Pembahasan
Ujian Tengah Semester
TA 2004/2005

Pengantar Logika Matematika dan Himpunan

Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Gadjah Mada
Yogyakarta

Mawi Wijna *

2021

*Walaupun pembahasan soal ujian ini belum tentu benar, akan tetapi semoga ada manfaatnya meskipun sedikit. Dibuat untuk mengisi waktu luang sambil menidurkan bayi. :p

Soal

1. Diberikan $A = \{1, 2, ..., 10\}$.
   Tulis kalimat-kalimat di bawah ini menggunakan **bahasa sehari-hari**, kemudian dengan simbol logika nyatakan ingkarannya dan tentukanlah nilai kebenarannya!
   (a) $(\forall x \in A)(\exists y \in A)(x + y < 12)$
   (b) $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x + y < 12)$
   (c) $(\exists x \in A)(\forall y \in A)(x + y < 12)$
2. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dan kalimat-kalimat berikut ini!
   (a) $p \in \mathbb{R} \implies (\exists y \in \mathbb{R})(p < y \wedge p^2 > y)$
   (b) Jika dia terbukti bersalah, maka dia pasti dihukum.
3. Tulis dalam simbol logika pernyataan berikut ini!
   (a) Himpunan H mempunyai tepat satu anggota.
   (b) Sekurang-kurangnya ada dua anggota yang mempunyai sifat P.
   (c) Paling banyak ada satu anggota yang mempunyai sifat P.
4. Tanpa menggunakan tabel kebenaran tunjukan/selidikilah kebenaran pernyataan berikut!
   (a) $(p \implies q) \iff (\bar{p} \implies \bar{q})$
   (b) $(p \wedge p) \iff p$
   (c) $p \iff (\bar{p} \implies (q \wedge \bar{q}))$
5. Tunjukan, bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan irrasional!

Pembahasan Soal Nomor 1

Soal
Diberikan $A = \{1, 2, ..., 10\}$.
Tulis kalimat-kalimat di bawah ini menggunakan **bahasa sehari-hari**, kemudian dengan simbol logika nyatakan ingkarannya dan tentukanlah nilai kebenarannya!

(a) $(\forall x \in A)(\exists y \in A)(x + y < 12)$

(b) $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x + y < 12)$

(c) $(\exists x \in A)(\forall y \in A)(x + y < 12)$

Pembahasan
Soal (a)

Kalimat asli:
$(\forall x \in A)(\exists y \in A)(x + y < 12)$

Kalimat dengan bahasa sehari-hari:
Untuk setiap x yang merupakan anggota himpunan A, kita dapat menemukan y (juga merupakan anggota himpunan A) yang bersesuaian dengan x, sedemikian sehingga x ditambah y akan kurang dari 12.

Ingkaran dengan simbol logika:
$(\exists x \in A)(\forall y \in A)(x + y \geq 12)$

Nilai kebenaran dari kalimat asli:
Untuk menentukan apakah berlaku benar $(\forall x \in A)(\exists y \in A)(x + y < 12)$, maka kita dapat menyelidiki setiap kemungkinan x. Karena $x \in A$ dan $A = \{1, 2, ..., 10\}$, maka:

- Jika $x = 1$, maka kita dapat memilih $y = 1$. Karena $x + y = 1 + 1 = 2$ dan $2 < 12$, maka kalimat asli berlaku benar untuk $x = 1$.
- Jika $x = 2$, maka kita dapat memilih $y = 1$. Karena $x + y = 2 + 1 = 3$ dan $3 < 12$, maka kalimat asli berlaku benar untuk $x = 2$.
- ...
- Jika $x = 10$, maka kita dapat memilih $y = 1$. Karena $x + y = 10 + 1 = 11$ dan $11 < 12$, maka kalimat asli berlaku benar untuk $x = 10$.

Dengan demikian, untuk sebarang $x \in A$ kita dapat memilih $y = 1 \in A$, sedemikian sehingga $x+y < 12$.

Jadi, kita dapat menyimpulkan bahwa kalimat

$$(\forall x \in A)(\exists y \in A)(x + y < 12)$$

adalah benar.

■

Soal (b)

Kalimat asli:

$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x + y < 12)$

Kalimat dengan bahasa sehari-hari:

Untuk setiap x dan y yang merupakan anggota himpunan A, akan berlaku x ditambah y akan kurang dari 12.

Ingkaran dengan simbol logika:

$(\exists x \in A)(\exists y \in A)(x + y \geq 12)$

Nilai kebenaran dari kalimat asli:

Mari kita jelaskan dengan bahasa yang mudah dimengerti orang awam!

Kita ibaratkan himpunan A sebagai ember besar yang memuat 10 bola. Di dalam ember A tersebut terdapat bola bernomor 1, bola bernomor 2, bola bernomor 3, hingga bola bernomor 10.

Selanjutnya, kita siapkan 2 lembar kertas putih polos. Di pojok atas kertas pertama kita tulis kode x. Sedangkan di pojok atas kertas kedua, kita tulis kode y.

Kemudian, kita akan mengambil bola di dalam ember A sebanyak 2 kali. Pada pengambilan pertama, kita tulis angka yang tertera pada bola di kertas berkode x. Bola yang terambil tersebut kemudian dikembalikan ke dalam ember A. Pada pengambilan yang kedua, angka yang tertera pada bola kita tulis di kertas berkode y. Dengan demikian, setelah pengambilan 2 bola, di masing-masing kertas berkode x dan y tertulis suatu angka.

Sebagai contoh, misalkan pada pengambilan pertama kita memperoleh bola bernomor 2. Sedangkan pada pengambilan kedua kita memperoleh bola bernomor 7. Dengan demikian, di kertas berkode x akan tertulis angka 2 dan di kertas berkode y akan tertulis angka 7.

Perhatikan bahwa kertas berkode x dan y tersebut bisa kita pasangkan. Kita satukan dua kertas tersebut dengan distaples. Jadi, dari 2 kertas yang distaples itu, kita bisa memperoleh pasangan angka (x, y). Sebagai contoh, pada contoh sebelum ini kita memperoleh pasangan angka $(2, 7)$.

Ayo kita hitung kemungkinan pasangan (x, y). Karena ember A memuat 10 bola, maka ada 10 kemungkinan kertas berkode x bertuliskan angka yang unik. Bisa jadi, kertas berkode x bertuliskan angka 1,2,3, dst hingga 10. Kondisi yang serupa juga berlaku bagi kertas berkode y. Jadi, kita bisa menyimpulkan bahwa jumlah pasangan (x, y) yang dapat terbentuk adalah sebanyak $10 \cdot 10 = 100$ pasangan.

#

Untuk menunjukkan bahwa kalimat

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x + y < 12)$$

adalah benar, maka kita harus membuktikan bahwa untuk semua 100 kemungkinan pasangan (x, y) itu memenuhi $x + y < 12$.

Sebagai contoh, untuk pasangan $(2, 7)$. Karena $2 + 7 = 9 < 12$, maka pasangan $(2, 7)$ memenuhi $(x + y < 12)$. Kita tinggal menyelidiki untuk 99 pasangan (x, y) lagi.

Akan tetapi, untuk pasangan $(10, 7)$, karena $10 + 7 = 17 > 12$, maka pasangan $(10, 7)$ tidak memenuhi $(x + y < 12)$. Hal yang sama juga berlaku untuk pasangan $(8, 9)$, $(10, 4)$, $(9, 9)$, dll.

Karena terdapat pasangan (x, y) yang tidak memenuhi $(x + y < 12)$, maka kita dapat menyimpulkan bahwa kalimat

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x + y < 12)$$

adalah salah.

■

Soal (c)

Kalimat asli:
$(\exists x \in A)(\forall y \in A)(x + y < 12)$

Kalimat dengan bahasa sehari-hari:
Terdapat x yang merupakan anggota himpunan A, sedemikian sehingga untuk apapun y yang diambil dari himpunan A akan berlaku x ditambah y akan kurang dari 12.

Ingkaran dengan simbol logika:
$(\forall x \in A)(\exists y \in A)(x + y \geq 12)$

Nilai kebenaran dari kalimat asli:
Ada pertanyaan!

Apakah ada $x \in A$, sedemikian sehingga untuk setiap $y \in A$ akan berlaku $x + y < 12$?

Ingat! Nilai x ini tunggal, untuk apapun nilai y yang diambil.

Karena $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$, maka kita bisa "bertanya-tanya":
Apakah ada $x \in A$, sedemikian sehingga $x + 1 < 12$, $x + 2 < 12$, $x + 3 < 12$, ..., $x + 10 < 12$?

Jawabannya adalah ada!
Nilai x yang dimaksud adalah $x = 1$. Karena:

- $x + 1 \ = 1 + 1 = 2 < 12$
- $x + 2 \ = 1 + 2 = 3 < 12$
- $x + 3 \ = 1 + 3 = 4 < 12$
- ...
- $x + 10 \ = 1 + 10 = 11 < 12$

Jadi, kita dapat menyimpulkan bahwa kalimat

$$(\exists x \in A)(\forall y \in A)(x + y < 12)$$

adalah benar.

■

Pembahasan Soal Nomor 2 (a)

Soal
Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dan kalimat berikut ini!

$p \in \mathbb{R} \implies (\exists y \in \mathbb{R})(p < y \wedge p^2 > y)$

Pembahasan

Konvers
Ingat! Untuk implikasi $P \implies Q$, maka konvers-nya adalah $Q \implies P$.

Pada soal diketahui bahwa P adalah $p \in \mathbb{R}$ dan Q adalah $(\exists y \in \mathbb{R})(p < y \wedge p^2 > y)$. Sehingga dengan demikian konvers-nya adalah:

$(\exists y \in \mathbb{R})(p < y \wedge p^2 > y) \implies p \in \mathbb{R}$.

Invers
Ingat! Untuk implikasi $P \implies Q$, maka invers-nya adalah $\overline{P} \implies \overline{Q}$.

Pada soal diketahui bahwa P adalah $p \in \mathbb{R}$ dan Q adalah $(\exists y \in \mathbb{R})(p < y \wedge p^2 > y)$. Sehingga dengan demikian invers-nya adalah:

$\overline{p \in \mathbb{R}} \implies \overline{(\exists y \in \mathbb{R})(p < y \wedge p^2 > y)}$.

Ekuivalen dengan:

$p \notin \mathbb{R} \quad \implies \quad (\forall y \in \mathbb{R})(p \geq y \vee p^2 \leq y)$.

Kontraposisi
Ingat! Untuk implikasi $P \implies Q$, maka kontraposisi-nya adalah $\overline{Q} \implies \overline{P}$.

Pada soal diketahui bahwa P adalah $p \in \mathbb{R}$ dan Q adalah $(\exists y \in \mathbb{R})(p < y \wedge p^2 > y)$. Sehingga dengan demikian kontraposisi-nya adalah:

$\overline{(\exists y \in \mathbb{R})(p < y \wedge p^2 > y)} \implies \overline{p \in \mathbb{R}}$.

Ekuivalen dengan:

$(\forall y \in \mathbb{R})(p \geq y \vee p^2 \leq y) \quad \implies \quad p \notin \mathbb{R}$.

■

Pembahasan Soal Nomor 2 (b)

Soal
Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dan kalimat berikut ini!

Jika dia terbukti bersalah, maka dia pasti dihukum.

Pembahasan

Konvers
Ingat! Untuk implikasi $P \implies Q$, maka konvers-nya adalah $Q \implies P$.

Pada soal diketahui bahwa P adalah "dia terbukti bersalah" dan Q adalah "dia pasti dihukum". Sehingga dengan demikian konvers-nya adalah:

Jika dia pasti dihukum, maka dia terbukti bersalah.

Invers
Ingat! Untuk implikasi $P \implies Q$, maka invers-nya adalah $\overline{P} \implies \overline{Q}$.

Pada soal diketahui bahwa P adalah "dia terbukti bersalah" dan Q adalah "dia pasti dihukum". Sehingga dengan demikian invers-nya adalah:

Jika dia tidak terbukti bersalah, maka dia pasti tidak dihukum.

Kontraposisi
Ingat! Untuk implikasi $P \implies Q$, maka kontraposisi-nya adalah $\overline{Q} \implies \overline{P}$.

Pada soal diketahui bahwa P adalah "dia terbukti bersalah" dan Q adalah "dia pasti dihukum". Sehingga dengan demikian kontraposisi-nya adalah:

Jika dia pasti tidak dihukum, maka dia tidak terbukti bersalah.

■

Pembahasan Soal Nomor 3

Soal
Tulis dalam simbol logika pernyataan berikut ini!

(a) Himpunan H mempunyai tepat satu anggota.

(b) Sekurang-kurangnya ada dua anggota yang mempunyai sifat P.

(c) Paling banyak ada satu anggota yang mempunyai sifat P.

Pembahasan
Soal (a)

Pernyataan dalam kalimat sehari-hari:
Himpunan H mempunyai tepat satu anggota.

Pernyataan dalam simbol logika:
$(\exists x \in H)(\forall y \in H)\ [x = y]$

***

Soal (b)

Pernyataan dalam kalimat sehari-hari:
Sekurang-kurangnya ada dua anggota yang mempunyai sifat P.

Pernyataan dalam simbol logika:
$(\exists x, y)\ [(P(x) \wedge P(y)) \implies (x \neq y)]$

***

Soal (c)

Pernyataan dalam kalimat sehari-hari:
Paling banyak ada satu anggota yang mempunyai sifat P.

Pernyataan dalam simbol logika:
$(\exists x)(\forall y)\ [(P(x) \wedge P(y)) \implies (x = y)]$

■

Pembahasan Soal Nomor 4 (a)

Soal
Tanpa menggunakan tabel kebenaran tunjukan/selidikilah kebenaran pernyataan berikut!

$(p \implies q) \iff (\bar{p} \implies \bar{q})$

Pembahasan
Untuk menyelidiki apakah $(p \implies q) \iff (\bar{p} \implies \bar{q})$ berlaku benar, kita harus menyelidiki bahwa

1. $(p \implies q) \implies (\bar{p} \implies \bar{q})$ dan
2. $(\bar{p} \implies \bar{q}) \implies (p \implies q)$

keduanya berlaku benar.

Kita akan mengubah implikasi menjadi bentuk disjungsi sebagaimana berikut.

$$a \Rightarrow b \quad \equiv \quad \bar{a} \vee b$$

***

$\therefore$ **Menyelidiki** $(p \implies q) \implies (\bar{p} \implies \bar{q})$

Perhatikan bentuk $(p \implies q) \implies (\bar{p} \implies \bar{q})$!

$\therefore$ **Langkah ke-1**
Salah satu implikasi pada bentuk tersebut kita beri warna merah:
$(p \implies q) \implies (\bar{p} \implies \bar{q})$

Jika implikasi yang berwarna merah tersebut diubah menjadi bentuk disjungsi, maka akan menjadi seperti ini.
$(\bar{p} \vee q) \implies (\bar{p} \implies \bar{q})$

$\therefore$ **Langkah ke-2**
Kita lanjut memberi warna merah pada bagian yang menjadi fokus kita berikutnya. Masih bagian yang mengandung implikasi.
$(\bar{p} \vee q) \implies (\bar{p} \implies \bar{q})$

Jika implikasi yang berwarna merah tersebut diubah menjadi bentuk disjungsi, maka akan menjadi seperti ini.
$(\bar{p} \vee q) \implies (p \vee \bar{q})$

$\therefore$ **Langkah ke-3**
Kita lanjut memberi warna merah pada bagian yang menjadi fokus kita berikutnya, yaitu implikasi terakhir.
$(\bar{p} \vee q) \implies (p \vee \bar{q})$

Jika implikasi yang berwarna merah tersebut diubah menjadi bentuk disjungsi, maka akan menjadi seperti ini.
$\overline{(\bar{p} \vee q)} \vee (p \vee \bar{q})$

$\therefore$ **Langkah ke-4**
Kita lanjut memberi warna merah pada bagian yang menjadi fokus kita berikutnya, yaitu suatu bentuk negasi.
$\overline{(\bar{p} \vee q)} \vee (p \vee \bar{q})$

Bagian negasi yang berwarna merah tersebut dapat diubah menjadi bentuk seperti ini.
$(p \wedge \bar{q}) \vee (p \vee \bar{q})$

Pada akhir langkah ke-4 di atas, kita memperoleh fakta bahwa bentuk $(p \implies q) \implies (\bar{p} \implies \bar{q})$ ekuivalen dengan $(p \wedge \bar{q}) \vee (p \vee \bar{q})$.

Kita akan berhenti menyelidiki $(p \implies q) \implies (\bar{p} \implies \bar{q})$ dan beralih menyelidiki $(\bar{p} \implies \bar{q}) \implies (p \implies q)$

***

$\therefore$ **Menyelidiki** $(\bar{p} \implies \bar{q}) \implies (p \implies q)$

Dari bagian di atas, kita mendapati bahwa:

- $p \implies q \equiv \bar{p} \vee q$, dan
- $\bar{p} \implies \bar{q} \equiv p \vee \bar{q}$.

Dengan demikian, $(\bar{p} \implies \bar{q}) \implies (p \implies q)$ akan ekuivalen dengan

$(p \vee \bar{q}) \implies (\bar{p} \vee q)$

Jika bentuk implikasi di atas diubah ke bentuk disjungsi, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut.

$\overline{(p \vee \bar{q})} \vee (\bar{p} \vee q)$

Bentuk di atas ekuivalen dengan ini.

$(\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \vee q)$

***

Dari dua penyelidikan di atas kita memperoleh hasil bahwa:

- $(p \implies q) \implies (\bar{p} \implies \bar{q})$ ekuivalen dengan $(p \wedge \bar{q}) \ \vee \ (p \vee \bar{q})$.
- $(\bar{p} \implies \bar{q}) \implies (p \implies q)$ ekuivalen dengan $(\bar{p} \wedge q) \ \vee \ (\bar{p} \vee q)$.

Jika kita substitusikan $p = \text{TRUE}$ dan $q = \text{FALSE}$, akan diperoleh hasil seperti berikut.

$$\begin{aligned}(p \wedge \bar{q}) \ \vee \ (p \vee \bar{q}) &= (\text{TRUE} \wedge \text{TRUE}) \ \vee \ (\text{TRUE} \vee \text{TRUE}) \\ &= \text{TRUE} \vee \text{TRUE} \\ &= \text{TRUE}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\bar{p} \wedge q) \ \vee \ (\bar{p} \vee q) &= (\text{FALSE} \wedge \text{FALSE}) \ \vee \ (\text{FALSE} \vee \text{FALSE}) \\ &= \text{FALSE} \vee \text{FALSE} \\ &= \text{FALSE}\end{aligned}$$

Dari penjabaran di atas kita memperoleh hasil bahwa $(p \wedge \bar{q}) \vee (p \vee \bar{q}) \neq (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \vee q)$ untuk $p = \text{TRUE}$ dan $q = \text{FALSE}$.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa $(p \implies q) \iff (\bar{p} \implies \bar{q})$ adalah tidak benar.

$\blacksquare$

Pembahasan Soal Nomor 4 (b)

Soal
Tanpa menggunakan tabel kebenaran tunjukan/selidikilah kebenaran pernyataan berikut!

$(p \wedge p) \iff p$

Pembahasan
Perhatikan bahwa:

1. Untuk $p = \text{TRUE}$, maka $p \wedge p = \text{TRUE} \wedge \text{TRUE} = \text{TRUE} = p$.
2. Untuk $p = \text{FALSE}$, maka $p \wedge p = \text{FALSE} \wedge \text{FALSE} = \text{FALSE} = p$.

Jadi, kita dapat menyimpulkan bahwa $p \wedge p \equiv p$.

Dengan demikian, pernyataan

$(p \wedge p) \iff p$

akan ekuivalen dengan

$p \iff p$.

Perhatikan bahwa $p \iff p$ ekuivalen dengan $p \implies p$.

Dalam bentuk disjungsi, $p \implies p$ ekuivalen dengan $\bar{p} \vee p$.

Perhatikan bahwa:

1. Untuk $p = \text{TRUE}$, maka $\bar{p} \vee p = \text{FALSE} \wedge \text{TRUE} = \text{TRUE}$.
2. Untuk $p = \text{FALSE}$, maka $\bar{p} \vee p = \text{TRUE} \wedge \text{FALSE} = \text{TRUE}$.

Jadi, kita dapat menyimpulkan bahwa $\bar{p} \vee p$ akan selalu bernilai TRUE untuk apapun nilai kebenaran dari p.

Karena $\bar{p} \vee p$ selalu bernilai TRUE, dengan kata lain $p \implies p$ juga akan selalu bernilai TRUE.

Karena $p \implies p$ akan selalu bernilai TRUE, maka $p \iff p$ juga akan selalu bernilai TRUE.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa $(p \wedge p) \iff p$ adalah benar.

■

Pembahasan Soal Nomor 4 (c)

Soal
Tanpa menggunakan tabel kebenaran tunjukan/selidikilah kebenaran pernyataan berikut!

$p \iff (\bar{p} \implies (q \wedge \bar{q}))$

Pembahasan
Perhatikan bahwa:
Kita tahu bahwasanya berlaku benar bahwa $p \iff p$.

Dengan demikian, untuk menyelidiki kebenaran pernyataan $p \iff (\bar{p} \implies (q \wedge \bar{q}))$, kita akan menyelidiki apakah benar bahwa $(\bar{p} \implies (q \wedge \bar{q})) \equiv p$.

Perhatikan $(q \wedge \bar{q})$!
Perhatikan bahwa $(q \wedge \bar{q})$ akan selalu bernilai FALSE untuk apapun nilai kebenaran q.

Dengan demikian, $(\bar{p} \implies (q \wedge \bar{q}))$ akan ekuivalen dengan $(\bar{p} \implies \text{FALSE})$.

Apabila $(\bar{p} \implies \text{FALSE})$ diubah menjadi bentuk disjungsi akan berwujud $(p \vee \text{FALSE})$.
Perhatikan bahwa:

- Jika $p = \text{TRUE}$, maka $(p \vee \text{FALSE}) = (\text{TRUE} \vee \text{FALSE}) = \text{TRUE}$.
  Jadi, jika $p = \text{TRUE}$, maka kita dapat menyimpulkan bahwa $(p \vee \text{FALSE}) = p$.
- Jika $p = \text{FALSE}$, maka $(p \vee \text{FALSE}) = (\text{FALSE} \vee \text{FALSE}) = \text{FALSE}$.
  Jadi, jika $p = \text{FALSE}$, maka kita dapat menyimpulkan bahwa $(p \vee \text{FALSE}) = p$.

Dari dua penjabaran di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa untuk apapun nilai kebenaran dari p akan mengakibatkan $(p \vee \text{FALSE}) \equiv p$.

Karena $(\bar{p} \implies \text{FALSE}) \equiv (p \vee \text{FALSE})$, maka kita dapat menyimpulkan bahwa untuk apapun nilai kebenaran dari p akan mengakibatkan $(\bar{p} \implies \text{FALSE}) \equiv p$.

Karena $(\bar{p} \implies (q \wedge \bar{q}))$ ekuivalen dengan $(\bar{p} \implies \text{FALSE})$, maka kita dapat menyimpulkan bahwa untuk apapun nilai kebenaran dari p akan mengakibatkan $(\bar{p} \implies (q \wedge \bar{q})) \equiv p$.

Nah, kita sudah menunjukkan benar bahwasanya $(\bar{p} \implies (q \wedge \bar{q})) \equiv p$.

Jadi, kita dapat menyimpulkan bahwa pernyataan $p \iff (\bar{p} \implies (q \wedge \bar{q}))$ adalah benar.

■

Pembahasan Soal Nomor 5

Soal
Tunjukan, bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan irrasional!

Pembahasan
Sebelum pembahasan dimulai, sebaiknya ketahui dulu definisi bilangan rasional berikut.

> Bilangan x adalah bilangan rasional jika dan hanya jika **terdapat** bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ yang memenuhi $x = \dfrac{a}{b}$.

Dari definisi bilangan rasional di atas, kita dapat membentuk definisi bilangan irrasional yang tidak lain adalah ingkaran dari definisi bilangan rasional.

> Bilangan x adalah bilangan irrasional jika dan hanya jika **tidak terdapat** bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ yang memenuhi $x = \dfrac{a}{b}$.

***

Kita akan menggunakan metode *reductio ad absurdum* untuk menunjukkan bahwa $\sqrt{2}$ merupakan bilangan irrasional. Metode pembuktian menggunakan *reductio ad absurdum* adalah sebagai berikut.

Kita akan **mengandaikan** bahwa $\sqrt{2}$ merupakan bilangan rasional. Jika kemudian muncul suatu kontradiksi terhadap pengandaian tersebut, maka pengandaian yang kita lakukan itu salah. Dengan demikian, yang terbukti benar adalah pernyataan bahwa $\sqrt{2}$ merupakan bilangan irrasional.

***

Sebelum memulai pembuktian, ayo kita ingat sifat pada bilangan rasional berikut!

Ingat bahwa pada himpunan bilangan rasional terdapat sifat **kesamaan bilangan**. Sifat ini didefinisikan sebagai berikut.

> Misalkan $\dfrac{a}{b}$ dan $\dfrac{c}{d}$ adalah bilangan rasional, maka $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \iff ad = bc$.

Dengan konsep kesamaan bilangan rasional kita dapat menyatakan suatu bilangan rasional sebagai bentuk-bentuk yang ekuivalen. Contoh, bilangan $\dfrac{2}{4}$ dapat kita nyatakan sebagai sebagai $\dfrac{1}{2}, \dfrac{18}{36}, \dfrac{60}{120}$, dan sebagainya.

Selain itu, untuk setiap bilangan rasional $\dfrac{a}{b}$, kita dapat menemukan bilangan rasional $\dfrac{a'}{b'}$ dengan $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ dan $\text{FPB}(a', b') = 1$. FPB ini tidak lain akronim dari Faktor Persekutuan Terbesar.

Untuk sebarang bilangan rasional $\dfrac{a}{b}$, kita dapat menentukan $\dfrac{a'}{b'}$ yang memenuhi $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ serta $\text{FPB}(a', b') = 1$ dengan rumus berikut.

$$a' = \frac{a}{\text{FPB}(a,b)} \text{ dan } b' = \frac{b}{\text{FPB}(a,b)}$$

Sebagai contoh, untuk bilangan rasional $\dfrac{56}{132}$, kita dapat menentukan suatu bilangan rasional $\dfrac{a'}{b'}$ yang memenuhi $\dfrac{56}{132} = \dfrac{a'}{b'}$ serta $\text{FPB}(a', b') = 1$ dengan cara seperti berikut.

Karena $\text{FPB}(56, 132) = 4$, maka kita bisa mendapatkan:

$$a' = \frac{a}{\text{FPB}(a,b)} = \frac{56}{\text{FPB}(56,132)} = \frac{56}{4} = 14 \text{ dan}$$
$$b' = \frac{b}{\text{FPB}(a,b)} = \frac{132}{\text{FPB}(56,132)} = \frac{132}{4} = 33.$$

Jadi, $\dfrac{a'}{b'} = \dfrac{14}{33}$ adalah bilangan rasional yang memenuhi $\dfrac{14}{33} = \dfrac{56}{132}$ serta $\text{FPB}(14, 33) = 1$.

***

Oke, kita mulai proses pembuktian dengan mengandaikan bahwa $\sqrt{2}$ merupakan bilangan rasional.

Karena $\sqrt{2}$ merupakan bilangan rasional, maka sesuai definisi bilangan rasional yang termuat di kotak kuning di atas, **terdapat** bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ yang memenuhi $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Perhatikan bahwa mungkin saja terdapat lebih dari satu pasangan bilangan bulat (a, b) yang memenuhi $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Mungkin saja terdapat pasangan bilangan bulat (a_1, b_1) yang memenuhi $\sqrt{2} = \frac{a_1}{b_1}$ dengan $a \neq a_1$ dan $b \neq b_1$.

Oleh sebab itu, kita dapat memilih $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ yang juga memenuhi syarat $\text{FPB}(a, b) = 1$. Sebagaimana yang sudah dijelaskan pada bagian di atas, untuk setiap bilangan rasional $\frac{a}{b}$, kita dapat menemukan bilangan rasional $\frac{a'}{b'}$ dengan $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ dan $\text{FPB}(a', b') = 1$.

Oke, jadi pada akhir langkah ini, dengan mengandaikan bahwa $\sqrt{2}$ merupakan bilangan rasional, maka kita memiliki suatu bilangan rasional $\frac{a}{b}$ yang memenuhi syarat $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ dan $\text{FPB}(a, b) = 1$.

***

Perhatikan sifat bilangan rasional ini.

Jika x dan y adalah bilangan rasional dengan $x = y$, maka $x^2 = y^2$.

Berdasarkan sifat bilangan rasional di atas, karena $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, maka $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

Karena $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, maka kita memperoleh $2 = \frac{a^2}{b^2}$.

Karena $b \neq 0$, maka jelas bahwa $b^2 \neq 0$. Dengan demikian, kita dapat "memindahkan" b^2 dari ruas kanan ke ruas kiri menjadi seperti ini.

$2 \cdot b^2 = a^2$

Dari persamaan di atas, kita mendapatkan fakta bahwa a^2 merupakan bilangan kelipatan 2. Itu karena $a^2 = 2 \cdot b^2$.

Nah, karena a^2 merupakan bilangan kelipatan 2, maka a sendiri pastilah juga bilangan kelipatan 2!

Perhatikan baik-baik.
Bilangan 2 merupakan bilangan prima.
Bilangan a^2 memuat bilangan 2 sebagai faktornya.
Oleh sebab itu, a pasti memuat 2 sebagai faktornya.
Dengan kata lain a merupakan suatu bilangan kelipatan 2.

Karena a merupakan bilangan kelipatan 2, maka kita dapat menyatakan a sebagai

$a = 2 \cdot m$

untuk suatu bilangan bulat m yang juga memenuhi sifat bahwa $m < a$.

Jika kita mensubstitusikan persamaan $a = 2 \cdot m$ ke persamaan $a^2 = 2 \cdot b^2$, maka akan memperoleh hasil berikut.

$(2 \cdot m)^2 = 2 \cdot b^2 \iff 4 \cdot m^2 = 2 \cdot b^2 \iff 2 \cdot m^2 = b^2$

Dari persamaan $2 \cdot m^2 = b^2$ kita memperoleh fakta bahwa b^2 merupakan bilangan kelipatan 2. Itu karena $b^2 = 2 \cdot m^2$.

Nah, karena b^2 merupakan bilangan kelipatan 2, maka b sendiri pastilah juga bilangan kelipatan 2! Penjabaran alasannya identik seperti saat kita memperoleh fakta bahwa a^2 merupakan bilangan kelipatan 2.

Karena b merupakan bilangan kelipatan 2, maka kita dapat menyatakan b sebagai

$b = 2 \cdot n$

untuk suatu bilangan bulat n yang juga memenuhi sifat bahwa $n < b$.

Jika kita mensubstitusikan persamaan $b = 2 \cdot n$ ke persamaan $b^2 = 2 \cdot m^2$, maka akan memperoleh hasil berikut.

$(2 \cdot n)^2 = 2 \cdot m^2 \iff 4 \cdot n^2 = 2 \cdot m^2 \iff 2 \cdot n^2 = m^2$

Perhatikan bahwa persamaan $2 \cdot n^2 = m^2$ ekuivalen dengan $2 = \frac{m^2}{n^2}$.

Perhatikan bahwa persamaan $2 = \frac{m^2}{n^2}$ ekuivalen dengan $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

Perhatikan bahwa dengan demikian kita memiliki persamaan $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ dan $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

Dari penjabaran di atas, kita juga memiliki persamaan $a = 2 \cdot m$ dan $b = 2 \cdot n$.
Dengan kata lain a dan b merupakan bilangan kelipatan 2.

MUNCUL KONTRADIKSI!

Sebab, pada awal pembuktian kita memilih a dan b sebagai bilangan bulat yang memenuhi kriteria $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ dan $\mathrm{FPB}(a, b) = 1$.

Jika a dan b merupakan bilangan kelipatan 2, maka jelas bahwa $\mathrm{FPB}(a, b) \neq 1$.

***

Dengan demikian, pengandaian bahwa $\sqrt{2}$ merupakan bilangan rasional adalah **SALAH**!

Jadi, yang benar adalah $\sqrt{2}$ merupakan bilangan irrasional.

■