mari kita *plot* titik $\left(0,5\ ,\frac{2\pi}{3}\right)$ dan $\left(0,25\ ,\frac{5\pi}{6}\right)$ ke dalam grafik koordinat kutub kita di atas. Dua titik baru ini kita warnai hijau.

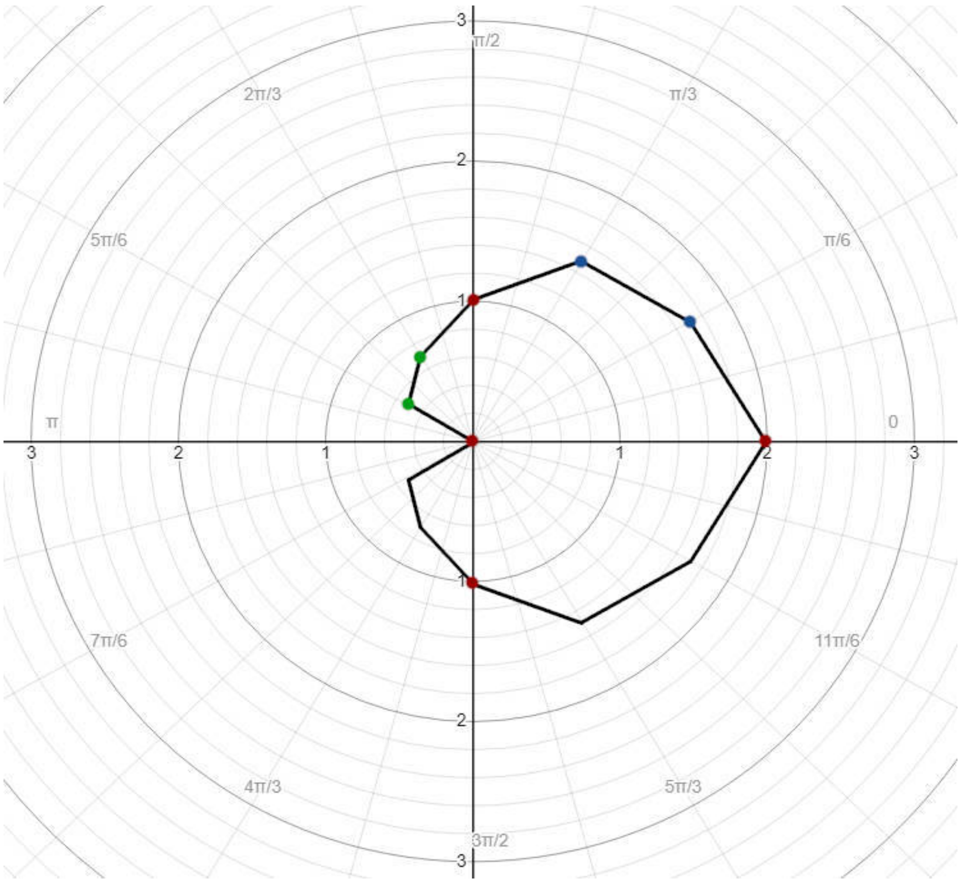


Oke, sekarang mari kita hubungkan titik-titik berwarna merah, biru, dan hijau yang terdapat pada interval $[0, \pi]$ dengan garis lurus hitam.



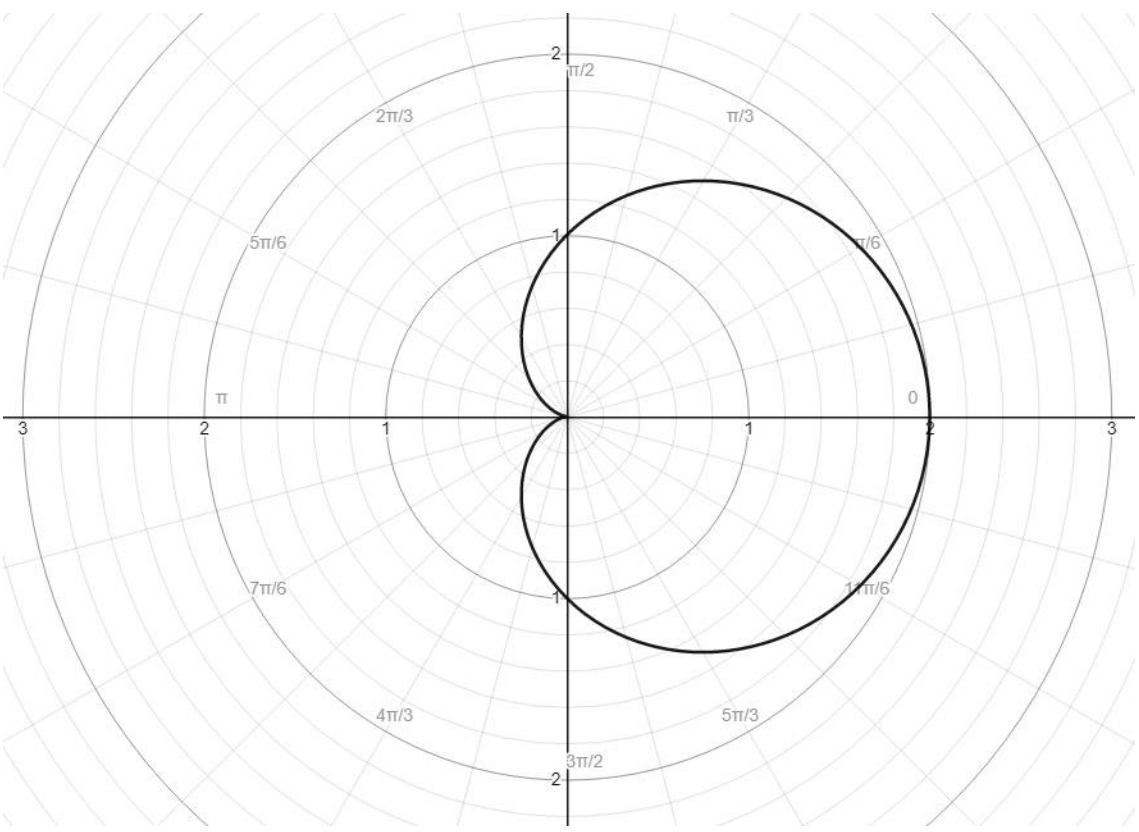
Jangan lupa! Karena fungsi $\cos\theta$ adalah fungsi periodik, maka fungsi $1 + \cos\theta$ juga merupakan fungsi periodik. Oleh sebab itu, karakteristik kurva fungsi $1 + \cos\theta$ akan mirip dengan karakteristik kurva fungsi $\cos\theta$, yaitu simetris terhadap sumbu horizontal.

Jadi, jika kita cerminkan kurva di atas terhadap sumbu horizontal, kemudian menggabungkannya dengan kurva asli, akan diperoleh hasil seperti berikut.



Itulah kurva fungsi $\rho = 1 + \cos\theta$. Walaupun, kurva di atas masih kurang sempurna karena titik-titiknya terhubung dengan garis lurus. :p

Kita tahu bahwa $\cos\theta$ merupakan fungsi dengan kurva yang mulus. Jadi, kita bisa "mempermulus" garis lurus yang menghubungkan titik-titik pada grafik sebagai garis yang lengkung dan mulus. Hasilnya adalah grafik seperti di bawah.



Itulah kurva fungsi $\rho = 1 + \cos\theta$ yang sesungguhnya... yang dibuat menggunakan bantuan Desmos.com. :p

Ya kali bisa menggambar kurva sebagus dan semulus di atas hanya dengan bermodal pulpen, penggaris, plus *mouse*! Apalagi kalau pas ujian di kelas kampus. Mana bisa disuruh menggambar bagus. :p

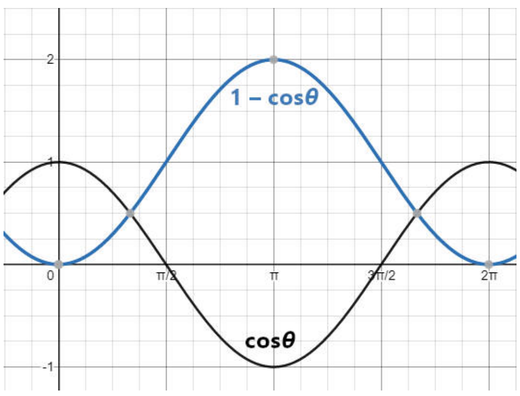
***

∴ (2) Menggambar kurva $\rho = 1 - \cos\theta$ pada koordinat kutub.

Mari kita bentuk fungsi h yang didefinisikan sebagai: $h(\theta) = 1 - \cos\theta$, dengan θ dalam radian.

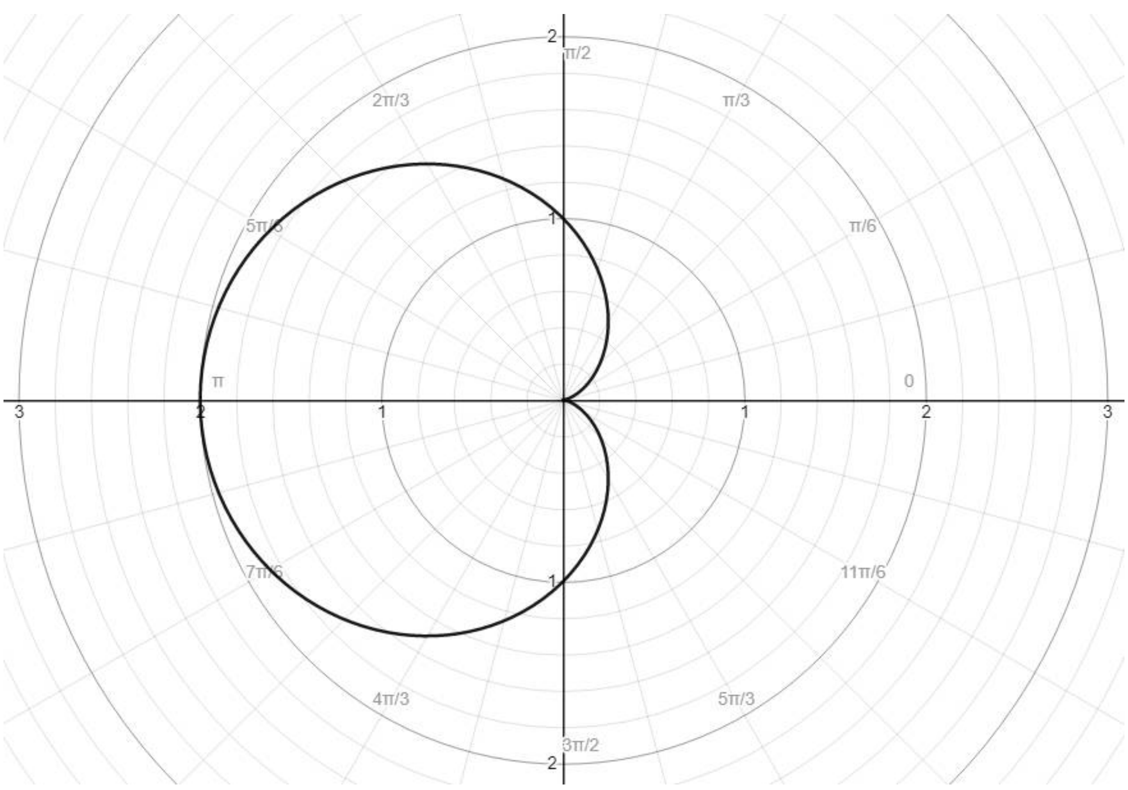
Perhatikan bahwa sebetulnya grafik fungsi h ini (pada bidang kartesius) serupa dengan grafik fungsi $\cos\theta$. Perbedaannya hanya grafik fungsi h ini kita "geser ke atas" sejauh 1 satuan kemudian "digeser lagi ke kanan". Untuk lebih jelasnya, perhatikan tabel dan grafik berikut.

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos\theta$	1	0	-1	0	1
$1 - \cos\theta$	0	1	2	1	0



Langkah-langkah untuk menggambar kurva $\rho = 1 - \cos\theta$ pada koordinat kutub identik dengan cara menggambar kurva $\rho = 1 + \cos\theta$ sebagaimana yang sudah dijelaskan pada bagian sebelum ini. Jadi, atas dasar menghemat tenaga dan kewarasan pikiran :p, langkah-langkah untuk menggambar kurva $\rho = 1 - \cos\theta$ tidak akan dijelaskan.

Berikut ini adalah kurva $\rho = 1 - \cos\theta$ yang dibuat menggunakan bantuan Desmos.com. :p

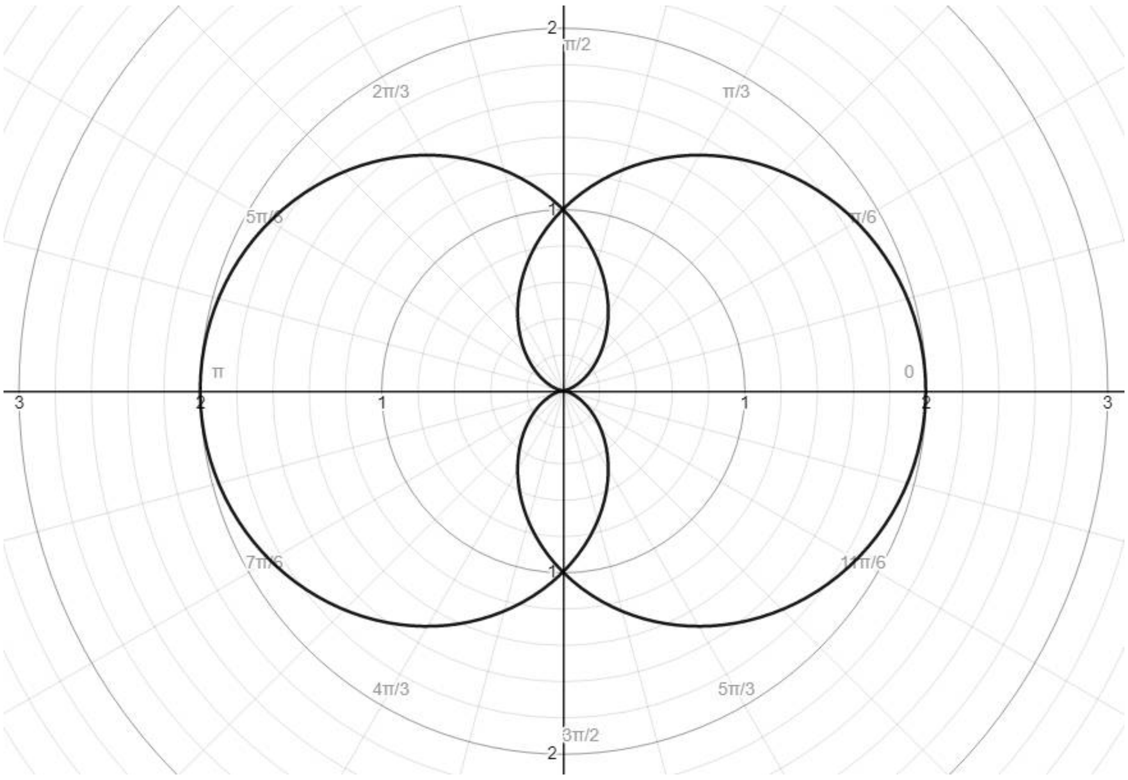


Terlihat bahwa kurva $\rho = 1 - \cos\theta$ tidak lain adalah kurva $\rho = 1 + \cos\theta$ yang dicerminkan terhadap sumbu vertikal.

***

$\therefore$ **(3) Mencari titik potong kurva $\rho = 1 + \cos\theta$ dan $\rho = 1 - \cos\theta$.**

Karena pada pembahasan poin (1) dan (2) di atas kita sudah memiliki kurva $\rho = 1 + \cos\theta$ dan $\rho = 1 - \cos\theta$, maka ya satukan saja kedua kurva tersebut ke dalam satu grafik. Hasilnya adalah sebagai berikut.



Dari grafik di atas kan kita bisa mengetahui "kira-kira" jumlah titik potong kedua kurva. Nah, untuk lebih pastinya, mari kita selidiki saja dengan menyelesaikan persamaan:

$$1 + \cos\theta_1 \;=\; 1 - \cos\theta_2$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi:

$$\cos\theta_1 \;=\; -\cos\theta_2$$

Dari sini ada 2 kemungkinan sebagai berikut.

- $\theta_1 = \theta_2$, atau
- $\theta_1 \neq \theta_2$.

Jika $\theta_1 = \theta_2$.

Jika $\theta_1 = \theta_2 = \theta'$, maka kita akan memperoleh persamaan:

$$\cos\theta' \;=\; -\cos\theta' \iff 2\cos\theta' = 0 \iff \cos\theta' = 0$$

Jika $\theta' \in [0, 2\pi]$, maka θ' yang memenuhi adalah $\dfrac{\pi}{2}$ dan $\dfrac{3\pi}{2}$.

Kemudian, dengan mensubstitusikan $\theta'_1 = \dfrac{\pi}{2}$ atau $\theta'_2 = \dfrac{3\pi}{2}$ ke fungsi $1 + \cos\theta$, maka kita akan memperoleh:

$\rho = 1 + \cos\theta'_1 = 1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 + 0 = 1.$

Jadi, kita memperoleh 2 titik potong kurva $\rho = 1 + \cos\theta$ dan $\rho = 1 - \cos\theta$, yaitu $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ dan $\left(1, \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Jika $\theta_1 \neq \theta_2$.

Jika $\theta_1 \neq \theta_2$ dan berlaku $\cos\theta_1 = -\cos\theta_2$, maka pastilah $\cos\theta_1$ dan $\cos\theta_2$ saling berlainan tanda. Dengan demikian, bisa disimpulkan bahwa θ_1 dan θ_2 terletak di kuadran yang berbeda.

Karena $\cos\theta$ adalah fungsi periodik, maka "sepertinya" terdapat banyak pilihan untuk θ_1 dan θ_2 yang dimaksud. Sebagai contoh, $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ dan $\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$. Kita memperoleh bahwa $1 + \cos\theta_1 = 1 - \cos\theta_2 = 1,5$.

Akan tetapi, karena θ_1 berada di kuadran 1 sementara θ_2 berada di kuadran 2, maka titik $(1,5,\ \theta_1)$ dan $(1,5,\ \theta_2)$ akan terletak pada kuadran yang berbeda. Dengan kata lain, titik $(1,5,\ \theta_1)$ dan $(1,5,\ \theta_2)$ tidak akan pernah bersinggungan. Hal ini akan terjadi untuk setiap θ_1 dan θ_2 dengan $\theta_1 \neq \theta_2$ yang memenuhi $(1 + \cos\theta_1 = 1 - \cos\theta_2) > 0$.

Dengan demikian, satu-satunya kemungkinan yang mungkin terjadi untuk θ_1 dan θ_2 dengan $\theta_1 \neq \theta_2$ adalah $1 + \cos\theta_1 = 1 - \cos\theta_2 = 0$. Ini dipenuhi oleh $\theta_1 = \pi$ dan $\theta_2 = 0$.

Perhatikan bahwa di dalam koordinat kutub, titik $(0, \theta_1) = (0, \pi)$ dan $(0, \theta_2) = (0, 0)$ terletak di pusat. Oleh sebab itu, dua titik tersebut tidak berada di dalam kuadran manapun.

Lebih lanjut, di dalam koordinat kutub, untuk sebarang $x \in [0, 2\pi]$, kita bisa menyatakan bahwa titik $(x, 0)$ dengan $(0, 0)$ adalah ekuivalen. Karena di dalam koordinat kutub, untuk semua $\theta \in [0, 2\pi]$, $(0, \theta)$ akan berada di pusat bidang.

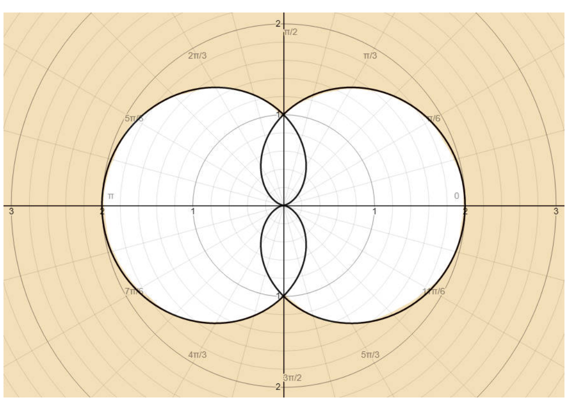
Jadi, kita memperoleh lagi tambahan titik potong kurva $\rho = 1 + \cos\theta$ dan $\rho = 1 - \cos\theta$, yaitu $(0, 0)$.

Dengan demikian, titik potong kurva $\rho = 1 + \cos\theta$ dan $\rho = 1 - \cos\theta$ berjumlah 3 titik, yaitu $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$, dan $(0, 0)$.

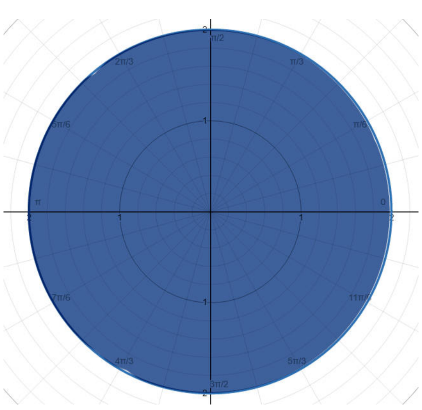
***

∴ (4) Mengarsir daerah di luar 2 kurva pada soal dan di dalam kurva $\rho = 2$

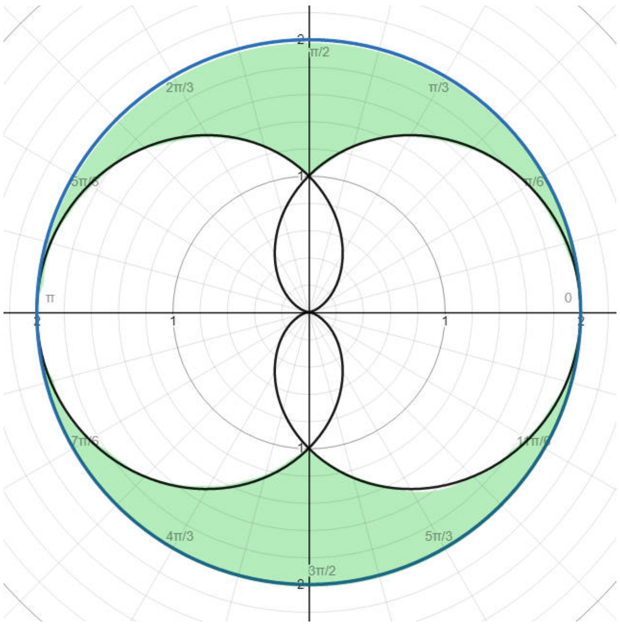
Jika mengacu pada kurva $\rho = 1 + \cos\theta$ dan $\rho = 1 - \cos\theta$ yang berada dalam satu grafik, maka daerah di luar 2 kurva tersebut adalah daerah berwarna kuning seperti ini.



Kemudian daerah di dalam kurva $\rho = 2$ apabila divisualisasikan dalam bentuk grafik akan menjadi bagian yang berwarna biru berikut.



Jadi, jika keduanya digabung maka daerah di luar kurva $\rho = 1 + \cos\theta$ dan $\rho = 1 - \cos\theta$ dan di dalam kurva $\rho = 2$ adalah daerah yang berwarna hijau ini.



■

Pembahasan Soal Nomor 4 (a)

Soal
Hitunglah *(tidak boleh menggunakan turunan!)*:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x}$$

Pembahasan
Soal limit menuju ∞ umumnya bersinggungan dengan **fungsi rasional**. Cara "umum" untuk menyelesaikan bentuk limit ini adalah dengan mengeliminasi peubah bebas derajat tertinggi pada pembilang dan penyebut.

***

Pada soal ini, kita memiliki fungsi rasional $\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x}$. Jika fungsi tersebut dijabarkan akan diperoleh:

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x} = \left(\frac{x^2}{(x+1)^2}\right)^{x} = \left(\frac{x^2}{x^2+2x+1}\right)^{x}$$

Terlihat bahwa peubah bebas derajat tertinggi pada pembilang dan penyebut adalah x^2. Untuk itu, kita akan mencoba untuk mengeliminasi x^2 pada pembilang dan penyebut dengan mengalikan pembilang dan penyebut dengan $(1/x^2)^x$.

Ingat! Karena $x \to \infty$, maka kita boleh menganggap x sebagai suatu bilangan real positif yang amat besar, misalnya $x = 1.000.000.000.000.000.000.000$. Jika x adalah bilangan real positif yang sangat besar nilainya, maka nilai $1/x$ tidak akan mungkin $= 0$. Akibatnya, $(1/x^2)^x$ juga tidak mungkin $= 0$. :D

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^2}{x^2+2x+1}\right)^{x} &= \frac{(1/x^2)^x}{(1/x^2)^x}\cdot\left(\frac{x^2}{x^2+2x+1}\right)^{x}\\
&= \left(\frac{(1/x^2)\cdot x^2}{(1/x^2)\cdot(x^2+2x+1)}\right)^{x}\\
&= \left(\frac{1}{1+2/x+1/x^2}\right)^{x}
\end{aligned}$$

Sebetulnya, dari sini bentuk fungsi rasional menjadi terlihat lebih sederhana. Akan tetapi, karena fungsi rasional tersebut masih ada berpangkat x, akibatnya pengerjaan menjadi buntu. Masuklah kita dalam jebakan soal limit Kalkulus. :p

***

Oke! Mungkin cara yang dipaparkan di atas itu kurang tepat untuk menyelesaikan limit yang dimaksud. Kita harus mencoba cara lain karena tidak ada yang namanya kesuksesan apabila hobi berputus asa. :p

Mari kita cermati lagi bentuk $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x}$ pada soal.

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x} &= \lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}\right)^{2}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}.
\end{aligned}$$

Oke! Sekarang, mari kita fokuskan perhatian pada $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$!

Nah, kalau kita tidak terlalu "*kuper*" dengan dunia per-limit-an di Kalkulus, kita bakal *ngeh* kalau bentuk $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ serasa tidak asing.

Lebih tepatnya, bentuk limit tersebut mirip dengan suatu limit yang istimewa di Kalkulus, yaitu:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Mungkin ada yang bertanya-tanya. Kenapa $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$?

Jawaban untuk pertanyaan tersebut termuat di lembar akhir berkas pembahasan ini. Sekadar informasi, untuk memahami jawaban tersebut dibutuhkan teori-teori yang diajarkan di mata kuliah Pengantar Analisis Real. :D

***

Perhatikan bahwasanya:

$$1+\frac{1}{x} = \frac{x}{x}+\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

Sehingga dengan demikian kita memperoleh persamaan:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = e.$$

Nah, terlihat bahwa $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ itu mirip sekali dengan $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ kan?

Apakah mereka saling "bersaudara"?

Oh ya jelas dong! Mereka berdua saling "bersaudara"! :D

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{x}{x+1}}\right)^x \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(1)^x}{(\frac{x}{x+1})^x} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x} \\
&= \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

Jadi, kita memperoleh hasil bahwa $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \frac{1}{e}$.

Dengan demikian:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x} &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x \cdot \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x \\
&= \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{e} \\
&= \frac{1}{e^2}
\end{aligned}$$

Jadi, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x} = \frac{1}{e^2}$.

■

Pembahasan Soal Nomor 4 (b)

Soal
Hitunglah *(tidak boleh menggunakan turunan!)*:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\tan\left(1-\sqrt{x-1}\right)}{x^2-3x+2}$$

Pembahasan
Soal limit ini terlihat "menantang" karena merupakan perpaduan fungsi rasional dan fungsi trigonometri. Sebagai permulaan, kita bisa mencoba menyederhanakan bentuk limit tersebut.

Perhatikan bahwa fungsi polinomial x^2-3x+3 bisa kita faktorkan sebagai berikut.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\tan\left(1-\sqrt{x-1}\right)}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{\tan\left(1-\sqrt{x-1}\right)}{(x-2)(x-1)}.$$

***

Setelah disederhanakan, terlihat bahwa $(x-1)$ termuat di bagian penyebut dan pembilang. Insting mengatakan bahwa $(x-1)$ ini bisa kita substitusikan.

Misal kita substitusikan $y=x-1$. Dengan demikian kita juga memperoleh $y-1=x-2$.

Selanjutnya, jika dibentuk $\lim\limits_{x\to 2} y$, maka kita akan memperoleh:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} y &= \lim_{x\to 2} x-1\\ &= 2-1\\ &= 1.\end{aligned}$$

Dengan demikian, ketika $x\to 2$, maka $y\to 1$. Jadi, kita akan memperoleh:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\tan\left(1-\sqrt{x-1}\right)}{x^2-3x+2} = \lim_{y\to 1} \frac{\tan\left(1-\sqrt{y}\right)}{(y-1)(y)}.$$

***

Setelah mensubstitusikan $y=x-1$, bentuk limit pada soal menjadi lebih sederhana. Akan tetapi, bagian pembilang menyisakan bentuk $\tan\left(1-\sqrt{y}\right)$ yang sepertinya susah untuk "diurai".

Oleh sebab itu, kita coba mensubstitusikan $z=1-\sqrt{y}$ agar $\tan\left(1-\sqrt{y}\right)$ berubah menjadi $\tan(z)$ yang berwujud lebih sederhana.

Jika, $z=1-\sqrt{y}$ maka kita akan memperoleh:

$$\begin{aligned}z=1-\sqrt{y} &\iff z-1=-\sqrt{y}\\ &\iff -z+1=\sqrt{y}\\ &\iff (-z+1)^2=y\\ &\iff (1-z)^2=y\end{aligned}$$

Jadi, jika $z=1-\sqrt{y}$, maka kita akan memperoleh $y=(1-z)^2$.

Selanjutnya, jika dibentuk $\lim\limits_{y\to 1} z$, maka kita akan memperoleh:

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 1} z &= \lim_{y\to 1} 1-\sqrt{y}\\ &= 1-\sqrt{1}\\ &= 1-1\\ &= 0.\end{aligned}$$

Dengan demikian, ketika $y\to 1$, maka $z\to 0$. Jadi, kita akan memperoleh:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\tan\left(1-\sqrt{x-1}\right)}{x^2-3x+2} = \lim_{y\to 1} \frac{\tan\left(1-\sqrt{y}\right)}{(y-1)(y)} = \lim_{z\to 0} \frac{\tan(z)}{\left((1-z)^2-1\right)(1-z)^2}.$$

***

Setelah mensubstitusikan $z = 1 - \sqrt{y}$, bentuk limit pada soal menjadi lebih sederhana. Akan tetapi, bagian penyebut malah "terlihat" menjadi lebih rumit.

Tapi, tenang! Yang rumit itu memang hanya yang terlihat saja, karena sesungguhnya $((1-z)^2 - 1)(1-z)^2$ dapat kita urai dengan mudah. :D

Berdasarkan pemfaktoran $(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$, kita akan memperoleh:

$$\begin{aligned}((1-z)^2 - 1) &= ((1-z)^2 - (1)^2) \\ &= ((1-z)+1)\,((1-z)-1) \\ &= (2-z)(-z)\end{aligned}$$

Jadi, $((1-z)^2 - 1) = (2-z)(-z)$.

Kembali ke $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\tan(z)}{((1-z)^2-1)(1-z)^2}$, kita akan memperoleh:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0} \frac{\tan(z)}{((1-z)^2-1)(1-z)^2} &= \lim_{z\to 0} \frac{\tan(z)}{(2-z)(-z)(1-z)^2} \\ &= \lim_{z\to 0} \left\{ \frac{\tan(z)}{(-z)} \cdot \frac{1}{(2-z)(1-z)^2} \right\} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{\tan(z)}{(-z)} \cdot \lim_{z\to 0} \frac{1}{(2-z)(1-z)^2} \\ &= -\left(\lim_{z\to 0} \frac{\tan(z)}{z} \right) \cdot \frac{1}{(2-0)(1-0)^2} \\ &= -(1) \cdot \frac{1}{(2)(1)^2} \\ &= (-1) \cdot \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ingat bahwa:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\tan\left(1 - \sqrt{x-1}\right)}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{y\to 1} \frac{\tan\left(1-\sqrt{y}\right)}{(y-1)(y)} = \lim_{z\to 0} \frac{\tan(z)}{((1-z)^2-1)(1-z)^2}.$$

Jadi, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\tan\left(1 - \sqrt{x-1}\right)}{x^2 - 3x + 2} = -\dfrac{1}{2}$.

■

Pembahasan Soal Nomor 4 (c)

Soal
Hitunglah *(tidak boleh menggunakan turunan!)*:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{2x} + 1 - 2^{x+1}}{2x}$$

Pembahasan
Sewaktu mengerjakan soal ini untuk yang pertama kali, insting yang muncul di otakku adalah mensubstitusikan $2x$ sebagai y. Karena $x \to 0$, maka $2x \to 0$. Sehingga dengan demikian, $2x = y \to 0$.

Jadi, dengan mensubstitusikan $2x$ sebagai y, maka bentuk limit pada soal akan menjadi seperti di bawah ini.

$$\lim_{y\to 0} \frac{3^{y} + 1 - 2^{\left(\frac{y}{2}+1\right)}}{y}$$

Nah, di sinilah pengerjaan menjadi buntu karena aku tidak menemukan cara yang tepat untuk "mengurai" $2^{\left(\frac{y}{2}+1\right)}$. Sepertinya, insting untuk mensubstitusikan $2x$ sebagai y bukanlah hal yang tepat. Aku masuk perangkap soal ujian Kalkulus. :p

***

Bertahun-tahun kemudian. Setelah lama mendalami Kalkulus 1, akhirnya aku menemukan cara yang tepat untuk menyelesaikan soal limit ini. Bahkan, ternyata soal limit ini sangat mudah diselesaikan dengan waktu kurang dari 3 menit! Wow!

Untuk menyelesaikan soal limit ini dengan mudah, cepat, tepat, serta efisien :p, kita harus tahu macam-macam bentuk limit fungsi yang ekuivalen dengan suatu fungsi bernilai real (*real valued function*). Untuk soal limit ini, kita harus tahu bahwa:

> Untuk sebarang $a \in \mathbb{R}$, maka $\ln a = \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$.

Menggunakan sifat pada kotak kuning di atas, kita akan mencoba untuk menyelesaikan limit pada soal tanpa menggunakan turunan (metode L'Hospital).

***

Mari kita perhatikan $\lim_{x\to 0} \frac{3^{2x} + 1 - 2^{x+1}}{2x}$!

Kita jelas tahu bahwa $2 - 1 = 1$ kan?
Karena operasi pengurangan pada bilangan real bersifat komutatif, maka $2-1$ akan ekuivalen dengan $-1+2$. Ya kan?
Dengan demikian, kita punya $-1 + 2 = 1$.
Ini pelajaran matematika dasar yang mungkin sudah diajarkan di tingkat SD atau SMP. :D

Nah, selanjutnya perhatikan bahwa ada angka 1 yang berada di tengah-tengah jumlahan $3^{2x} + 1 - 2^{x+1}$.
Dengan demikian, kita bisa menyatakan $3^{2x} + 1 - 2^{x+1}$ sebagai $3^{2x} + (-1 + 2) - 2^{x+1}$.

Dengan demikian, bentuk $\lim_{x\to 0} \frac{3^{2x} + 1 - 2^{x+1}}{2x}$ akan menjadi seperti di bawah.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{3^{2x} + 1 - 2^{x+1}}{2x} &= \lim_{x\to 0} \frac{3^{2x} + (-1 + 2) - 2^{x+1}}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(3^{2x} - 1) \ + \ (2 - 2^{x+1})}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \left\{ \left(\frac{3^{2x} - 1}{2x} \right) \ + \ \left(\frac{2 - 2^{x+1}}{2x} \right) \right\} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3^{2x} - 1}{2x} \ + \ \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2^{x+1}}{2x}
\end{aligned}$$

Dari penjabaran di atas kita memperoleh persamaan ini.

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{2x} + 1 - 2^{x+1}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{3^{2x} - 1}{2x} + \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2^{x+1}}{2x}$$

Selanjutnya, kita akan menghitung nilai $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{2x} - 1}{2x}$ dan $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - 2^{x+1}}{2x}$.

***

Untuk $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{2x} - 1}{2x}$, kita akan mulai dengan mensubstitusi $2x$ dengan y. Karena $x \to 0$, maka $2x \to 0$. Dengan demikian $y = 2x \to 0$.

Jadi, dengan mensubstitusikan $y = 2x$, maka kita akan memperoleh persamaan ini.

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{2x} - 1}{2x} = \lim_{y\to 0} \frac{3^{y} - 1}{y}$$

Berdasarkan sifat pada kotak kuning di atas, kita akan memperoleh persamaan ini.

$$\lim_{y\to 0} \frac{3^{y} - 1}{y} = \ln 3$$

Karena $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{2x} - 1}{2x} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{3^{y} - 1}{y}$, maka kita akan memperoleh persamaan ini.

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{2x} - 1}{2x} = \ln 3$$

***

Untuk $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - 2^{x+1}}{2x}$, terlihat bahwa pembilang dan penyebut merupakan kelipatan 2. Oleh sebab itu, mari kita jabarkan.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2 - 2^{x+1}}{2x} &= \lim_{x\to 0} \frac{2 - (2^{x} \cdot 2)}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot (1 - 2^{x})}{2 \cdot (x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2^{x}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(-1) \cdot (2^{x} - 1)}{x} \\
&= -\lim_{x\to 0} \frac{2^{x} - 1}{x}
\end{aligned}$$

Dari penjabaran di atas kita memperoleh persamaan ini.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 - 2^{x+1}}{2x} = -\lim_{x\to 0} \frac{2^{x} - 1}{x}$$

Berdasarkan sifat pada kotak kuning di atas, kita akan memperoleh persamaan ini.

$$-\lim_{x\to 0} \frac{2^{x} - 1}{x} = -\ln 2$$

Karena $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - 2^{x+1}}{2x} = -\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{x} - 1}{x}$, maka kita akan memperoleh persamaan ini.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 - 2^{x+1}}{2x} = -\ln 2$$

***

Berdasarkan uraian di atas, kita memperoleh 2 persamaan berikut.

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{2x} - 1}{2x} = \ln 3$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - 2^{x+1}}{2x} = -\ln 2$

Karena $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{2x} + 1 - 2^{x+1}}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{2x} - 1}{2x} + \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - 2^{x+1}}{2x}$, maka kita akan memperoleh ini.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{3^{2x} + 1 - 2^{x+1}}{2x} &= \lim_{x \to 0} \frac{3^{2x} - 1}{2x} + \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2^{x+1}}{2x} \\
&= \ln 3 - \ln 2 \\
&= \ln \left(\frac{3}{2} \right)
\end{aligned}
$$

Jadi, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{2x} + 1 - 2^{x+1}}{2x} = \ln \left(\dfrac{3}{2} \right)$.

■

Bukti Sifat 1

Sifat
Untuk sebarang $a \in \mathbb{R}$, maka $\ln a = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$.

Pembahasan
Kita nyatakan $a^x - 1$ sebagai y.
Dengan kata lain, kita substitusikan $a^x - 1$ dengan y.
Jadi, $y = a^x - 1$.

Dari persamaan $y = a^x - 1$ kita bisa mendapatkan $y + 1 = a^x$.
Dengan kata lain, $x = \log_a y + 1$.

Dengan kata lain, $x = \dfrac{\ln(y+1)}{\ln a}$.

***

Kemudian perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} y &= \lim_{x \to 0} (a^x - 1) \\
&= \left(\lim_{x \to 0} a^x\right) - 1 \\
&= a^0 - 1 \\
&= 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Jadi, ketika $x \to 0$, maka $y \to 0$.

Dengan demikian, kita memperoleh:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{y \to 0} \frac{y}{\left(\frac{\ln(y+1)}{\ln a}\right)} \\
&= \lim_{y \to 0} \left\{ y \ \cdot \ \frac{1}{\left(\frac{\ln(y+1)}{\ln a}\right)} \right\} \\
&= \lim_{y \to 0} \left\{ y \ \cdot \ \frac{\ln a}{\ln(y+1)} \right\} \\
&= \lim_{y \to 0} \left\{ \frac{1}{1/y} \ \cdot \ \frac{\ln a}{\ln(y+1)} \right\} \\
&= \lim_{y \to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{y} \cdot \ln(y+1)} \\
&= \lim_{y \to 0} \frac{\ln a}{\ln(y+1)^{\frac{1}{y}}} \\
&= \frac{\lim\limits_{y \to 0} \ln a}{\lim\limits_{y \to 0} \ln(y+1)^{\frac{1}{y}}} \\
&= \frac{\lim\limits_{y \to 0} \ln a}{\ln\left(\lim\limits_{y \to 0} (y+1)^{\frac{1}{y}}\right)}
\end{aligned}$$

Karena $\lim\limits_{y \to 0} \ln a = \ln a$ dan $\lim\limits_{y \to 0} (y+1)^{\frac{1}{y}} = e$ maka:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ln a}{\ln e} \\
&= \frac{\ln a}{1} \\
&= \ln a
\end{aligned}$$

Jadi, diperolehlah $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

■

Bukti Sifat 2

Sifat
$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

Pembahasan
Sebetulnya, untuk memahami kenapa $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ itu membutuhkan pemahaman teori-teori yang diajarkan di mata kuliah **Pengantar Analisis Real**. Di sini kita hanya akan menyebutkan teori-teori tersebut secara sekilas saja. :)

Untuk membuktikan kenapa $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, kita terlebih dahulu harus menyinggung tentang **barisan bilangan real (*sequence of real number*)**.

Definisi. Barisan Bilangan Real.
Barisan bilangan real itu adalah fungsi dari $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ yang *image*-nya termuat di dalam suatu himpunan bagian dari $\mathbb{R}$.

Jika $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ adalah barisan dan jika $a_n = f(n)$ untuk setiap $n\in\mathbb{N}$, maka kita dapat menyatakan barisan f sebagai (a_n) atau $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...)$

Contoh.

- $\left(n^2\right) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, ...)$
- $(\pi) = (\pi, \pi, \pi, \pi, ...)$ adalah barisan konstan.
- $\left(4n^2\right) = (4, 16, 36, 64, 100, ...)$.
  Barisan $\left(4n^2\right)$ disebut barisan bagian (**barisan bilangan real (*subsequence*)**) dari barisan $\left(n^2\right)$ karena $\left(4n^2\right)\subset\left(n^2\right)$.

Kemudian di barisan bilangan real juga terdapat **barisan bilangan real (*limit*)** yang definisinya sebagai berikut.

Definisi. Barisan Bilangan Real yang Memiliki Limit.
Barisan bilangan real (a_n) dikatakan **memiliki limit** jika dan hanya jika terdapat $L\in\mathbb{R}$ sehingga untuk sebarang $\epsilon > 0$ akan selalu terdapat $M\in\mathbb{N}$, sedemikian sehingga untuk setiap $n\geq M$ akan berlaku $|a_n - L| < \epsilon$.

Jika kondisi di atas terpenuhi, maka barisan (a_n) dikatakan memiliki limit yang bernilai L atau barisan (a_n) dikatakan konvergen ke L.

Contoh.
Barisan $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ memiliki limit yang bernilai 1.
Karena untuk sebarang $\epsilon > 0$ kita selalu dapat memilih $M\in\mathbb{N}$ yang memenuhi syarat $M > \epsilon$ sedemikian sehingga untuk setiap $n\geq M$ akan berlaku $\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \epsilon$.

***

Selanjutnya, kita akan fokus memperhatikan barisan $\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$.

Kita akan **membuktikan** bahwa barisan tersebut memiliki limit.

Sebagai "pemanasan" mungkin kita bisa menjabarkan suku-suku barisan $\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$ terlebih dahulu.

$$\begin{aligned}
\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) &= \left(\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \left(1+\frac{1}{4}\right)^4, ...\right) \\
&= \left((2)^1, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, ...\right) \\
&= \left(2\ ,\ \frac{9}{4}\ ,\ \frac{64}{27}\ ,\ \frac{625}{256}\ ,\ ...\right) \\
&= \left(2\ ,\ 2\frac{1}{4}\ ,\ 2\frac{10}{27}\ ,\ 2\frac{113}{256}\ ,\ ...\right)
\end{aligned}$$

***

Perhatikan bahwa **suku-suku** barisan $\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$ adalah:

$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \left(1+\frac{1}{4}\right)^4, ..., \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, ...$

Perhatikan bahwa suku-suku tersebut berbentuk $(a+b)^n$ dengan $a=1$ dan $b=\frac{1}{n}$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$.

Menggunakan **teorema binomial Newton**, kan kita bisa menjabarkan $(a+b)^n$ sebagai:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + ... + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

dengan $\binom{p}{q} = \frac{p!}{q!(p-q)!}$.

> **Pengingat.**
> Untuk yang lupa dengan $\binom{p}{q}$, contohnya $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35.$

Jika $a=1$, maka jelas bahwa $a^n = 1$ untuk apapun $n \in \mathbb{N}$. Dengan demikian:

$$(1+b)^n = \binom{n}{0}b^0 + \binom{n}{1}b^1 + \binom{n}{2}b^2 + \binom{n}{3}b^3 + ... + \binom{n}{n-1}b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Karena $\binom{n}{0} = 1$, maka:

$$(1+b)^n = b^0 + \binom{n}{1}b^1 + \binom{n}{2}b^2 + \binom{n}{3}b^3 + ... + \binom{n}{n-1}b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Karena $b^0 = 1$, maka:

$$(1+b)^n = 1 + \binom{n}{1}b^1 + \binom{n}{2}b^2 + \binom{n}{3}b^3 + ... + \binom{n}{n-1}b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Jadi, untuk $b = \frac{1}{n}$ akan diperoleh:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + ... + \binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{(n-1)}} + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

Karena $\binom{n}{1}\frac{1}{n} = 1$, maka:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 \ + \ 1 \ + \ \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} \ + \ \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + ... + \binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{(n-1)}} \ + \ \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\ &= 2 \ + \ \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} \ + \ \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + ... + \binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{(n-1)}} \ + \ \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}\end{aligned}$$

Dari bentuk di atas, elemen 2, $\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}$, $\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}$, ..., $\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$ disebut sebagai **suku penjabaran** $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Sebagai contoh, untuk $n = 1, 2, 3, 4$, dan $m \in \mathbb{N}$ kita akan mendapatkan hasil penjabaran seperti berikut.

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$$
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \ + \ \binom{2}{2}\frac{1}{2^2}$$
$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2 \ + \ \binom{3}{2}\frac{1}{3^2} \ + \ \binom{3}{3}\frac{1}{3^3}$$
$$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 2 \ + \ \binom{4}{2}\frac{1}{4^2} \ + \ \binom{4}{3}\frac{1}{4^3} \ + \ \binom{4}{4}\frac{1}{4^4}$$
$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 2 \ + \ \binom{m}{2}\frac{1}{m^2} \ + \ \binom{m}{3}\frac{1}{m^3} \ + \ ... \ + \ \binom{m}{m-1}\frac{1}{m^{m-1}} \ + \ \binom{m}{m}\frac{1}{m^m}$$

Dari penjabaran di atas diketahui bahwa semakin besar nilai n maka jumlah suku-sukunya akan lebih banyak. Secara umum, jika penjabaran $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ terdiri dari m suku, maka penjabaran $\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}$ akan terdiri dari $m+1$ suku.

***

Selanjutnya, kita akan menelaah bentuk penjabaran $\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}$.

Di sini kita mengasumsikan bahwa $n \to +\infty$. Untuk $i = 2$, kita memperoleh bentuk penjabaran seperti di bawah ini.

$$\begin{aligned}\binom{n}{2}\frac{1}{n^2} &= \left(\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}\right)\frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{2!}\left(\frac{n!}{(n-2)!}\right)\frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{2!}\left(\frac{n\cdot(n-1)\cdot\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}}\right)\frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{2!}\left(\left(\frac{n}{n}\right)\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2!}\left(\left(\frac{n}{n}\right)\cdot\left(\frac{n}{n}-\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2!}\left((1)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Untuk $i = 3, 4, 5$ hasil penjabarannya adalah seperti di bawah ini.

$$\begin{aligned}\binom{n}{3}\frac{1}{n^3} &= \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \\ \binom{n}{4}\frac{1}{n^4} &= \frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right) \\ \binom{n}{5}\frac{1}{n^5} &= \frac{1}{5!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{4}{n}\right)\end{aligned}$$

Dari sini sudah mulai terlihat ya, seperti apa pola penjabaran $\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}$.

Untuk lebih pasti, mari kita simak penjabaran untuk suatu $i \in \mathbb{N}$ dengan $i \leq n$ sebagaimana di bawah ini.

$$\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} = \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{(i-2)}{n}\right)\left(1-\frac{(i-1)}{n}\right)$$

Jadi, untuk suatu $m \in \mathbb{N}$, kita akan memperoleh penjabaran sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = & \left\{2\right\} \\ & + \left\{\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\right\} \\ & + \left\{\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\right\} \\ & \ldots \\ & + \left\{\frac{1}{(m-1)!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{((m-1)-2)}{m}\right)\left(1-\frac{((m-1)-1)}{m}\right)\right\} \\ & + \left\{\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{((m)-2)}{m}\right)\left(1-\frac{((m)-1)}{m}\right)\right\}\end{aligned}$$

***

Untuk suatu $m \in \mathbb{N}$, kita ingin membandingkan $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ dan $\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{(m+1)}$.
Oleh sebab itu, mari kita jabarkan

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = & \left\{2\right\} \\ & + \left\{\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\right\} \\ & + \left\{\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\right\} \\ & \ldots \\ & + \left\{\frac{1}{(m-1)!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{((m-1)-2)}{m}\right)\left(1-\frac{((m-1)-1)}{m}\right)\right\} \\ & + \left\{\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{((m)-2)}{m}\right)\left(1-\frac{((m)-1)}{m}\right)\right\}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} = & \left\{2\right\} \\ & + \left\{\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\right\} \\ & + \left\{\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\left(1-\frac{2}{m+1}\right)\right\} \\ & \ldots \\ & + \left\{\frac{1}{(m-1)!}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\left(1-\frac{2}{m+1}\right)\cdots\left(1-\frac{((m-1)-2)}{m+1}\right)\left(1-\frac{((m-1)-1)}{m+1}\right)\right\} \\ & + \left\{\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\left(1-\frac{2}{m+1}\right)\cdots\left(1-\frac{((m)-2)}{m+1}\right)\left(1-\frac{((m)-1)}{m+1}\right)\right\} \\ & + \left\{\frac{1}{(m+1)!}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\left(1-\frac{2}{m+1}\right)\cdots\left(1-\frac{((m+1)-3)}{m+1}\right)\left(1-\frac{((m+1)-2)}{m+1}\right)\left(1-\frac{((m+1)-}{m+1}\right.\end{aligned}$$

Berdasarkan sifat $(m+1) > m > 0$ kita dapat merinci bermacam akibat sebagai berikut:

$\Longrightarrow$ Akibatnya, $\left(\frac{1}{m}\right) > \left(\frac{1}{m+1}\right) > 0$.

$\Longrightarrow$ Akibatnya, untuk sembarang $x \in \mathbb{N}$ akan berlaku $\left(\frac{x}{m}\right) > \left(\frac{x}{m+1}\right)$.

$\Longrightarrow$ Akibatnya, untuk sembarang $x \in \mathbb{N}$ akan berlaku $-\left(\frac{x}{m+1}\right) > -\left(\frac{x}{m}\right)$.

$\Longrightarrow$ Akibatnya, untuk sembarang $x \in \mathbb{N}$ akan berlaku $\left(1-\frac{x}{m+1}\right) > \left(1-\frac{x}{m}\right)$.

Dengan demikian kita bisa menyimpulkan bahwa:

$$\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\left(1-\frac{2}{m+1}\right)\left(1-\frac{3}{m+1}\right)\ldots \quad > \quad \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)\ldots$$

Dengan demikian kita juga bisa menyimpulkan bahwa:

$$\left\{\frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\left(1-\frac{2}{m+1}\right)\left(1-\frac{3}{m+1}\right)\right\}\ldots \quad > \quad \left\{\frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)\ldots\right\}$$

Perhatikan juga bahwa penjabaran $\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}$ memuat suku bernilai positif yang mengandung perkalian dari $\frac{1}{(m+1)!}$.

Dengan demikian kita bisa menyimpulkan bahwa:

Untuk sebarang $m \in \mathbb{N}$ akan berlaku: $\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} > \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$

Jadi, barisan $\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right) = \left(\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}, \left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}, \left(1+\frac{1}{3}\right)^{3}, \ldots\right)$ memiliki sifat:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1} < \left(1+\frac{1}{2}\right)^{2} < \left(1+\frac{1}{3}\right)^{3} < \ldots < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} < \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} < \ldots$$

Dengan kata lain, dengan sifat sebagaimana di atas, kita bisa menyatakan bahwa barisan $\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)$ adalah **barisan naik (*increasing sequence*)**

***

Selanjutnya, perhatikan lagi penjabaran $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ ini.

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = &\left\{2\right\} \\ &+\left\{\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\right\} \\ &+\left\{\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\right\} \\ &\ldots \\ &+\left\{\frac{1}{(m-1)!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{((m-1)-2)}{m}\right)\left(1-\frac{((m-1)-1)}{m}\right)\right\} \\ &+\left\{\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{((m)-2)}{m}\right)\left(1-\frac{((m)-1)}{m}\right)\right\}\end{aligned}$$

Karena semua sukunya bernilai positif, maka jelas ya bahwa $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} > 2$.

Kemudian, untuk $\left(1-\dfrac{1}{m}\right)$, $\left(1-\dfrac{2}{m}\right)$, $\left(1-\dfrac{3}{m}\right)$, ... dst.

Perhatikan bahwa jika $0 < i < m$, maka $0 < \left(\dfrac{i}{m}\right) < 1$. Dengan demikian $\left(1-\dfrac{i}{m}\right) < 1$.

Dalam bilangan real juga terdapat sifat bahwa $\dfrac{1}{m!} \leq \dfrac{1}{2^{m-1}}$.

Dengan demikian kita akan memperoleh:

$$\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right) \leq \frac{1}{2^{2-1}}\cdot 1 \iff \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right) \leq \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) \leq \frac{1}{2^{3-1}}\cdot 1\cdot 1 \iff \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) \leq \frac{1}{2^2}$$
$$\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right) \leq \frac{1}{2^{4-1}}\cdot 1\cdot 1\cdot 1 \iff \frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right) \leq \frac{1}{2^3}$$

... dan seterusnya.

Jadi, kita akan memperoleh:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m &= \left\{2\right\}\\ &+\left\{\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\right\}\\ &+\left\{\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\right\}\\ &\cdots\\ &+\left\{\frac{1}{(m-1)!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{((m-1)-2)}{m}\right)\left(1-\frac{((m-1)-1)}{m}\right)\right\}\\ &+\left\{\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{((m)-2)}{m}\right)\left(1-\frac{((m)-1)}{m}\right)\right\}\\ &<\\ &\left\{2\right\}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{(m-1)-1}}+\frac{1}{2^{m-1}}\end{aligned}$$

Menggunakan sifat deret geometri, kita akan memperoleh:
$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{(m-1)-1}}+\dfrac{1}{2^{m-1}} \;=\; 1-\dfrac{1}{2^{m-1}}!$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m &= \left\{2\right\} \\ &+ \left\{\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\right\} \\ &+ \left\{\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\right\} \\ &\ldots \\ &+ \left\{\frac{1}{(m-1)!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{((m-1)-2)}{m}\right)\left(1-\frac{((m-1)-1)}{m}\right)\right\} \\ &+ \left\{\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{((m)-2)}{m}\right)\left(1-\frac{((m)-1)}{m}\right)\right\} \\ &< \\ &\left\{2\right\} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{(m-1)-1}} + \frac{1}{2^{m-1}} \\ &< \\ &\left\{2\right\} + 1 = 3\end{aligned}$$

Dengan demikian kita bisa menyimpulkan bahwa:

> Untuk sebarang $m \in \mathbb{N}$ akan berlaku: $2 \leq \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 3$
>
> Dengan kata lain, dengan sifat sebagaimana di atas, kita bisa menyatakan bahwa barisan $\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$ adalah **barisan terbatas (*bounded sequence*)**

***

Nah, berdasarkan uraian di atas kita memiliki sifat bahwa:

- Barisan $\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$ adalah barisan naik.
- Barisan $\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$ adalah barisan terbatas.

Kemudian berdasarkan teorema:

> **Teorema**
> Jika suatu barisan bilangan real merupakan barisan naik yang terbatas, maka barisan tersebut memiliki limit, dengan nilai limitnya berada di dalam batas barisan tersebut.

Kita dapat menyimpulkan bahwa barisan $\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$ memiliki limit dan nilai limitnya berada di interval $[2, 3)$. Karena kita tidak tahu secara pasti berapa sesungguhnya nilai limit dari barisan $\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$, maka kita memberi simbol e sebagai nilai limit tersebut yang nilainya berada di antara 2 dan 3.

■