

Aku Mau Coba  
Mengerjakan & Membahas  
Ujian Tengah Semester & Ujian Akhir Semester

# Pengantar Analisis 1

Semester Ganjil 2021/2022

Program Studi Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Gadjah Mada

MAWI WIJNA

Yogyakarta, 2023



# Daftar Isi

|    |  |    |
|----|--|----|
| 1  | Soal-Soal Ujian Tengah Semester                            | 5  |
| 2  | Soal-Soal Ujian Akhir Semester                             | 7  |
| 3  | Ayo Kerjakan!<br>Ujian Tengah Semester<br>Soal Nomor 1     | 9  |
| 4  | Ayo Kerjakan!<br>Ujian Tengah Semester<br>Soal Nomor 2     | 13 |
| 5  | Ayo Kerjakan!<br>Ujian Tengah Semester<br>Soal Nomor 3 (a) | 19 |
| 6  | Ayo Kerjakan!<br>Ujian Tengah Semester<br>Soal Nomor 3 (b) | 23 |
| 7  | Ayo Kerjakan!<br>Ujian Tengah Semester<br>Soal Nomor 4     | 33 |
| 8  | Ayo Kerjakan!<br>Ujian Tengah Semester<br>Soal Nomor 5 (a) | 45 |
| 9  | Ayo Kerjakan!<br>Ujian Tengah Semester<br>Soal Nomor 5 (b) | 55 |
| 10 | Ayo Kerjakan!<br>Ujian Tengah Semester<br>Soal Nomor 6     | 65 |

|   |            |
|---|------------|
| <b>11 Ayo Kerjakan!</b><br>Ujian Akhir Semester<br>Soal Nomor 1 (a) | <b>75</b>  |
| <b>12 Ayo Kerjakan!</b><br>Ujian Akhir Semester<br>Soal Nomor 1 (b) | <b>79</b>  |
| <b>13 Ayo Kerjakan!</b><br>Ujian Akhir Semester<br>Soal Nomor 2 (a) | <b>81</b>  |
| <b>14 Ayo Kerjakan!</b><br>Ujian Akhir Semester<br>Soal Nomor 2 (b) | <b>85</b>  |
| <b>15 Ayo Kerjakan!</b><br>Ujian Akhir Semester<br>Soal Nomor 3 (a) | <b>87</b>  |
| <b>16 Ayo Kerjakan!</b><br>Ujian Akhir Semester<br>Soal Nomor 3 (b) | <b>89</b>  |
| <b>17 Ayo Kerjakan!</b><br>Ujian Akhir Semester<br>Soal Nomor 4 (a) | <b>97</b>  |
| <b>18 Ayo Kerjakan!</b><br>Ujian Akhir Semester<br>Soal Nomor 4 (b) | <b>101</b> |
| <b>19 Ayo Kerjakan!</b><br>Ujian Akhir Semester<br>Soal Nomor 5 (a) | <b>105</b> |
| <b>20 Ayo Kerjakan!</b><br>Ujian Akhir Semester<br>Soal Nomor 5 (b) | <b>109</b> |

# Siapa Aku?

Halo!

Kenalin, nama aku Wijna.  
Sering juga dipanggil Wisna.  
Jarang-jarang dipanggil Mawi.

Aku dulu pernah jadi mahasiswa matematika UGM. Maksudnya, aku dulu itu pernah kuliah di Program Studi Matematika FMIPA UGM. Masuk September 2004. Lulus Februari 2009. Info lebih lanjut, *googling* saja namaku di Google.

Oh ya, **kenapa aku kurang kerjaan bikin tulisan ini?**

Sekadar pemberitahuan. Tulisan ini aku buat dalam rangka **mengisi waktu luang**. Berhubung si *bocil* kalau makan sukanya diemut, jadi ya iseng-iseng aku mengerjakan soal ujian sambil menunggu rongga mulutnya kosong lagi. Itu pun kalau aku sedang bosan membuka *manga online*, *marketplace*, *Instagram*, dan kawan-kawannya.

Jadi ya, sebetulnya tulisan ini hanyalah sebatas alih digital dari hasil *orat-oret* di sebarang kertas kosong di tengah proses menyuapi makan seorang *bocil*. Pengalihan ke format  $\text{\LaTeX}$  aku lakukan sembari menunggu azan subuh berkumandang atau ketika *weekend* hanya di rumah saja. Sebagian besar *orat-oret* ini tercipta semasa Covid-19 masih mewabah.

Eh, sebelumnya, aku mohon maaf jikalau tulisan ini lebih banyak memuat hal-hal yang salah daripada hal-hal yang benarnya. Maklum, namanya juga sudah belasan tahun yang lalu jadi mahasiswa matematika. Jadi ya, mohon maaf kalau lupa-lupa ingat. Walaupun aku tetap berhati-hati dalam menulis supaya tidak terjadi cacat logika.

Terus terang, hampir sebagian besar isi tulisan ini aku sadur dari berbagai macam sumber di internet seperti [math.stackexchange.com](http://math.stackexchange.com), Quora, dan Reddit. Jadi, aku bukan orang pintar nan jenius yang bisa mengerjakan semua soal ujian dengan lancar. Seperti, yang aku bilang tadi, aku cuma iseng mengerjakan soal ujian, mengalihkan *orat-oret* di kertas ke format  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ , kemudian meng-*upload*-nya ke jagat maya.

Ya, sudahlah. Bagian pengantar ini nggak usah panjang-panjang. Semoga ada yang bisa dipelajari dari tulisan ini. Semoga tulisan ini bisa menjadi bahan pelajaran buat aku, jika di waktu tuaku nanti aku mulai lupa dengan apa-apa yang aku pelajari semasa kuliah.

*Oh yes! Last but not least, matur nuwun* kepada teman-teman di HIMATIKA FMIPA UGM yang sudah menyediakan sumber soal-soal ujian yang bisa diakses secara cuma-cuma di *website* mereka, [himatika.fmipa.ugm.ac.id](http://himatika.fmipa.ugm.ac.id).

*Ah... somehow I felt nostalgic....*

*Diketik sambil diiringi OST-nya NieR.*

# Pengantar Analisis (Real) 1 Buat Aku

Pas zamanku kuliah (tahun 2004 s.d. 2009 silam), Pengantar Analisis (Real) 1 itu adalah mata kuliah wajib berbobot 2 SKS yang diselenggarakan pada semester 5 Program Studi Matematika FMIPA UGM. Aku sempat mengulang mata kuliah ini pada semester 9, semester terakhirku kuliah di UGM. Biasalah, memperbaiki nilai dari C menjadi A.

Dari semua mata kuliah bidang analisis, aku paling suka dengan mata kuliah Pengantar Analisis (Real) ini. Mungkin mata kuliah ini terasa mirip seperti mata kuliah Pengantar Logika Matematika dan Himpunan yang diberi bumbu analisis.

Heee... kalau boleh jujur, aku lebih senang dengan mata kuliah yang berkuat dengan pembuktian-pembuktian teorema daripada harus menghitung-hitung angka secara rinci dan teliti.

Masalah-masalah pembuktian teorema/sifat yang diajarkan di mata kuliah Pengantar Analisis (Real) 1 ini akan terasa "mudah" ketika kita sudah menguasai mata kuliah Pengantar Logika Matematika dan Himpunan dan Pengantar Struktur Aljabar. Beberapa "trik" untuk membantu proses pembuktian dapat kita peroleh dari mata kuliah Kalkulus 1. Tidak ketinggalan, mata kuliah Pengantar Topologi bisa membantu kita untuk "merasakan" bahwa teorema/sifat dalam lingkup sistem bilangan real itu "*make sense*", walaupun umumnya mata kuliah Pengantar Topologi itu diselenggarakan pada semester lanjut.

Aku lupa-lupa ingat siapa dosen pengampu mata kuliah Pengantar Analisis (Real) 1 saat aku kuliah dahulu. Antara Pak Yusuf atau almarhumah Bu Ndaru. Oh ya, karena menyinggung almarhumah Bu Ndaru, kalau tidak sibuk, mungkin aku juga bakal membuat tulisan tentang ujian mata kuliah Pengantar Topologi.

Oke deh! Sebagai penutup, semoga tulisan ini membawa manfaat. Walaupun aku yakin kalau tulisan ini lebih banyak salahnya daripada benarnya. Maklum, kan sudah belasan tahun yang lalu jadi mahasiswa matematika. Jadi ya, mohon maaf kalau lupa-lupa ingat atau salah ketik notasi.

Aku nggak tahu apakah benar-benar ada orang yang membaca tulisan ini. Semisal Anda yang membaca tulisan ini adalah mahasiswa, aku doakan semoga Anda mendapat pencerahan dan sukses berkuliah. Semisal Anda yang membaca tulisan ini penasaran dengan soal-soal ujian kuliah matematika, aku harap Anda tidak *shock* dan bisa memahami tulisan ini dengan baik. Semisal Anda yang membaca tulisan ini hanya sekedar mengisi waktu luang, aku sarankan untuk membaca tulisan ini sebagai kawan *ngendog* di toilet.

Semoga tulisan ini bermanfaat bagi mahasiswa matematika. Khususnya mahasiswa yang kesulitan dan kebingungan memahami mata kuliah Pengantar Analisis (Real) 1 dan sungkan bertanya ke dosen atau kakak tingkat. Tulisan ini bisa diunduh secara cuma-cuma dan diam-diam. Silakan *googling* namaku untuk menemukan lebih banyak tulisan sejenis ini untuk beragam mata kuliah lain.

Akhir kata, selamat menikmati tulisan ini!

Yogyakarta, 2023  
Wihikan "Mawi" Wijna

# 1

## Soal-Soal Ujian Tengah Semester

1. Diketahui  $A$  dan  $B$  adalah himpunan-himpunan bilangan real yang terbatas dan tidak kosong. Tunjukkan bahwa  $A \cup B$  terbatas dan  $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$ .
2. Diketahui himpunan  $A \subseteq \mathbb{R}$  dan tidak kosong. Didefinisikan  $\bar{A} = A \cup A'$ , dengan  $A'$  menyatakan himpunan semua titik limit  $A$ .

Tunjukkan  $x \in \bar{A}$  jika dan hanya jika ada barisan  $(x_n)$  di  $A$  yang konvergen ke  $x$ .

3. (a) Jika barisan  $(x_n)$  tidak terbatas, tunjukkan ada barisan bagian  $(x_{r_n}) \subseteq (x_n)$  sedemikian sehingga  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_{r_n}} = 0$  !  
(b) Diberikan barisan bilangan real  $(x_n)$  dengan  $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ , untuk setiap  $n \geq 1$ . Tunjukkan barisan  $(x_n)$  naik monoton. Apakah barisan  $(x_n)$  konvergen? Jelaskan jawaban Saudara!

4. Diberikan barisan bilangan real  $(x_n)$  dan untuk setiap  $n \geq 1$ , didefinisikan  $y_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n x_k$ . Jika  $(x_n)$  konvergen ke  $x$ , tunjukkan  $(y_n)$  juga konvergen ke  $x$  !

5. (a) Menggunakan definisi limit fungsi, tunjukkan bahwa:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3} = 1$  !  
(b) Tunjukkan bahwa  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$  tidak ada, tetapi  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$  !

6. Let  $f$  and  $g$  be two functions defined on  $(a, \infty)$  and suppose  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  and  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ . Prove that  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f \circ g)(x) = L$  !



## 2

# Soal-Soal Ujian Akhir Semester

- Diberikan fungsi-fungsi  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $c \in \mathbb{R}$ . Jika  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  dan  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$ , tunjukkan  $\lim_{x \rightarrow \infty} (g \circ f)(x) = L$ .
  - Diberikan  $c \in \mathbb{R}$  dan fungsi  $f : (c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Jika  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x)$  ada, tunjukkan  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .
- Jika fungsi  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kontinu pada  $\mathbb{R}$  dan  $f(x) = 0$  untuk semua bilangan rasional  $x$ , tunjukkan  $f(x) = 0$  untuk setiap  $x \in \mathbb{R}$ .
  - Diketahui fungsi  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kontinu pada  $\mathbb{R}$ . Jika  $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$  dan  $(x_n)$  barisan di dalam  $A$  yang konvergen ke suatu  $x \in \mathbb{R}$ , tunjukkan  $x \in A$ .
- Tunjukkan  $x - \cos x = 0$  mempunyai penyelesaian di dalam  $[0, \frac{\pi}{2}]$
  - Jika  $P(x) = x^{2n-1} + a_1 x^{2n-2} + \dots + a_{2n-2} x + a_{2n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tunjukkan  $P(x) = 0$  mempunyai sekurang-kurang satu akar real.
- Jika  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  kontinu seragam pada  $A$  dan terdapat  $k > 0$  sehingga  $|f(x)| \geq k$  untuk setiap  $x \in A$ , tunjukkan  $\frac{1}{f}$  kontinu seragam pada  $A$ .
  - Diketahui fungsi  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  kontinu pada  $[a, b]$ . Jika nilai maksimum atau nilai minimum  $f$  terjadi bukan di titik dalam (interior point)  $[a, b]$ , tunjukkan  $f$  fungsi monoton pada  $[a, b]$ .
- Diberikan  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $c \in \mathbb{R}$ . Jika  $f'(c)$  ada dan untuk setiap  $r > 0$  terdapat  $x \in \mathbb{N}$ ,  $(c) - c$  sehingga  $f(x) = f(c)$ , tunjukkan  $f'(c) = 0$  !
  - Diketahui fungsi  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mempunyai turunan di setiap titik  $x \in [0, \infty)$ . Jika  $f'(x) = C$  untuk setiap  $x \in [0, \infty)$  dan  $a > 0$ , tentukan  $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x+a) - f(x)\}$



### 3

# Ayo Kerjakan!

## Ujian Tengah Semester

### Soal Nomor 1

#### Soal

Diketahui  $A$  dan  $B$  adalah himpunan-himpunan bilangan real yang terbatas dan tidak kosong. Tunjukkan bahwa  $A \cup B$  terbatas dan  $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$ .

---

#### Dikerjakan

Oke! Ini pertama-tama diketahui bahwa himpunan  $A$  dan  $B$  tidak kosong ya!

Karena himpunan  $A$  terbatas (entah terbatas ke atas atau ke bawah), maka ada suatu bilangan real positif  $M_A$  sedemikian sehingga berlaku  $|a| \leq M_A$  untuk setiap  $a \in A$ .

Karena himpunan  $B$  terbatas (entah terbatas ke atas atau ke bawah), maka ada suatu bilangan real positif  $M_B$  sedemikian sehingga berlaku  $|b| \leq M_B$  untuk setiap  $b \in B$ .

#### ***Trichotomy Law***

Untuk sebarang bilangan real  $a$  dan  $b$ , maka salah satu dari tiga kemungkinan ini akan berlaku:

1.  $a > b$ ,
2.  $a = b$ , atau
3.  $a < b$

Nah, berdasarkan sifat **Trichotomy Law** di atas, kita bisa menetapkan bilangan real  $M_{max}$  sebagai bilangan real yang terbesar dari  $M_A$  dan  $M_B$ , yaitu  $M_{max} = \text{maksimum}\{M_A, M_B\}$ .

Dengan demikian,  $M_{max}$  adalah bilangan real positif dan juga akan berlaku  $M_A \leq M_{max}$  serta  $M_B \leq M_{max}$ . Akibatnya:

1. Untuk sebarang  $a \in A$  akan berlaku  $|a| \leq M_A \leq M_{max}$  yang ekuivalen dengan menyatakan bahwa  $|a| \leq M_{max}$ , dan
2. Untuk sebarang  $b \in B$  akan berlaku  $|b| \leq M_B \leq M_{max}$  yang ekuivalen dengan menyatakan bahwa  $|b| \leq M_{max}$ .

Nah, kemudian kita bentuk himpunan  $X = A \cup B$ . Ingat! Karena himpunan  $A$  dan  $B$  tidak kosong, maka himpunan  $X$  ya juga tidak kosong dong. Kan himpunan  $X$  adalah gabungan dari himpunan  $A$  dan  $B$ .

Nah, jika kita ambil sebarang elemen  $x$  di dalam himpunan  $X$ , maka salah satu dari 2 kemungkinan berikut bakal terjadi.

1. Kemungkinan yang pertama adalah elemen  $x$  termuat di himpunan  $A$ . Jika hal ini yang terjadi, maka akan berlaku  $|x| \leq M_A \leq M_{max}$  yang ekuivalen dengan menyatakan bahwa  $|x| \leq M_{max}$ .
2. Kemungkinan yang kedua adalah elemen  $x$  termuat di himpunan  $B$ . Jika hal ini yang terjadi, maka akan berlaku  $|x| \leq M_B \leq M_{max}$  yang ekuivalen dengan menyatakan bahwa  $|x| \leq M_{max}$ .

Ya nggak?

Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa untuk sebarang  $x \in X$  akan berlaku  $|x| \leq M_{max}$ . Dengan kata lain, himpunan  $X = A \cup B$  adalah himpunan yang terbatas.

\*\*\*

Perhatikan sifat berikut!

#### **Eksistensi Supremum**

Jika  $X$  adalah himpunan bilangan real yang tidak kosong dan terbatas, maka himpunan  $X$  memiliki supremum.

Nah, karena kita sudah menunjukkan bahwa  $X = A \cup B$  adalah himpunan yang terbatas, maka berdasarkan sifat di atas, himpunan  $X$  memiliki supremum. Sebut saja  $x'$  sebagai supremumnya himpunan  $X$  atau  $x' = \text{sup}(X)$ .

Nah, karena himpunan  $A$  dan  $B$  itu terbatas ke atas, maka himpunan  $A$  dan  $B$  memiliki supremum. Kita notasikan  $\sup(A)$  sebagai supremum himpunan  $A$  dan  $\sup(B)$  sebagai supremum himpunan  $B$ . Dengan demikian akan berlaku dua hal berikut.

1. Untuk semua  $a \in A$  akan berlaku  $a \leq \sup(A)$  dan jika  $S_A \in \mathbb{R}$  adalah sebarang batas atas dari himpunan  $A$ , maka akan berlaku  $S_A \leq \sup(A)$ .
2. Untuk semua  $b \in B$  akan berlaku  $b \leq \sup(B)$  dan jika  $S_B \in \mathbb{R}$  adalah sebarang batas atas dari himpunan  $B$ , maka akan berlaku  $S_B \leq \sup(B)$ .

Serupa dengan pemilihan  $M_{max}$ , berdasarkan **Trichotomy Law** maka kita bisa menetapkan bilangan real  $S_{max}$  sebagai yang terbesar dari  $\sup(A)$  dan  $\sup(B)$ , yaitu  $S_{max} = \text{maksimum}\{\sup(A), \sup(B)\}$ .

Nah, selanjutnya, kita akan menunjukkan bahwa  $x' = S_{max}$  dengan cara mengandaikan bahwa:

$$x' \neq S_{max}$$

kemudian memunculkan kontradiksi dari pengandaian tersebut.

Oke! Kita andaikan bahwa  $x' \neq S_{max}$ ! Dengan demikian, berdasarkan **Trichotomy Law**, salah satu dari dua kemungkinan ini akan berlaku:  $x' < S_{max}$  atau  $x' > S_{max}$ .

Misalkan kemungkinan yang terjadi adakah  $x' > S_{max}$ .

Ingat!

Karena  $S_{max} = \text{maksimum}\{\sup(A), \sup(B)\}$ , maka akan berlaku  $\sup(A) \leq S_{max}$  dan  $\sup(B) \leq S_{max}$ . Akibatnya:

1. Untuk sebarang  $a \in A$  akan berlaku  $a \leq \sup(A) \leq S_{max} < x'$ , dan
2. Untuk sebarang  $b \in B$  akan berlaku  $b \leq \sup(B) \leq S_{max} < x'$ .

Nah! Ini tidak mungkin terjadi!

Karena  $x' = \sup(X)$ , maka  $x'$  adalah batas atas terkecil himpunan  $X$ . Akan tetapi, dari penjabaran di atas terlihat bahwa  $S_{max}$  adalah batas atas terkecil himpunan  $X$ .

Wew...

Karena  $x' > S_{max}$  tidak mungkin terjadi, maka kemungkinan yang "bisa" terjadi adalah  $x' < S_{max}$ .

Oke! Tanpa menghilangkan keumuman, kita tentukan  $S_{max} = \sup(A)$ . Kita bisa menentukan seperti ini karena kan  $S_{max}$  adalah yang terbesar di antara  $\sup(A)$  dan  $\sup(B)$ . Kan tidak ada ketentuan khusus yang menyatakan dari 2 himpunan yang ada, himpunan yang "ini" adalah himpunan  $A$ . Ya toh? Jadi kita tentukan saja, himpunan "ini" adalah himpunan  $A$  jika supremumnya lebih besar atau sama dengan supremum himpunan "itu".

Oke! Karena  $S_{max} = \sup(A)$ , maka jelas untuk sebarang  $a \in A$  akan berlaku  $a \leq S_{max}$  dan  $S_{max}$  adalah batas atas terkecil himpunan  $A$ .

Nah, karena  $x' = \sup(A \cup B)$ , maka  $x'$  adalah batas atas terkecil himpunan  $A \cup B$ . Artinya, untuk sebarang  $x \in A \cup B$ , maka akan berlaku  $x < x'$ .

Nah, karena  $x \in A \cup B$ , maka akan ada kemungkinan yang terjadi bahwasanya  $x \in A$ . Ya toh?

Dengan demikian kita akan punya pertidaksamaan,  $x < x'$  dan  $x < S_{max}$ . Baik  $x'$  dan  $S_{max}$  sama-sama "diakui" sebagai batas atas terkecil. Nah... hal ini **sama sekali tidak mungkin terjadi ... kecuali...** berlaku persamaan  $x' = S_{max}$ .

Tapi, jika berlaku persamaan  $x' = S_{max}$ , maka itu akan mengingkari kemungkinan di awal bahwa  $x' \neq S_{max}$ !

Jadi, berdasarkan penjabaran di atas, jika  $S_{max} = \text{maksimum}\{\sup(A), \sup(B)\}$  dan  $x' = \sup(A \cup B)$ , maka tidak mungkin berlaku pertidaksamaan  $x' \neq S_{max}$ . Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa  $x' = S_{max}$  atau dengan kata lain  $\sup(A \cup B) = \text{maksimum}\{\sup(A), \sup(B)\}$ .

■

# 4

## Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 2

### Soal

Diketahui himpunan  $A \subseteq \mathbb{R}$  dan tidak kosong. Didefinisikan  $\bar{A} = A \cup A'$ , dengan  $A'$  menyatakan himpunan semua titik limit  $A$ .

Tunjukkan  $x \in \bar{A}$  jika dan hanya jika ada barisan  $(x_n)$  di  $A$  yang konvergen ke  $x$ .

---

### Dikerjakan

Kita akan menunjukkan bahwa pernyataan berikut:

**Pernyataan Utama yang Akan Dibuktikan Kebenarannya**

$x \in \bar{A}$  jika dan hanya jika ada barisan  $(x_n)$  di  $A$  yang konvergen ke  $x$

berlaku benar dengan cara menunjukkan kebenaran pernyataan 1 dan 2 di bawah.

1. Jika  $x \in \bar{A}$ , maka ada barisan  $(x_n)$  di  $A$  yang konvergen ke  $x$ .
2. Jika ada barisan  $(x_n)$  di  $A$  yang konvergen ke  $x$ , maka  $x \in \bar{A}$ .

Oke! Ayo kita mulai menunjukkan kebenaran pernyataan 1 dan 2 di atas!

Oh ya! Sekadar informasi, di topik Topologi, himpunan  $\bar{A}$  itu disebut dengan *closure* dari himpunan  $A$ . Mungkin istilah ini kurang populer di perkuliahan pengantar analisis.

- (1) Jika  $x \in \bar{A}$ , maka ada barisan  $(x_n)$  di  $A$  yang konvergen ke  $x$ .

Pada bagian ini kita akan menunjukkan bahwa:

**Pernyataan Pertama yang Akan Dibuktikan Kebenarannya**

Jika  $x \in \bar{A}$ , maka ada barisan  $(x_n)$  di  $A$  yang konvergen ke  $x$ .

Kita ambil sebarang  $x \in \bar{A}$ . Berdasarkan definisi  $\bar{A}$  pada soal, karena  $\bar{A} = A \cup A'$ , maka kita akan punya 3 kemungkinan:

1.  $x \in A$ , atau
2.  $x \in A'$ , atau malah
3.  $x \in A$  sekaligus juga  $x \in A'$ .

Nah, ketiga kemungkinan di atas bisa kita ringkas lagi menjadi 2 kemungkinan saja:

1.  $x \in A$ , atau
2.  $x \in A'$

•• (1.1) Kemungkinan yang Terjadi adalah  $x \in A$

Jika yang terjadi adalah  $x \in A$ , maka kita dapat membuat barisan konstan  $(x_n) = \{x, x, x, x, \dots\}$  sedemikian sehingga barisan ini termuat di himpunan  $A$  dan konvergen ke  $x$ .

•• (1.2) Kemungkinan yang Terjadi adalah  $x \in A'$

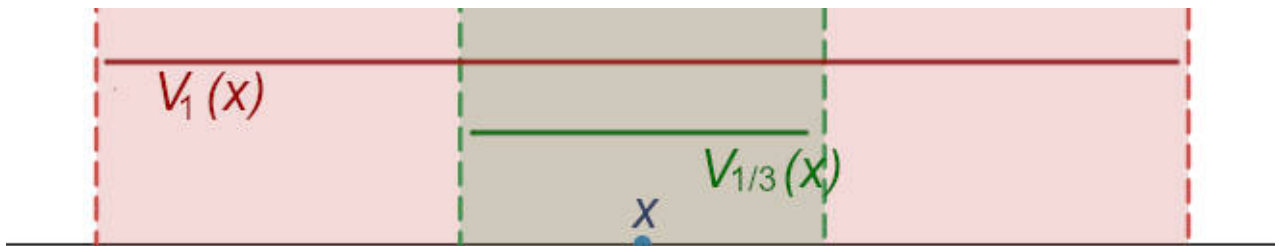
Jika yang terjadi adalah  $x \in A'$ , maka kita **tidak boleh** langsung menyimpulkan bahwa  $x \in A$ ! **Awas lho!**

Ingat! Sangat mungkin ada elemen di himpunan  $A'$  yang tidak termuat di himpunan  $A$ .

Nah! Tanpa mengurangi keumuman, kita asumsikan  $x$  sebagai elemen di himpunan  $A'$  yang tidak termuat di himpunan  $A$ .

Karena  $x$  adalah elemen di himpunan  $A'$ , maka  $x$  adalah **titik limit** himpunan  $A$ . Karena  $x$  adalah **titik limit** himpunan  $A$ , maka sebarang persekitaran dari  $x$  akan memuat elemen himpunan  $A$  dan elemen tersebut bukanlah  $x$ .

Oke! Selanjutnya, perhatikan! Untuk setiap bilangan asli  $n$  dari mulai 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, hingga seterusnya menuju  $+\infty$ , kita dapat membuat persekitaran  $V_{\frac{1}{n}}(x)$ , yaitu persekitaran dari  $x$  dengan *radius*  $\frac{1}{n}$ . Artinya, setiap elemen di persekitaran  $V_{\frac{1}{n}}(x)$  berjarak sekurang-kurangnya  $\frac{1}{n}$  dari elemen  $x$ .



Gambar di atas mengilustrasikan persekitaran  $V_1(x)$  dan  $V_{\frac{1}{3}}(x)$ . Terlihat bahwa persekitaran  $V_{\frac{1}{3}}(x)$  berukuran lebih kecil dari  $V_1(x)$ . Lebih tepatnya, semakin besar nilai  $n$ , maka ukuran persekitaran  $V_{\frac{1}{n}}(x)$  akan semakin kecil.

Okeee!

Untuk  $n = 1$ , kita dapat membuat persekitaran  $V_{\frac{1}{1}}(x)$ . Sesuai definisi  $x$  sebagai titik limit himpunan  $A$ , maka persekitaran  $V_{\frac{1}{1}}(x)$  akan memuat elemen di himpunan  $A$  dan elemen tersebut bukanlah  $x$ . Sebut saja elemen ini sebagai  $x'_1$ . Dengan demikian:

$$\exists x'_1 \in V_{\frac{1}{1}}(x) \text{ sedemikian sehingga } x'_1 \in A \text{ dan } x'_1 \neq x$$

Lanjut!

Untuk  $n = 2$ , kita dapat membuat persekitaran  $V_{\frac{1}{2}}(x)$ . Sesuai definisi  $x$  sebagai titik limit himpunan  $A$ , maka persekitaran  $V_{\frac{1}{2}}(x)$  akan memuat elemen di himpunan  $A$  dan elemen tersebut bukanlah  $x$ . Sebut saja elemen ini sebagai  $x'_2$ . Dengan demikian:

$$\exists x'_2 \in V_{\frac{1}{2}}(x) \text{ sedemikian sehingga } x'_2 \in A \text{ dan } x'_2 \neq x$$

Seperti yang kelanjutannya bisa ditebak, kita dapat lanjut membuat persekitaran  $V_{\frac{1}{3}}(x)$ ,  $V_{\frac{1}{4}}(x)$ ,  $V_{\frac{1}{5}}(x)$ , dst. Dengan demikian:

$$\begin{aligned} \exists x'_3 \in V_{\frac{1}{3}}(x) \text{ sedemikian sehingga } x'_3 \in A \text{ dan } x'_3 \neq x \\ \exists x'_4 \in V_{\frac{1}{4}}(x) \text{ sedemikian sehingga } x'_4 \in A \text{ dan } x'_4 \neq x \\ \exists x'_5 \in V_{\frac{1}{5}}(x) \text{ sedemikian sehingga } x'_5 \in A \text{ dan } x'_5 \neq x \\ \text{dan seterusnya.} \end{aligned}$$

Nah, selanjutnya, kita akan buat barisan  $(x_n)$  yang didefinisikan sebagai berikut.

$$(x_n) = \{x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, \dots\}$$

Nah, berdasarkan cara kita menentukan  $x'_i$ , maka barisan  $(x_n)$  tersebut akan berada di dalam himpunan  $A$ . Sebab, ya... setiap  $x'_i$  itu kan elemen himpunan  $A$ .

Oke! Selanjutnya, kita akan menunjukkan bahwa barisan  $(x_n)$  tersebut konvergen ke  $x$ . Caranya adalah sebagai berikut.

#### **Pernyataan Kedua yang Akan Dibuktikan Kebenarannya**

Jika diberikan sebarang bilangan real positif  $\epsilon$ , maka kita dapat menentukan suatu bilangan asli  $M$  sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli  $n$  yang lebih besar dari  $M$  (yaitu,  $n > M$ ) akan berakibat  $|x'_n - x| < \epsilon$ .

Okeee! Misalkan kita diberikan sebarang bilangan real positif  $\epsilon_0$ .

Berdasarkan sifat bilangan real berikut:

#### ***Archimedean Property***

Jika  $a$  dan  $b$  adalah sebarang bilangan real positif ( $> 0$ ), maka akan terdapat bilangan asli  $M$  sedemikian sehingga berlaku  $a \cdot M > b$ .

karena 1 dan  $\epsilon_0$  adalah bilangan-bilangan real positif, maka akan terdapat bilangan asli  $M$  sedemikian sehingga berlaku  $\epsilon_0 \cdot M > 1$  atau... dengan kata lain... karena 1 dan  $\epsilon_0$  adalah bilangan-bilangan real positif, maka akan terdapat bilangan asli  $M$  sedemikian sehingga berlaku  $\frac{1}{M} < \epsilon_0$ .

Nah, berdasarkan bilangan asli  $M$  yang kita punya itu, maka kita bisa menemukan bilangan real  $x'_M$  di barisan  $(x_n)$ . Ya toh?

Karena bilangan real  $x'_M$  berasal dari persekitaran  $V_{\frac{1}{M}}(x)$ , maka  $x'_M$  akan berjarak sekurang-kurangnya  $\frac{1}{M}$  dari elemen  $x$ , atau dengan kata lain akan berlaku pertidaksamaan  $|x'_M - x| < \frac{1}{M}$ .

Karena untuk bilangan asli  $M$  berlaku pertidaksamaan  $\frac{1}{M} < \epsilon_0$ , dengan demikian akan berlaku pula pertidaksamaan  $|x'_M - x| < \epsilon_0$ .

Selanjutnya, untuk bilangan asli  $M + 1$ ,  $M + 2$ ,  $M + 3$ , dan seterusnya... yang pokoknya bilangan asli  $n$  yang lebih besar dari  $M$  (yaitu,  $n > M$ ), maka akan berlaku pertidaksamaan ini.

$$\frac{1}{M} > \frac{1}{M+1} > \frac{1}{M+2} > \dots > \frac{1}{n} > \dots$$

Dengan demikian, untuk bilangan asli  $M + 1$ ,  $M + 2$ ,  $M + 3$ , dan seterusnya... yang pokoknya bilangan asli  $n$  yang lebih besar dari  $M$  (yaitu,  $n > M$ ), maka akan berlaku pertidaksamaan ini.

$$|x'_n - x| < \frac{1}{n} < \frac{1}{M} < \epsilon_0$$

Nah! Dengan demikian kita bisa menyimpulkan bahwa barisan  $(x_n)$  konvergen ke  $x$ .

Jadi, benar bahwa jika  $x \in \bar{A}$ , maka ada barisan  $(x_n)$  di  $A$  yang konvergen ke  $x$ .

• (2) Jika ada barisan  $(x_n)$  di  $A$  yang konvergen ke  $x$ , maka  $x \in \bar{A}$ .

Waaah bagian yang ini sih jelas sekali!

Berdasarkan definisi,  $\bar{A} = A \cup A'$ , dengan  $A'$  menyatakan himpunan semua titik limit  $A$ .

Karena ada barisan  $(x_n)$  di  $A$  yang konvergen ke  $x$ , maka  $x$  adalah titik limit  $A$ .

Dengan demikian  $x \in A'$  dan itu berarti  $x \in \bar{A}$  karena ya... itu,  $\bar{A} = A \cup A'$ .

■



5

# Ayo Kerjakan!

## Ujian Tengah Semester

### Soal Nomor 3 (a)

Soal

Jika barisan  $(x_n)$  tidak terbatas, tunjukkan ada barisan bagian  $(x_{r_n}) \subseteq (x_n)$  sedemikian sehingga  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_{r_n}} = 0$  !

---

Dikerjakan

Berdasarkan soal, diketahui barisan  $(x_n)$  tidak terbatas.

Eh?

Naaah, ini bakal muncul pertanyaan!

*Ini tidak terbatasnya ke mana?*

*Tidak terbatas ke atas atau tidak terbatas ke bawah?*

Yaaaah, daripada bingung, kita **asumsikan** saja barisan  $(x_n)$  tidak terbatasnya itu ke atas  $(+\infty)$ . Lebih lanjut, ayo ingat definisi formal dari barisan bilangan real yang tidak terbatas ke atas berikut ini. Kita mulai dulu dengan definisi barisan yang terbatas.

#### Definisi Barisan Bilangan Real yang Terbatas ke Atas

Barisan bilangan real  $(x_n)$  terbatas ke atas jika dan hanya jika terdapat bilangan real positif  $\alpha$  sedemikian sehingga berlaku pertidaksamaan  $x_n \leq \alpha$  untuk setiap bilangan asli  $n$ .

Karena definisi dari barisan bilangan real yang tidak terbatas ke atas itu adalah negasi dari definisi dari barisan bilangan real yang terbatas ke atas, jadinya ya seperti ini definisinya.

#### Definisi Barisan Bilangan Real yang Tidak Terbatas ke Atas

Barisan bilangan real  $(x_n)$  tidak terbatas ke atas jika dan hanya jika untuk setiap bilangan real positif  $\alpha$  akan terdapat suatu bilangan asli  $m$  sedemikian sehingga berlaku pertidaksamaan  $x_m > \alpha$ .

Nah, jelas 1 adalah bilangan real positif. Jika kita tetapkan  $\alpha = 1$ , maka berdasarkan **Definisi Barisan Bilangan Real yang Tidak Terbatas ke Atas** akan terdapat suatu bilangan asli  $m$  sedemikian sehingga berlaku pertidaksamaan  $x_m > 1$ .

Ingat!  $x_m$  adalah suku dari barisan  $(x_n)$ . Dengan kata lain, berdasarkan **Definisi Barisan Bilangan Real yang Tidak Terbatas ke Atas** akan terdapat suatu suku  $x_m$  yang memenuhi pertidaksamaan  $x_m > 1$ .

Perhatikan! **Mungkin saja** ada beberapa suku pada barisan  $(x_n)$  yang nilainya lebih besar dari 1. Misalkan  $x_{m'}$ ,  $x_{m''}$ ,  $x_{m'''}$ , dst adalah suku lain pada barisan  $(x_n)$  yang nilainya lebih besar dari 1 sehingga dengan begitu akan memenuhi pertidaksamaan  $x_{m'} > 1$ ,  $x_{m''} > 1$ ,  $x_{m'''} > 1$ , dst.

Nah, perhatikan bahwa dari suku  $x_m$ ,  $x_{m'}$ ,  $x_{m''}$ ,  $x_{m'''}$ , dst itu, kita dapat memilih suku yang nilainya paling kecil. Kita tandai  $x_{m_1}$  sebagai suku terkecil dari barisan  $(x_n)$  yang memenuhi pertidaksamaan  $x_{m_1} > 1$ .

Dengan cara yang serupa, kita dapat menetapkan  $\alpha = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ , dst sedemikian sehingga akan terdapat suatu bilangan asli  $m_2, m_3, m_4$ , dst yang:

1.  $x_{m_2}$  adalah suku terkecil dari barisan  $(x_n)$  yang memenuhi pertidaksamaan  $x_{m_2} > 2$ .
2.  $x_{m_3}$  adalah suku terkecil dari barisan  $(x_n)$  yang memenuhi pertidaksamaan  $x_{m_3} > 3$ .
3.  $x_{m_4}$  adalah suku terkecil dari barisan  $(x_n)$  yang memenuhi pertidaksamaan  $x_{m_4} > 4$ .
4. dst.

Nah, berdasarkan penjabaran di atas, maka kita dapat membentuk barisan bagian  $(x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, x_{m_4}, \dots)$  dari barisan  $(x_n)$ .

Nah! Kita akan mengklaim bahwa barisan bagian  $(x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, x_{m_4}, \dots)$  ini adalah barisan bagian yang dimaksud pada soal. Untuk itu kita harus menunjukkan kebenaran pernyataan berikut.

### Pernyataan yang Akan Dibuktikan Kebenarannya

Untuk sebarang bilangan real positif  $\epsilon$  akan terdapat suatu bilangan asli  $M$  sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli  $i$  yang memenuhi pertidaksamaan  $i > M$  juga akan memenuhi pertidaksamaan  $\left| \frac{1}{x_{m_i}} \right| < \epsilon$ .

#### • Langkah-1

Oke! Kita ambil sebarang bilangan real positif  $\epsilon$ .

#### • Langkah-2

Berdasarkan *Archimedean Property*, untuk sebarang bilangan real positif  $\epsilon$  yang diambil pada **Langkah-1** akan terdapat suatu bilangan asli  $N$  yang memenuhi pertidaksamaan  $N > \epsilon$ .

#### • Langkah-3

Karena  $N$  adalah bilangan asli, maka akan terdapat suku-suku  $x_{m_N}, x_{m_{N+1}}, x_{m_{N+2}}, x_{m_{N+3}}$ , dst pada barisan bagian  $(x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, x_{m_4}, \dots)$  sedemikian sehingga akan berlaku pertidaksamaan  $\epsilon < N < x_{m_N} < x_{m_{N+1}} < x_{m_{N+2}} < x_{m_{N+3}} < \dots$

#### • Langkah-4

Karena suku-suku  $x_{m_N}, x_{m_{N+1}}, x_{m_{N+2}}, x_{m_{N+3}}$ , dst adalah bilangan real positif, maka akan berlaku pertidaksamaan  $\epsilon > \frac{1}{\epsilon} > \frac{1}{x_{m_N}} > \frac{1}{x_{m_{N+1}}} > \frac{1}{x_{m_{N+2}}} > \frac{1}{x_{m_{N+3}}} > \dots$  yang ekuivalen dengan  $\epsilon > \frac{1}{\epsilon} > \left| \frac{1}{x_{m_N}} \right| > \left| \frac{1}{x_{m_{N+1}}} \right| > \left| \frac{1}{x_{m_{N+2}}} \right| > \left| \frac{1}{x_{m_{N+3}}} \right| > \dots$

Terbukti bahwa barisan bagian  $(x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, x_{m_4}, \dots)$  ini adalah barisan bagian yang dimaksud pada soal.

Oh iya! Di awal tadi kan kita **mengasumsikan** bahwa barisan  $(x_n)$  tidak terbatasnya itu ke atas  $(+\infty)$ . Padahal, barisan  $(x_n)$  juga bisa tidak terbatasnya itu ke bawah  $(-\infty)$ .

Nah, kita bisa menggunakan definisi berikut untuk barisan  $(x_n)$  yang tidak terbatas ke bawah.

**Definisi Barisan Bilangan Real yang Terbatas ke Bawah**

Barisan bilangan real  $(x_n)$  terbatas ke bawah jika dan hanya jika terdapat bilangan real negatif  $\beta$  sedemikian sehingga berlaku pertidaksamaan  $\beta \leq x_n$  untuk setiap bilangan asli  $n$ .

Karena definisi dari barisan bilangan real yang tidak terbatas ke atas itu adalah negasi dari definisi dari barisan bilangan real yang terbatas ke atas, jadinya ya seperti ini definisinya.

**Definisi Barisan Bilangan Real yang Tidak Terbatas ke Bawah**

Barisan bilangan real  $(x_n)$  tidak terbatas ke bawah jika dan hanya jika untuk setiap bilangan real negatif  $\beta$  akan terdapat suatu bilangan asli  $m$  sedemikian sehingga berlaku pertidaksamaan  $x_m < \beta$ .

Dengan definisi di atas, jika barisan bilangan real  $(x_n)$  tidak terbatas ke bawah, maka barisan  $(x_n)$  memuat suku-suku bernilai negatif yang tak berhingga banyaknya. Dengan demikian, harga mutlak suku-suku yang bernilai negatif tersebut akan berupa bilangan real positif. Pembuktiannya pun akan mirip seperti langkah-langkah pembuktian ketika barisan bilangan real  $(x_n)$  tidak terbatas ke atas.

■

## 6

# Ayo Kerjakan!

## Ujian Tengah Semester

### Soal Nomor 3 (b)

#### Soal

Diberikan barisan bilangan real  $(x_n)$  dengan  $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ , untuk setiap  $n \geq 1$ . Tunjukkan barisan  $(x_n)$  naik monoton. Apakah barisan  $(x_n)$  konvergen? Jelaskan jawaban Saudara!

---

#### Dikerjakan

Oke! Supaya tidak bingung dan mendapat sedikit gambaran, ayo kita jabarkan saja suku  $x_1$  hingga  $x_5$ .

- $x_1 = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$
- $x_2 = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$
- $x_3 = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3+2} + \dots + \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$
- $x_4 = \frac{1}{4+1} + \frac{1}{4+2} + \dots + \frac{1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$
- $x_5 = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5+2} + \dots + \frac{1}{5 \cdot 2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$

Ayo ingat lagi definisi barisan naik monoton di bawah.

**Barisan Naik Monoton**

Suatu barisan bilangan real  $(x_n) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$  dikatakan naik monoton jika dan hanya jika  $x_{i+1} \geq x_i$  untuk setiap  $i \in \mathbb{N}$ .

Kita akan menggunakan **Induksi Matematika** untuk membuktikan bahwa barisan  $(x_n)$  naik monoton. Caranya adalah dengan menunjukkan 2 hal berikut secara berurutan.

1. Menunjukkan bahwa  $x_2 \geq x_1$ .
2. Jika diasumsikan  $x_{p+1} \geq x_p$  untuk sebarang  $p \in \mathbb{N}$  dengan  $p > 1$ , maka akan berlaku  $x_{p+2} \geq x_{p+1}$ .

Pertama, untuk menunjukkan bahwa  $x_2 \geq x_1$ , maka kita cukup membandingkan antara  $x_1 = \frac{1}{2}$  dengan  $x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ .

Karena faktor persekutuan terbesar dari 2, 3, dan 4 adalah 12, maka jika penyebut-penyebut pada suku  $x_1$  dan  $x_2$  kita ubah menjadi 12 akan diperoleh hasil sebagai berikut.

- $x_1 = \frac{1}{2} = \frac{6}{12}$
- $x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$

Karena  $\frac{7}{12}$  lebih besar dari  $\frac{6}{12}$ , maka kita dapat menyatakan bahwa benar  $x_2 \geq x_1$ .

Selanjutnya, kita asumsikan  $x_{p+1} \geq x_p$  untuk sebarang  $p \in \mathbb{N}$  dengan  $p > 1$ . Apabila kita jabarkan suku  $x_p$  dan  $x_{p+1}$ , maka akan diperoleh hasil sebagai berikut.

- $x_p = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{2p}$
- $x_{p+1} = \frac{1}{(p+1)+1} + \frac{1}{(p+1)+2} + \dots + \frac{1}{2 \cdot (p+1)}$

Apabila kita jabarkan lebih detil lagi.

- $x_p = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{2p}$
- $x_{p+1} = \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3} + \dots + \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+2}$

Jika kita nyatakan  $\alpha_p = \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3} + \dots + \frac{1}{2p}$ , maka kita akan memperoleh persamaan berikut.

- $x_p = \frac{1}{p+1} + \alpha_p$
- $x_{p+1} = \alpha_p + \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+2}$

Nah, karena diasumsikan  $x_{p+1} \geq x_p$ , maka akan berlaku  $\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+2} \geq \frac{1}{p+1}$ .

Perhatikan! Karena  $p > 1$ , maka  $2p+1$ ,  $2p+2$  dan  $p+1$  juga akan lebih besar dari 1. Jika semua penyebut pada pertidaksamaan tersebut kita samakan, maka akan diperoleh pertidaksamaan:

$$\frac{2 \cdot (p+1)}{2 \cdot (2p+1) \cdot (p+1)} + \frac{2p+1}{2 \cdot (2p+1) \cdot (p+1)} \geq \frac{2 \cdot (2p+1)}{2 \cdot (2p+1) \cdot (p+1)}$$

Lanjut dengan menjabarkan bagian pembilang, maka akan diperoleh pertidaksamaan:

$$\frac{4p+3}{2 \cdot (2p+1) \cdot (p+1)} \geq \frac{4p+2}{2 \cdot (2p+1) \cdot (p+1)}$$

Perhatikan bahwa untuk sebarang bilangan asli  $p$  jelas akan berlaku  $4p+3 > 4p+2$ . Dengan demikian, persamaan di atas akan berlaku untuk sebarang bilangan asli  $p$ . Termasuk, tentu saja juga berlaku untuk  $p+1$ ,  $p+2$ ,  $p+3$ , dst.

Nah, karena pertidaksamaan  $x_{p+1} \geq x_p$  memang benar-benar terbukti berlaku benar untuk sebarang bilangan asli  $p$  (bukan hanya sekadar asumsi lagi), maka kita bisa menyatakan bahwa  $x_{p+2} \geq x_{p+1}$ .

Jadi, berdasarkan metode Induksi Matematika, kita bisa menyatakan bahwa barisan  $(x_n)$  adalah barisan yang naik monoton.

\*\*\*

Untuk menyelidiki apakah barisan  $(x_n)$  konvergen atau tidak itu cukup *tricky*.

Ada dua hal yang harus kita "tanyakan" sebelumnya.

1. Apakah kita hanya ingin sekadar menunjukkan bahwa barisan  $(x_n)$  itu konvergen?
2. Apakah kita ingin menunjukkan eksistensi suatu bilangan real  $L$  sedemikian sehingga barisan  $(x_n)$  konvergen ke  $L$ ?

Oke! Karena aku "merasa" bahwa sekadar menunjukkan bahwa barisan  $(x_n)$  itu konvergen itu lebih mudah, maka ayo kita tunjukkan!

Perhatikan sifat berikut!

### Konvergensi Barisan Naik Monoton

Jika  $(x_n)$  adalah barisan bilangan real yang naik monoton dan terbatas ke atas, maka barisan  $(x_n)$  adalah barisan yang konvergen.

Berdasarkan sifat di atas, kita akan menunjukkan bahwa barisan  $(x_n)$  itu terbatas ke atas. Artinya, ada suatu bilangan real  $M$  sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli  $n$  akan berlaku  $x_n \leq M$ .

Oke! Kita ambil sebarang bilangan asli  $n$ .

Untuk menyegarkan ingatan, mari kita tampilkan kembali suku  $x_n$  yang didefinisikan sebagai:

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Nah,... hmmm... coba kita bentuk  $x_n + x_n$ . Jika dijabarkan, maka hasilnya akan menjadi seperti ini.

$$x_n + x_n = \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) + \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$$

Karena operasi penjumlahan pada bilangan real bersifat komutatif, maka kita bisa "menyusun" ulang suku-suku pada penjabaran bentuk  $x_n + x_n$  menjadi seperti ini.

$$x_n + x_n = \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) + \left( \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \dots + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \right)$$

Jika jumlahan tersebut kita ubah dalam notasi deret, maka akan menjadi persamaan ini.

$$x_n + x_n = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n+i} + \frac{1}{2n-(i-1)} \right) \quad (*1)$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa  $2n - (i - 1)$  akan lebih kecil dari  $2n - i$ .

Nah, jika ada dua deret,  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2n - (i - 1)}$  dan  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2n - i}$ , kira-kira mana ya yang nilainya lebih besar?

Kalau bingung, ayo kita jabarkan saja!

- $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2n - (i - 1)} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n - 1} + \dots + \frac{1}{n + 1}$
- $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2n - i} = \frac{1}{2n - 1} + \frac{1}{2n - 2} + \dots + \frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n}$

Misalkan  $\alpha = \frac{1}{2n - 1} + \dots + \frac{1}{n + 1}$ , maka kita akan punya persamaan berikut.

- $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2n - (i - 1)} = \frac{1}{2n} + \alpha$
- $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2n - i} = \alpha + \frac{1}{n}$

Nah, karena  $n$  adalah bilangan asli, maka jelas berlaku  $\frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$ . Akibatnya, kita bisa menyimpulkan bahwa berlaku pertidaksamaan:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2n - (i - 1)} < \sum_{i=1}^n \frac{1}{2n - i}$$

dengan kata lain akan berlaku pertidaksamaan:

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n + i} + \frac{1}{2n - (i - 1)} \right) < \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n + i} + \frac{1}{2n - i} \right)$$

dengan kata lain (lagi), dengan mengacu pada pertidaksamaan (\*) di atas, maka akan berlaku pertidaksamaan:

$$x_n + x_n < \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n + i} + \frac{1}{2n - i} \right)$$

Kemudian, jika penyebutnya disamakan, maka kita akan memperoleh persamaan:

$$\frac{1}{n+i} + \frac{1}{2n-i} = \frac{3n}{(n+i)(2n-i)}$$

dan dengan demikian berlaku pertidaksamaan:

$$x_n + x_n < \sum_{i=1}^n \frac{3n}{(n+i)(2n-i)} \quad (*2)$$

Selanjutnya, kita akan fokus ke bagian penyebut, yaitu  $(n+i)(2n-i)$ , yang ekuivalen dengan  $2n^2 + i(n-i)$ .

Perhatikan bahwa nilai peubah  $i$  adalah bilangan asli mulai 1 hingga  $n$ . Dengan demikian nilai  $n-i$  akan berkisar mulai dari  $n-1$  hingga 0. Dengan demikian pula:

- Ketika  $i = 1$ , maka jumlahan  $i(n-i)$  akan sama dengan  $n-1$ . Akibatnya,  $2n^2 + i(n-i)$  akan sama dengan  $2n^2 + (n-1)$ . Karena  $n$  adalah bilangan asli, maka nilai  $n-1$  akan lebih besar atau sama dengan 0 ( $\geq 0$ ). Jadi, ketika  $i = 1$ , maka nilai  $2n^2 + i(n-i)$  akan berupa bilangan asli yang tidak lain adalah bilangan real positif.
- Ketika  $i = n$ , maka jumlahan  $i(n-i)$  akan sama dengan dengan 0. Akibatnya,  $2n^2 + i(n-i)$  akan sama dengan  $2n^2$ .
- Semakin besar nilai  $i$ , maka nilai  $2n^2 + i(n-i)$  akan semakin kecil akan tetapi tetap merupakan bilangan asli (yang bisa dipandang sebagai bilangan real positif).

Nah, berdasarkan uraian di atas, untuk  $1 \leq i \leq n$ , maka akan berlaku  $2n^2 + i(n-i) = 2n^2 + \alpha_i$  untuk suatu bilangan real positif  $\alpha_i$ .

Dengan kata lain, untuk  $1 \leq i \leq n$ , maka akan berlaku  $2n^2 + i(n-i) \geq 2n^2$ .

Akibatnya, untuk  $1 \leq i \leq n$ , maka akan berlaku  $\frac{1}{2n^2 + i(n-i)} \leq \frac{1}{2n^2}$ .

Oke! Sekarang kita kembali ke pertidaksamaan **(\*2)**!

Karena untuk  $1 \leq i \leq n$  akan berlaku  $\frac{1}{2n^2 + i(n-i)} \leq \frac{1}{2n^2}$ , maka kita akan memperoleh pertidaksamaan:

$$\sum_{i=1}^n \frac{3n}{(n+i)(2n-i)} \leq \sum_{i=1}^n \frac{3n}{2n^2}$$

yang berakibat akan berlaku pertidaksamaan:

$$x_n + x_n \leq \sum_{i=1}^n \frac{3n}{2n^2} \quad (*3)$$

Seperti yang (mungkin) sudah bisa ditebak, kita sederhanakan saja  $\sum_{i=1}^n \frac{3n}{2n^2}$  menjadi seperti di bawah ini.

$$\sum_{i=1}^n \frac{3n}{2n^2} = \sum_{i=1}^n \frac{3}{2n} = \left(\frac{3}{2n}\right) \cdot n = \frac{3}{2}$$

Kembali ke pertidaksamaan (\*3), maka kita akan mendapatkan pertidaksamaan:

$$x_n + x_n \leq \frac{3}{2}$$

atau dengan kata lain:

$$x_n \leq \frac{3}{4}$$

Dengan demikian, karena untuk sebarang bilangan asli  $n$  berlaku  $x_n \leq \frac{3}{4}$ , maka kita bisa menyimpulkan bahwa barisan  $(x_n)$  terbatas ke atas.

Jadi, karena barisan  $(x_n)$  adalah barisan naik monoton yang terbatas ke atas, maka berdasarkan sifat **Konvergensi Barisan Naik Monoton**, kita bisa menyimpulkan bahwa barisan  $(x_n)$  konvergen.

Eh, tapi ingat lho!

Kita tidak boleh menyatakan bahwa barisan  $(x_n)$  konvergen ke  $\frac{3}{2}$ ! Karena sesungguhnya limit barisan  $(x_n)$  **bukan**  $\frac{3}{2}$ .

Lha terus apa dong?

*Dong... dong dong dong dong... dong dong!*

\*\*\*

Karena manusia tidak pernah puas (*halah!*), adalah hal yang wajar bilamana ada yang belum puas dengan hanya menerima pernyataan bahwa barisan  $(x_n)$  konvergen.

Mungkin ada yang bertanya-tanya,

*Barisan  $(x_n)$  konvergen ke bilangan real apa?*

karena sesungguhnya pertanyaan di atas itu sangat wajar untuk dilontarkan.

Oke! Sekarang kita akan mencari limit dari barisan  $(x_n)$ !

Pertama-tama, perhatikan bahwa suku  $x_n$  yang didefinisikan sebagai:

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

dapat kita nyatakan dalam deret sebagai:

$$x_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}$$

Lebih lanjut, karena  $n$  adalah bilangan asli, maka  $1/n$  adalah bilangan real positif. Akibatnya, bentuk deret di atas akan ekuivalen dengan ini.

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} \iff \sum_{i=1}^n \left( \frac{1/n}{1/n} \cdot \frac{1}{n+i} \right)$$

Selanjutnya, kita akan coba membandingkan  $x_{p+2}$  dengan  $x_{p+1}$ . Jika  $x_{p+2}$  dijabarkan sebagaimana wujud seperti di atas, maka akan diperoleh hasil:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} &\iff \sum_{i=1}^n \left( \frac{1/n}{1/n} \cdot \frac{1}{n+i} \right) \\ &\iff \sum_{i=1}^n \frac{1/n}{1+i/n} \\ &\iff \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+i/n} \end{aligned}$$

Nah! Kalau sudah pernah mempelajari topik **Integral Riemann**, terutama terkait topik **Jumlahan Riemann** (*Riemann Sum*), kita akan memiliki persamaan berikut.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f \left( a + \left( \frac{b-a}{n} \right) i \right) = \int_{x=a}^b f(x) dx$$

Naaah! Dengan menetapkan  $a = 0$ ,  $b = 1$ , dan  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ , maka kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(a + \left(\frac{b-a}{n}\right)i\right) &= \int_{x=a}^b f(x)dx \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-0}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(0 + \left(\frac{1-0}{n}\right)i\right) = \int_{x=0}^1 \frac{1}{1+x}dx \\ &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_{x=0}^1 \frac{1}{1+x}dx \\ &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+i/n} = \int_{x=0}^1 \frac{1}{1+x}dx \end{aligned}$$

Oke! Dengan demikian, kita akan memperoleh persamaan  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+i/n} = \int_{x=0}^1 \frac{1}{1+x}dx$ .

Karena  $\int \frac{1}{1+x}dx = \ln(1+x)$ , dengan demikian kita akan punya persamaan ini.

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^1 \frac{1}{1+x}dx &= \ln(1+1) - \ln(1+0) \\ &= \ln(2) - \ln(1) \\ &= \ln(2) - 0 \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas diperoleh hasil  $\int_{x=0}^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln(2)$ .

Jadi, karena  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+i/n} = \int_{x=0}^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln(2)$ , maka kita dapat menyimpulkan bahwa

barisan  $(x_n)$  dengan  $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$  itu konvergen ke  $\ln(2)$ .

■



# 7

## Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 4

### Soal

Diberikan barisan bilangan real  $(x_n)$  dan untuk setiap  $n \geq 1$ , didefinisikan  $y_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n x_k$ . Jika  $(x_n)$  konvergen ke  $x$ , tunjukkan  $(y_n)$  juga konvergen ke  $x$  !

---

### Dikerjakan

*Aaargh!* Soal ini bikin kepikiran selama sehari-hari! Walaupun permasalahannya terlihat sederhana, tapi jawabannya lumayan *tricky*. Walaupun ya... sebetulnya bisa diselesaikan menggunakan teorema-teorema dasar analisis real.

Inti permasalahan ini terkenal sebagai **Cesaro Mean Theorem**. Banyak tulisan di jagat internet yang memaparkan pembuktian teorema ini. Tapi, (menurutku) sebagian besar tulisan-tulisan itu sulit untuk dipahami. Khususnya bagi orang yang sudah belasan tahun nggak belajar analisis real 😊 seperti aku.

*Well*, untungnya aku sesekali ya masih suka baca-baca buku *fotocopy-an Introduction to Real Analysis*. Terutama pas sedang "berusaha keras" mengeluarkan *endog*. 😊

Oke! Kali ini aku mau mencoba menjelaskan pembuktian Cesaro Mean Theorem dengan bahasa yang (semoga saja) mudah dipahami.

Pertama, kita paparkan dulu definisi barisan konvergen yang bakal kita pakai.

### Definisi Barisan Konvergen

Diketahui  $(x_n) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$  adalah barisan bilangan real dan  $L$  suatu bilangan real.

Barisan  $(x_n)$  dikatakan konvergen ke  $L$  jika dan hanya jika untuk sebarang bilangan real positif  $\epsilon$  akan bisa ditetapkan suatu bilangan asli  $N$  sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli  $m$  yang lebih besar dari  $N$  akan berlaku  $|x_m - L| < \epsilon$ .

Kedua, demi menghilangkan hal-hal yang membuat rancu, kita ganti notasi limit barisan  $(x_n)$  yang semula  $x$  menjadi  $L$ . Kan di soal disebutkan bahwa **Diketahui barisan  $(x_n)$  konvergen ke  $x$  tuh?** Nah, mulai saat ini kita ganti menjadi **Diketahui barisan  $(x_n)$  konvergen ke  $L$ .**

\*\*\*

#### • Langkah ke-1

Kita ambil sebarang bilangan real positif  $\epsilon_0$ .

Karena diketahui barisan  $(x_n)$  konvergen ke  $L$ , maka berdasarkan **Definisi Barisan Konvergen** di atas, kita bisa menetapkan suatu bilangan asli  $N_0$  sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli  $m$  yang lebih besar dari  $N_0$  ( $m > N_0$ ) akan berlaku  $|x_m - L| < \epsilon_0$ .

#### Catatan:

Contohnya seperti ini. Misal  $\epsilon_0 = 0.1$ , maka kita bisa menetapkan  $N_0 = 4$ ,  $N_0 = 5$ ,  $N_0 = 6$ , dst. Semisal  $\epsilon_0 = 0.007$ , maka kita bisa menetapkan  $N_0 = 51$ ,  $N_0 = 52$ ,  $N_0 = 53$ , dst.

#### • Langkah ke-2

Karena  $\epsilon_0$  adalah bilangan real positif, maka  $\frac{\epsilon_0}{2}$  juga adalah bilangan real positif. Nah, berdasarkan **Definisi Barisan Konvergen** di atas, kita bisa menetapkan suatu bilangan asli  $N_{1/2}$  sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli  $m$  yang lebih besar dari  $N_{1/2}$  ( $m > N_{1/2}$ ) akan berlaku  $|x_m - L| < \frac{\epsilon_0}{2}$ .

Perhatikan ya! Bilangan asli  $N_0$  dan  $N_{1/2}$  yang bisa kita tetapkan pada **Langkah ke-1** dan **Langkah ke-2** bisa jadi berbeda ( $N_0 \neq N_{1/2}$ ).

- **Langkah ke-3**

Cara untuk menunjukkan bahwa barisan  $(y_n)$  juga konvergen ke  $L$  adalah di bawah ini.

**Misi Utama Kita**

Kita harus menunjukkan bahwa terdapat suatu bilangan asli  $\bar{N}$  sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli  $m$  yang lebih besar dari  $\bar{N}$  ( $m > \bar{N}$ ) akan berlaku  $|y_m - L| < \epsilon_0$ .

**Catatan:**

Bilangan  $\epsilon_0$  mengacu ke  $\epsilon_0$  yang kita ambil secara sebarang pada **Langkah-1**.

Oke! Jadi, misi utama kita adalah menentukan bilangan asli  $\bar{N}$ !

Bagaimana ya caranya?

• Langkah ke-4

Supaya tidak tambah bingung, ayo kita jabarkan pertidaksamaan  $|y_m - L| < \epsilon_0$ !

Pada soal, diketahui  $y_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n x_k$ . Jadi, untuk  $y_m$  ya tinggal diganti saja simbol notasi  $n$  jadi

$$m, \text{ yaitu } y_m = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^m x_k.$$

$$\begin{aligned} |y_m - L| < \epsilon_0 &\iff \left| \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^m x_k - L \right| < \epsilon_0 \\ &\iff \left| \frac{1}{m} \cdot \left( \sum_{k=1}^m x_k \right) - \frac{m}{m} \cdot L \right| < \epsilon_0 \end{aligned}$$

$\sum$  dijabarkan:

$$\iff \left| \frac{1}{m} \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1} + x_m) - \frac{m}{m} \cdot L \right| < \epsilon_0$$

Karena  $m$  adalah bilangan asli dan bilangan asli itu selalu positif:

$$\begin{aligned} &\iff \left| \frac{1}{m} \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1} + x_m - mL) \right| < \epsilon_0 \\ &\iff \left| \frac{1}{m} \cdot ((x_1 - L) + (x_2 - L) + \dots + (x_{m-1} - L) + (x_m - L)) \right| < \epsilon_0 \\ &\iff \frac{1}{m} \cdot |(x_1 - L) + (x_2 - L) + \dots + (x_{m-1} - L) + (x_m - L)| < \epsilon_0 \end{aligned}$$

bersambung (\*1)

• **Langkah ke-5**

Perhatikan bentuk

$$\frac{1}{m} \cdot |(x_1 - L) + (x_2 - L) + \dots + (x_{m-1} - L) + (x_m - L)|$$

pada akhir **Langkah ke-4** yang ditandai dengan tulisan **bersambung (\*1)** di atas!

Demi efisiensi penulisan supaya tidak berpanjang-panjang, bentuk di atas akan diringkas menjadi:

$$\frac{1}{m} \cdot |(x_1 - L) + \dots + (x_m - L)|.$$

Nah! Berdasarkan sifat *Triangle Inequality*-nya bilangan real, kita akan mendapatkan pertidaksamaan:

$$\frac{1}{m} \cdot |(x_1 - L) + \dots + (x_m - L)| \leq \frac{1}{m} \cdot (|x_1 - L| + \dots + |x_m - L|)$$

yang ekuivalen dengan pertidaksamaan:

$$\frac{1}{m} \cdot |(x_1 - L) + \dots + (x_m - L)| \leq \frac{|x_1 - L|}{m} + \dots + \frac{|x_m - L|}{m}$$

Oke! Silakan resapi baik-baik pertidaksamaan di atas sebelum kita lanjut ke **Langkah-6!**

• **Langkah ke-6**

Ingat misi utama kita untuk soal ini yang sudah dipaparkan pada **Langkah-3!**

**Misi Utama Kita**

Kita harus menunjukkan bahwa terdapat suatu bilangan asli  $\bar{N}$  sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli  $m$  yang lebih besar dari  $\bar{N}$  ( $m > \bar{N}$ ) akan berlaku  $|y_m - L| < \epsilon_0$ .

**Catatan:**

Bilangan  $\epsilon_0$  mengacu ke  $\epsilon_0$  yang kita ambil secara sebarang pada **Langkah-1**.

Hmmm....

Gimana kalau....

Ah, gimana jika kita tetapkan  $\bar{N} = N_{1/2}$ ?

Ingat! Pada **Langkah-2**, kita kan punya bilangan asli  $N_{1/2}$ . Silakan ingat lagi "cuplikan" **Langkah-2** di atas pada kotak kuning berikut.

Untuk sebarang bilangan  $\epsilon_0$  yang kita ambil, maka  $\frac{\epsilon_0}{2}$  juga adalah bilangan real positif. Karena diketahui barisan  $(x_n)$  konvergen ke  $L$ , maka berdasarkan Definisi Barisan Konvergen di atas, kita bisa menetapkan suatu bilangan asli  $N_{1/2}$  sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli  $m$  yang lebih besar dari  $N_{1/2}$  ( $m > N_{1/2}$ ) akan berlaku  $|x_m - L| < \frac{\epsilon_0}{2}$ .

Artinya:

$$|x_{(N_{1/2}+1)} - L| < \frac{\epsilon_0}{2}, \quad |x_{(N_{1/2}+2)} - L| < \frac{\epsilon_0}{2}, \quad |x_{(N_{1/2}+3)} - L| < \frac{\epsilon_0}{2}, \text{ dst.}$$

Dengan kata lain untuk  $x_1, x_2, x_3$ , dan seterusnya hingga  $x_{N_{1/2}}$  akan berlaku:

$$|x_1 - L| \geq \frac{\epsilon_0}{2}, \quad |x_2 - L| \geq \frac{\epsilon_0}{2}, \text{ dan seterusnya hingga } |x_{N_{1/2}} - L| \geq \frac{\epsilon_0}{2}.$$

Okeee!

Misalkan  $m$  adalah bilangan asli yang lebih besar dari  $\bar{N}$ .  
(*dengan kata lain*  $m > \bar{N}$  yang akan berakibat  $m > N_{1/2}$ ).

Ingat!  $\bar{N}$  itu akan berada sebelum  $m$ !

Jadi, "urut-urutannya":  $1 \dots \bar{N} = N_{1/2} \dots m$ .

Dengan demikian,  $m = \bar{N} + r$  untuk suatu bilangan asli  $r$ .

Nah, berdasarkan akhir **Langkah-5**, kita akan punya pertidaksamaan:

$$\frac{1}{m} \cdot |(x_1 - L) + \dots + (x_m - L)| \leq \frac{|x_1 - L|}{m} + \dots + \frac{|x_m - L|}{m}$$

yang ekuivalen dengan:

$$\frac{1}{m} \cdot |(x_1 - L) + \dots + (x_m - L)| \leq \frac{|x_1 - L|}{m} + \dots + \frac{|x_{(\bar{N}+r)} - L|}{m}$$

yang ekuivalen dengan:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} \cdot |(x_1 - L) + \dots + (x_m - L)| \\ & \leq \\ & \frac{|x_1 - L|}{m} + \dots + \frac{|x_{\bar{N}} - L|}{m} + \frac{|x_{(\bar{N}+1)} - L|}{m} + \dots + \frac{|x_{(\bar{N}+r)} - L|}{m} \end{aligned}$$

Ingat! Di awal **Langkah-6** ini kita menetapkan  $\bar{N} = N_{1/2}$ .

Karena:

$$|x_{(N_{1/2}+1)} - L| < \frac{\epsilon_0}{2}, \quad |x_{(N_{1/2}+2)} - L| < \frac{\epsilon_0}{2}, \quad |x_{(N_{1/2}+3)} - L| < \frac{\epsilon_0}{2}, \text{ dst}$$

maka:

$$\begin{aligned} \frac{|x_1 - L|}{m} + \dots + \frac{|x_{\bar{N}} - L|}{m} + \frac{|x_{(\bar{N}+1)} - L|}{m} + \dots + \frac{|x_{(\bar{N}+r)} - L|}{m} \\ < \\ \frac{|x_1 - L|}{m} + \dots + \frac{|x_{\bar{N}} - L|}{m} + \frac{\epsilon_0}{m} + \dots + \frac{\epsilon_0}{m} \end{aligned}$$

yang ekuivalen dengan:

$$\begin{aligned} \frac{|x_1 - L|}{m} + \dots + \frac{|x_{\bar{N}} - L|}{m} + \frac{|x_{(\bar{N}+1)} - L|}{m} + \dots + \frac{|x_{(\bar{N}+r)} - L|}{m} \\ < \\ \frac{|x_1 - L|}{m} + \dots + \frac{|x_{\bar{N}} - L|}{m} + \frac{r \cdot \epsilon_0}{m} \end{aligned}$$

#### • Langkah ke-7

Selanjutnya, perhatikan jumlahan

$$\frac{|x_1 - L|}{m} + \dots + \frac{|x_{\bar{N}} - L|}{m}$$

yang termuat di pertidaksamaan di akhir **Langkah ke-6!**

Perhatikan!  $|x_1 - L|$ ,  $|x_2 - L|$ , dan seterusnya hingga  $|x_{\bar{N}} - L|$  adalah bilangan-bilangan real positif.

Perhatikan juga bahwa berdasarkan **Langkah ke-6** akan berlaku  $|x_1 - L| \geq \frac{\epsilon_0}{2}$ ,  $|x_2 - L| \geq \frac{\epsilon_0}{2}$ , dan seterusnya hingga  $|x_{\bar{N}} - L| \geq \frac{\epsilon_0}{2}$ .

Perhatikan bahwa kita bisa menetapkan bilangan real positif  $M'$  sebagai yang terbesar di antara  $|x_1 - L|$ ,  $|x_2 - L|$ , dan seterusnya hingga  $|x_{\bar{N}} - L|$ . Dengan kata lain:

$$M' = \text{maksimum} \{|x_1 - L|, |x_2 - L|, |x_3 - L|, \dots, |x_{\bar{N}} - L|\}.$$

Dengan demikian akan berlaku:

$$|x_1 - L| \leq M' \quad , \quad |x_2 - L| \leq M' \quad , \quad |x_3 - L| \leq M' \quad \text{dan seterusnya hingga } |x_{\bar{N}} - L| \leq M' ,$$

Akibatnya, kita akan punya pertidaksamaan:

$$\frac{|x_1 - L|}{m} + \dots + \frac{|x_{\bar{N}} - L|}{m} \leq \frac{1}{m} \cdot (\bar{N} \cdot M')$$

• **Langkah ke-8**

Nah! Kita ingin agar berlaku pertidaksamaan  $\frac{1}{m} \cdot (\bar{N} \cdot M') \leq \frac{\epsilon_0}{2}$ .

Gimana ya caranya?

Gampang!

Kita ubah saja penetapan  $\bar{N}$ !

Pada **Langkah ke-6** tadi, kita menetapkan  $\bar{N} = N_{1/2}$  kan?

Sekarang kita harus menetapkan  $\bar{N}$  **baru** sedemikian sehingga nilainya **lebih besar** dari  $N_{1/2}$ ! Dengan begitu, sifat-sifat yang berlaku ketika  $\bar{N} = N_{1/2}$  juga akan berlaku untuk nilai  $\bar{N}$  yang baru ini.

Buat yang bingung, begini lho. Contohnya, jika sifat  $P$  berlaku untuk  $n > 5$ , maka sifat  $P$  tersebut juga akan berlaku untuk  $n > 100$  toh? Kan  $100 > 5$ ? Nah, 5 dan 100 ini kita ibaratkan sebagai perubahan nilai  $\bar{N}$ .

Nah, kembali ke penetapan  $\bar{N}$  yang **baru**.

Hmmm...

Ah, perhatikan bahwa  $\epsilon_0$ ,  $M'$ , dan  $N_{1/2}$  adalah bilangan-bilangan real positif. Ya kan?

Jadi, kalau dibentuk  $\frac{N_{1/2} \cdot M'}{\epsilon_0}$ , maka ini juga merupakan bilangan real positif. Ya nggak?

Berdasarkan **Archimedean Property**, kita dapat menemukan bilangan asli terkecil  $N_{baru}$  sedemikian sehingga berlaku  $N_{baru} > \frac{N_{1/2} \cdot M'}{\epsilon_0}$ .

Nah ini! Kita tetapkan  $\bar{N}$  baru sebagai  $N_{baru}$  yang didefinisikan di atas itu.

Dengan begitu, untuk sebarang bilangan asli  $m$  yang lebih besar dari  $\bar{N}$  akan berlaku:

$$\frac{1}{m} \cdot (\bar{N} \cdot M') \leq \frac{\epsilon_0}{2}.$$

• **Langkah ke-9 (penutup)**

Pada **Langkah ke-8** kita menetapkan  $\bar{N}$  baru sebagai bilangan asli terkecil yang lebih besar dari  $\frac{N_{1/2} \cdot M'}{\epsilon_0}$ .

Dengan  $\bar{N}$  baru ini maka akan berlaku pertidaksamaan:

$$\frac{|x_1 - L|}{m} + \dots + \frac{|x_{\bar{N}} - L|}{m} \leq \frac{\epsilon_0}{2} \quad (*2)$$

Ingat! Karena nilai  $\bar{N}$  baru **lebih besar** dari  $N_{1/2}$ , maka sifat-sifat yang berlaku untuk  $N_{1/2}$  juga akan berlaku untuk nilai  $\bar{N}$  baru ini.

Dengan demikian, untuk  $\bar{N}$  baru ini akan berlaku pertidaksamaan:

$$\frac{|x_{(\bar{N}+1)} - L|}{m} + \dots + \frac{|x_m - L|}{m} < \frac{m - \bar{N}}{m} \cdot \frac{\epsilon_0}{2}$$

Karena  $m$  dan  $\bar{N}$  adalah bilangan-bilangan asli serta berlaku  $m > \bar{N}$ , maka akan berlaku:

$$\frac{m - \bar{N}}{m} < 1$$

akibatnya:

$$\frac{m - \bar{N}}{m} \cdot \frac{\epsilon_0}{2} < \frac{\epsilon_0}{2}$$

dan dengan demikian:

$$\frac{|x_{(\bar{N}+1)} - L|}{m} + \dots + \frac{|x_m - L|}{m} < \frac{\epsilon_0}{2} \quad (*3)$$

Alhasil, dengan menyatukan (\*2) dan (\*3), maka kita akan mendapatkan pertidaksamaan:

$$\frac{|x_1 - L|}{m} + \dots + \frac{|x_{\bar{N}} - L|}{m} + \frac{|x_{(\bar{N}+1)} - L|}{m} + \dots + \frac{|x_m - L|}{m} < \frac{\epsilon_0}{2} + \frac{\epsilon_0}{2}$$

yang ekuivalen dengan:

$$\frac{|x_1 - L|}{m} + \dots + \frac{|x_{\bar{N}} - L|}{m} + \frac{|x_{(\bar{N}+1)} - L|}{m} + \dots + \frac{|x_m - L|}{m} < \epsilon_0$$

Jadi terbukti bahwa jika diberikan barisan bilangan real  $(x_n)$  yang konvergen ke  $L$  dan untuk setiap  $n \geq 1$ , didefinisikan  $y_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n x_k$ , maka barisan  $(y_n)$  juga konvergen ke  $L$ .

■



# 8

## Ayo Kerjakan! Ujian Tengah Semester Soal Nomor 5 (a)

### Soal

Menggunakan definisi limit fungsi, tunjukkan bahwa:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3} = 1$  !

---

### Dikerjakan

Kita akan menunjukkan bahwa  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3} = 1$  dengan menggunakan definisi limit fungsi sebagaimana pernyataan di dalam kotak hijau berikut.

#### Misi Utama Kita

Jika diberikan sebarang bilangan real positif  $\epsilon$ , maka kita dapat menentukan suatu bilangan real positif  $\delta$  sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi  $0 < |x - 2| < \delta$  juga akan memenuhi  $\left| \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3} - 1 \right| < \epsilon$ .

Oke deh! Ayo kita mulai!

• **Langkah-1**

Kita ambil sebarang bilangan real positif  $\epsilon_0$ .

• **Langkah-2**

Karena bentuk  $\left| \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3} - 1 \right|$  terlihat bisa disederhanakan, jadi ayo kita sederhanakan!

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3} - 1 \right| &= \left| \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3} - \left( \frac{x^2 + 3}{x^2 + 3} \right) \right| \\ &= \left| \frac{x^3 - 1 - x^2 - 3}{x^2 + 3} \right| \\ &= \left| \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 + 3} \right| \end{aligned}$$

Jadi, kita punya persamaan  $\left| \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3} - 1 \right| = \left| \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 + 3} \right|$

• **Langkah-3**

Karena:

- Di dalam kotak hijau di atas kita berhadapan dengan pertidaksamaan  $0 < |x - 2| < \delta$  yang memuat suku  $x - 2$ , dan
- Derajat polinomial  $x^3 - x^2 - 4$  lebih tinggi dari  $x - 2$ ,

jadi mari kita bagi  $x^3 - x^2 - 4$  dengan  $x - 2$  menggunakan **Algoritma Pembagian Polinomial** yang sudah dipelajari di mata kuliah struktur aljabar.

$$x^3 - x^2 - 4 = P_1(x) \cdot (x - 2) + R_1(x)$$

Karena suku terbesar  $x^3 - x^2 - 4$  adalah  $x^3$  jadi kita pilih  $P_1(x) = x^2$ . Dengan demikian:

$$\begin{aligned}x^3 - x^2 - 4 &= P_1(x) \cdot (x - 2) + R_1(x) \\ &= x^2 \cdot (x - 2) + R_1(x) \\ &= x^3 - 2x^2 + R_1(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^3 - x^2 - 4 - x^3 + 2x^2 &= R_1(x) \\ x^2 - 4 &= R_1(x)\end{aligned}$$

Karena derajat  $R_1(x) = x^2 - 4$  masih lebih tinggi dari derajat  $x - 2$ , maka kita bagi  $x^2 - x^2 - 4$  dengan  $x - 2$  menggunakan algoritma pembagian polinomial. Lha, yang ini sih gampang banget!

$$R_1(x) = x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

Jadi, kita punya persamaan  $x^3 - x^2 - 4 = x^2(x - 2) + (x + 2)(x - 2) = (x - 2)(x^2 + x + 2)$ .

#### • Langkah-4

Kita substitusikan persamaan  $x^3 - x^2 - 4 = (x - 2)(x^2 + x + 2)$  yang diperoleh pada **Langkah ke-3** ke dalam persamaan  $\left| \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3} - 1 \right| = \left| \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 + 3} \right|$  yang diperoleh pada **Langkah ke-2**.

$$\begin{aligned}\left| \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3} - 1 \right| &= \left| \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 + 3} \right| \\ &= \left| \frac{(x - 2)(x^2 + x + 2)}{x^2 + 3} \right| \\ &= |x - 2| \cdot \left| \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 3} \right|\end{aligned}$$

*Fiih!*

Perjalanan masih panjang *kamerad!*

Ayo! Lanjut jabarkan terus sampai mampuz! Hahahaha!

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3} - 1 \right| &= |x - 2| \cdot \left| \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 3} \right| \\
 &= |x - 2| \cdot \left| \frac{(x^2 + 3) + (x - 1)}{x^2 + 3} \right| \\
 &= |x - 2| \cdot \left| 1 + \frac{x - 1}{x^2 + 3} \right| \\
 &= |x - 2| \cdot \left| 1 + \frac{x - 1}{(x + 2)(x - 2) + 7} \right|
 \end{aligned}$$

Akhirnya, mentok sudah penjabarannya!

Tapiiii....

Demi menjaga supaya **otak tetap waras** saat mengerjakan soal ini, untuk seterusnya kita akan memakai persamaan:

$$\left| \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3} - 1 \right| = |x - 2| \cdot \left| 1 + \frac{x - 1}{x^2 + 3} \right|$$

Kenapa?

Itu karena nilai  $x^2 + 3$  akan selalu bernilai positif untuk sebarang bilangan real  $x$ .

Lha ini kan kita sukanya yang positif-positif saja.

• **Langkah-5**

Nah! Karena  $\delta$  adalah bilangan positif dan harus berlaku pertidaksamaan  $0 < |x - 2| < \delta$ , maka dengan kata lain bilangan  $x$  ini harus memenuhi pertidaksamaan  $-\delta < x - 2 < \delta$  dan tentu  $x \neq 2$ .

Eh, pertidaksamaan  $-\delta < x - 2 < \delta$  kan ekuivalen dengan pertidaksamaan  $2 - \delta < x < \delta + 2$ .

Nah ini!

Karena soal limit ini berkutat dengan fungsi rasional, maka umumnya sih bakal ada pemilihan nilai  $\delta$  macam-macamnya  $\delta = \text{bla bla bla}$  jika memenuhi kondisi  $X$  dan  $\delta = \text{bli bli bli}$  jika tidak memenuhi kondisi  $XXX$ . Begitu.

Naaaah ini!

Kita akan menetapkan  $\delta_0 = \frac{1}{10}$ , semata-mata supaya nilai  $2 - \delta_0$ ,  $2 + \delta_0$ ,  $1 - \delta_0$ , dan  $1 + \delta_0$  adalah bilangan real positif (dan dengan demikian  $x$  dan  $x - 1$  juga akan merupakan bilangan real positif).

Naaaaah, lanjut! Jika  $\delta_0 = \frac{1}{10}$ , maka kan:

- $2 - \delta_0 = \frac{19}{10}$ ,
- $2 + \delta_0 = \frac{21}{10}$ ,
- $1 - \delta_0 = \frac{9}{10}$ ,
- $1 + \delta_0 = \frac{11}{10}$ ,

dan dengan demikian:

- $\frac{19}{10} < x < \frac{21}{10} \implies \frac{361}{100} < x^2 < \frac{441}{100} \implies \frac{661}{100} < x^2 + 3 < \frac{741}{100}$ , dan juga
- $\frac{9}{10} < x - 1 < \frac{11}{10}$ ,

Selanjutnya perhatikan! Dengan menggunakan sifat *triangle inequality* akan diperoleh ini.

$$\begin{aligned}
 \left| 1 + \frac{x-1}{x^2+3} \right| \leq |1| + \left| \frac{x-1}{x^2+3} \right| &\iff \left| 1 + \frac{x-1}{x^2+3} \right| \leq 1 + \frac{|x-1|}{|x^2+3|} \\
 &\iff \left| 1 + \frac{x-1}{x^2+3} \right| \leq 1 + \frac{|x-1|}{|x^2+3|} < 1 + \frac{\frac{11}{10}}{\frac{741}{100}} \\
 &\iff \left| 1 + \frac{x-1}{x^2+3} \right| < 1 + \frac{110}{741} \\
 &\iff \left| 1 + \frac{x-1}{x^2+3} \right| < \frac{851}{741}
 \end{aligned}$$

Jadi, jika kita tetapkan  $\delta_0 = \frac{1}{10}$ , maka untuk setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x-2| < \delta_0$  juga akan memenuhi pertidaksamaan  $\left| 1 + \frac{x-1}{x^2+3} \right| < \frac{851}{741}$ .

• **Langkah-6**

Oke!

Setelah kita tetapkan  $\delta_0 = \frac{1}{10}$ , sekarang kita akan lihat bagaimana efeknya terhadap bentuk  $\left| \frac{x^3-1}{x^2+3} - 1 \right|$ !

Ingat!

$$\text{Kita punya persamaan } \left| \frac{x^3-1}{x^2+3} - 1 \right| = |x-2| \cdot \left| 1 + \frac{x-1}{x^2+3} \right|$$

Nah, jika bilangan real  $x$  memenuhi  $0 < |x-2| < \delta_0$ , maka akan berakibat:

$$|x-2| < \frac{1}{10} \quad \text{dan} \quad \left| 1 + \frac{x-1}{x^2+3} \right| < \frac{851}{741}$$

Dengan kata lain, jika bilangan real  $x$  memenuhi  $0 < |x-2| < \delta_0$ , maka akan berakibat:

$$\left| \frac{x^3-1}{x^2+3} - 1 \right| \leq \frac{1}{10} \cdot \frac{851}{741}$$

yang ekuivalen dengan:

$$\left| \frac{x^3-1}{x^2+3} - 1 \right| \leq \frac{851}{7.410}$$

- **Langkah-7**

Berdasarkan penjabaran pada **Langkah-6**, kita bisa menyimpulkan bahwa:

**Kesimpulan Sementara**

Jika  $\epsilon_0$  bernilai  $> \frac{851}{7.410}$ , maka kita bisa menetapkan nilai  $\delta$  sebagai  $\frac{1}{10}$  sedemikian sehingga akan berlaku pertidaksamaan  $\left| \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3} - 1 \right| < \epsilon_0$  untuk setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x - 2| < \delta$ .

Pertanyaannya,

*Bagaimana jika  $\epsilon_0$  bernilai  $\leq \frac{851}{7.410}$ ?*

Gampang!

Kita harus menetapkan nilai  $\delta_0$  yang lebih kecil dari  $\frac{1}{10}$ .

Semakin kecil nilai  $\epsilon_0$ , berarti kita harus semakin mengecilkan nilai  $\delta$ .

Pertanyaannya lagi,

*Bagaimana jika  $\delta$  harus dikecilkan sampai seberapa kecil?*

• **Langkah-8**

Perhatikan sifat penting yang jarang disadari berikut!

**Sifat Persekitaran**

Diketahui  $a$  adalah sebarang bilangan real dan  $n, m$  adalah 2 bilangan real positif yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < n \leq m$ .

Setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x - a| < m$  juga akan memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x - a| < n$ .

Lebih lanjut, jika suatu sifat  $P$  berlaku untuk setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x - a| < m$ , maka sifat  $P$  juga berlaku untuk setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x - a| < n$ .

Berdasarkan **Sifat Persekitaran** di atas, jika kita ambil sebarang bilangan positif  $\delta_1$  yang nilainya lebih kecil dari  $\frac{1}{10}$ , maka setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x - 2| < \delta_1$  juga akan memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x - 2| < \frac{1}{10}$ .

Lebih lanjut, setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x - 2| < \delta_1$  juga akan memenuhi pertidaksamaan:

$$\left| 1 + \frac{x-1}{x^2+3} \right| < \frac{851}{741}$$

yang ekuivalen dengan memenuhi pertidaksamaan:

$$|x-2| \cdot \left| 1 + \frac{x-1}{x^2+3} \right| < |x-2| \cdot \frac{851}{741}$$

Nah, ini!

Kan tadi  $\delta_1$  disyaratkan "hanya" sebagai sebarang bilangan positif yang nilainya lebih kecil dari  $\frac{1}{10}$ .

Sekarang, bagaimana jika  $\delta_1$  ditetapkan sebagai **yang terkecil** di antara  $\frac{1}{10}$  dan  $\frac{\epsilon_0 \cdot 741}{851}$ ?

Dengan demikian, jika nilai  $\epsilon_0 \leq \frac{851}{7.410}$ , maka kita bisa menetapkan  $\delta_1 = \frac{\epsilon_0 \cdot 741}{851}$  sedemikian sehingga akan berlaku pertidaksamaan  $\delta_1 < \frac{1}{10}$  dan untuk setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x - 2| < \delta_1$  juga akan memenuhi pertidaksamaan:

$$|x-2| \cdot \left| 1 + \frac{x-1}{x^2+3} \right| < \epsilon_0$$

• **Kesimpulan Akhir**

Berdasarkan langkah-langkah panjang (*fiuh!*) di atas, jika kita diberikan sebarang bilangan real positif  $\epsilon$ , maka kita dapat menggolongkan nilai  $\epsilon$  tersebut ke dalam 2 kemungkinan sebagai berikut.

1.  $\epsilon > \frac{851}{7.410}$  atau

2.  $\epsilon \leq \frac{851}{7.410}$

Nah, untuk menunjukkan bahwa  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3} = 1$  dengan menggunakan definisi limit fungsi, maka berdasarkan penggolongan nilai  $\epsilon$  di atas, kita dapat menetapkan nilai  $\delta$  sebagai berikut.

1. Jika  $\epsilon > \frac{851}{7.410}$ , maka kita bisa menetapkan  $\delta = \frac{1}{10}$

2. Jika  $\epsilon \leq \frac{851}{7.410}$ , maka kita bisa menetapkan  $\delta = \frac{\epsilon \cdot 741}{851}$

Sedemikian sehingga, untuk setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi  $0 < |x - 2| < \delta$ , juga akan memenuhi  $\left| \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3} - 1 \right| < \epsilon$ .

■



## 9

# Ayo Kerjakan!

## Ujian Tengah Semester

### Soal Nomor 5 (b)

#### Soal

Tunjukkan bahwa  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$  tidak ada, tetapi  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$  !

---

#### Dikerjakan

Untuk menunjukkan bahwa  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$  tidak ada adalah dengan menunjukkan kebenaran pernyataan di bawah ini.

#### Pernyataan yang Akan Dibuktikan Kebenarannya

Jika diberikan sebarang bilangan real  $L$ , maka akan terdapat bilangan real positif  $\epsilon$  sedemikian sehingga untuk sebarang bilangan real positif  $\delta$  akan terdapat bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x| < \delta$  dan  $\left| \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - L \right| > \epsilon$ .

Itu definisi formal "tidak punya limit" memang agak rumit. Tapi ya... memang begitulah itu definisinya.

Oke! Kita akan menggunakan metode *Reductio ad Absurdum* untuk menunjukkan bahwa  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$  tidak ada.

Pertama-tama, kita akan mengandaikan bahwa **Ingkaran dari Pernyataan yang Akan Dibuktikan Kebenarannya** berlaku benar.

**Ingkaran dari Pernyataan yang Akan Dibuktikan Kebenarannya**

Terdapat bilangan real  $L$ , sedemikian sehingga untuk sebarang bilangan real positif  $\epsilon$  akan terdapat bilangan real positif  $\delta$  sedemikian sehingga (lagi!) untuk setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x| < \delta$  maka akan memenuhi pertidaksamaan  $\left| \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - L \right| < \epsilon$ .

Perhatikan! Kita akan mengandaikan bahwa pernyataan di dalam kotak hijau di atas itu berlaku benar. Kemudian, kita akan melakukan serangkaian penalaran logis sedemikian sehingga memunculkan suatu kontradiksi yang berakibat bahwa **Ingkaran dari Pernyataan yang Akan Dibuktikan Kebenarannya** ternyata adalah pernyataan yang salah! Dengan demikian, pada akhirnya kita akan bisa menyatakan bahwa yang sesungguhnya berlaku benar adalah **Pernyataan yang Akan Dibuktikan Kebenarannya**.

Selain itu, berkaitan dengan fungsi trigonometri... hmmm... buat aku yang sudah lama nggak belajar analisis real, menganggap fungsi trigonometri itu secara *default* kan hanya menerima input berupa satuan derajat macamnya  $125,43^\circ$ .

Tapi, karena pada kenyataannya input fungsi trigonometri itu lebih fleksibel apabila berupa bilangan real, maka input fungsi trigonometri dapat berupa satuan radian yang bisa dinyatakan sebagai bilangan real macamnya  $\sqrt{17,05}$  radian.

Misal kita punya elemen  $x$  radian dan ingin mengubahnya menjadi elemen derajat, maka kita tinggal mengalikan  $x$  radian tersebut dengan  $\frac{180}{\pi}$  dengan  $\pi \equiv 3,145\dots$  sebagaimana yang kita tahu itu.

Wew... cukup lah *ngoceh ngalor-ngidul*-nya. 😊

Oke! Kita mulai pembuktiannya!

• **Langkah-1**

Sekali lagi! Pertama-tama, kita **asumsikan** bahwa **Ingkaran dari Pernyataan yang Akan Dibuktikan Kebenarannya** berlaku **benar**. Dengan kata lain, kita **asumsikan** bahwa **Ingkaran dari Pernyataan yang Akan Dibuktikan Kebenarannya** adalah pernyataan yang **benar**

• **Langkah-2**

Misalkan  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = L$  untuk suatu bilangan real  $L$ .

Berdasarkan definisi formal limit fungsi, untuk sebarang bilangan real positif  $\epsilon$  akan terdapat suatu bilangan real positif  $\delta$  sedemikian sehingga setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x| < \delta$  juga akan memenuhi pertidaksamaan  $\left|\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - L\right| < \epsilon$ .

• **Langkah-3**

Nah, sekarang kita pilih  $\epsilon = \frac{1}{2}$ . Jelas bahwa  $\frac{1}{2}$  itu kan bilangan real positif.

Berdasarkan definisi formal limit fungsi, akan terdapat bilangan real positif  $\delta'$  sedemikian sehingga setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x| < \delta'$  juga akan memenuhi pertidaksamaan  $\left|\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - L\right| < \frac{1}{2}$ .

• **Langkah-4**

Tentu, seumuran kita-kita ini sudah paham bahwasanya konstanta  $\pi \approx 3,14159\dots$ . Ya kan?

Karena  $\delta'$  dan  $\pi$  adalah bilangan-bilangan real positif, maka berdasarkan **Archimedean Property** akan terdapat bilangan asli  $N$  sedemikian sehingga berlaku  $N \cdot \pi > \delta'$ . Akibatnya, akan berlaku pertidaksamaan  $0 < \frac{1}{N \cdot \pi} < \delta'$ .

• **Langkah-5**

Kita *intermezzo* sebentar dengan mengulik sifat bilangan asli.

Perhatikan! Misalkan  $n$  dan  $n'$  adalah bilangan-bilangan asli yang memenuhi pertidaksamaan  $n' > n$ . Dengan demikian, akan berlaku pula pertidaksamaan  $0 < \frac{1}{n'} < \frac{1}{n}$ .

Nah! Lebih lanjut, jika  $n$  dan  $n'$  adalah bilangan-bilangan asli yang memenuhi pertidaksamaan  $n' > n$ , maka akan berlaku pertidaksamaan berikut.

$$0 < \frac{1}{n' \cdot \pi} < \frac{1}{n \cdot \pi} < \delta'$$

• **Langkah-6**

Berdasarkan sifat bilangan asli di **Langkah-5**, jika ditetapkan  $n = N$  dan  $n' = N + 1$ , maka akan berlaku pertidaksamaan  $n' > n$ . Dengan demikian, kita akan memiliki pertidaksamaan berikut.

$$0 < \frac{1}{(N+1) \cdot \pi} < \frac{1}{N \cdot \pi} < \delta'$$

• **Langkah-7**

Perhatikan!  $\frac{1}{(N+1) \cdot \pi}$  dan  $\frac{1}{N \cdot \pi}$  adalah bilangan-bilangan real positif. Akibatnya,  $\frac{1}{\sqrt{(N+1) \cdot \pi}}$  dan  $\frac{1}{\sqrt{N \cdot \pi}}$  juga adalah bilangan-bilangan real positif dan memenuhi pertidaksamaan berikut.

$$0 < \frac{1}{\sqrt{(N+1) \cdot \pi}} < \frac{1}{\sqrt{N \cdot \pi}} < \delta'$$

• **Langkah-8**

Sekarang kita notasikan  $x_1 = \frac{1}{\sqrt{(N+1) \cdot \pi}}$  dan  $x_2 = \frac{1}{\sqrt{N \cdot \pi}}$ .

Perhatikan bahwa  $x_1$  dan  $x_2$  memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x_1| < \delta'$  dan  $0 < |x_2| < \delta'$ .

Dengan demikian,  $x_1$  dan  $x_2$  akan memenuhi pertidaksamaan berikut.

$$\left| \cos\left(\frac{1}{x_1^2}\right) - L \right| < \frac{1}{2} \text{ dan } \left| \cos\left(\frac{1}{x_2^2}\right) - L \right| < \frac{1}{2}.$$

• **Langkah-9**

Sekarang coba kita jabarkan  $\left| \cos\left(\frac{1}{x_1^2}\right) - L \right|$  sebagaimana berikut.

$$\begin{aligned} \left| \cos\left(\frac{1}{x_1^2}\right) - L \right| &= \left| \cos\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{N \cdot \pi}}\right)^2}\right) - L \right| \\ &= \left| \cos\left(\frac{1}{N \cdot \pi}\right) - L \right| \\ &= |\cos(N \cdot \pi) - L| \end{aligned}$$

Dengan cara yang serupa, kita juga bisa menjabarkan  $\left| \cos\left(\frac{1}{x_2^2}\right) - L \right|$ .

Pada akhirnya, kita akan mendapatkan dua persamaan berikut.

1.  $\left| \cos\left(\frac{1}{x_1^2}\right) - L \right| = |\cos(N \cdot \pi) - L|$
2.  $\left| \cos\left(\frac{1}{x_2^2}\right) - L \right| = |\cos((N + 1) \cdot \pi) - L|$

• **Langkah-10**

Sekarang, perhatikan bentuk  $|\cos(N \cdot \pi) - \cos((N + 1) \cdot \pi)|$ !

Perhatikan bahwa untuk sebarang bilangan asli  $m$  akan berlaku persamaan  $\cos(m \cdot \pi) = (-1)^m$ .

Dengan demikian:

1. Jika  $N$  adalah bilangan asli ganjil, maka  $\cos(N \cdot \pi) = -1$  dan  $\cos((N + 1) \cdot \pi) = 1$ .
2. Jika  $N$  adalah bilangan asli genap, maka  $\cos(N \cdot \pi) = 1$  dan  $\cos((N + 1) \cdot \pi) = -1$ .

Akibatnya:

1. Jika  $N$  adalah bilangan asli ganjil, maka akan berlaku:  
 $|\cos(N \cdot \pi) - \cos((N + 1) \cdot \pi)| = |-1 - (1)| = |-2| = 2$ .
2. Jika  $N$  adalah bilangan asli genap, maka akan berlaku:  
 $|\cos(N \cdot \pi) - \cos((N + 1) \cdot \pi)| = |1 - (-1)| = |2| = 2$ .

Kesimpulannya, untuk sebarang bilangan asli  $m$  akan berlaku:

$$|\cos(m \cdot \pi) - \cos((m+1) \cdot \pi)| = 2$$

• **Langkah-11**

Sekadar sinopsis, sekarang kita akan memunculkan kontradiksinya.

Berdasarkan **Langkah-10**, kita akan memperoleh persamaan:

$$|\cos(N \cdot \pi) - \cos((N+1) \cdot \pi)| = 2$$

Ingat! Bilangan asli  $N$  ini muncul di **Langkah-4**.

Selanjutnya, perhatikan penjabaran berikut.

$$\begin{aligned} |\cos(N \cdot \pi) - \cos((N+1) \cdot \pi)| &= |\cos(N \cdot \pi) + 0 - \cos((N+1) \cdot \pi)| \\ &= |\cos(N \cdot \pi) + (-L + L) - \cos((N+1) \cdot \pi)| \\ &= \left| (\cos(N \cdot \pi) - L) + (L - \cos((N+1) \cdot \pi)) \right| \\ &= \left| (\cos(N \cdot \pi) - L) - (-L + \cos((N+1) \cdot \pi)) \right| \\ &= \left| (\cos(N \cdot \pi) - L) - (\cos((N+1) \cdot \pi) - L) \right| \\ &= \left| (\cos(N \cdot \pi) - L) + (-1) \cdot (\cos((N+1) \cdot \pi) - L) \right| \\ &\leq |\cos(N \cdot \pi) - L| + \left| (-1) \cdot (\cos((N+1) \cdot \pi) - L) \right| \end{aligned}$$

Oke! Kita berhenti sebentar setelah penjabaran di atas menghasilkan pertidaksamaan berikut.

$$|\cos(N \cdot \pi) - \cos((N+1) \cdot \pi)| \leq |\cos(N \cdot \pi) - L| + \left| (-1) \cdot (\cos((N+1) \cdot \pi) - L) \right|$$

Dari sini, mungkin sudah bisa "terendus" apa yang akan menjadi kontradiksinya.

Ayo kita lanjut menjabarkan  $|\cos(N \cdot \pi) - L| + \left| (-1) \cdot (\cos((N+1) \cdot \pi) - L) \right|$ !

$$\begin{aligned} |\cos(N \cdot \pi) - L| + \left| (-1) \cdot (\cos((N+1) \cdot \pi) - L) \right| &= |\cos(N \cdot \pi) - L| + |(-1)| \cdot |\cos((N+1) \cdot \pi) - L| \\ &= |\cos(N \cdot \pi) - L| + 1 \cdot |\cos((N+1) \cdot \pi) - L| \\ &= |\cos(N \cdot \pi) - L| + |\cos((N+1) \cdot \pi) - L| \end{aligned}$$

Nah ini! Berdasarkan **Langkah-8** dan **Langkah-9** kita punya pertidaksamaan:

$$|\cos(N \cdot \pi) - L| \leq \frac{1}{2} \quad \text{dan} \quad |\cos((N+1) \cdot \pi) - L| \leq \frac{1}{2}$$

Dengan demikian, kita akan memperoleh pertidaksamaan:

$$|\cos(N \cdot \pi) - L| + |\cos((N+1) \cdot \pi) - L| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

yang ekuivalen dengan pertidaksamaan:

$$|\cos(N \cdot \pi) - L| + \left| (-1) \cdot (\cos((N+1) \cdot \pi) - L) \right| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

yang ekuivalen dengan pertidaksamaan:

$$|\cos(N \cdot \pi) - \cos((N+1) \cdot \pi)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

yang ekuivalen dengan pertidaksamaan:

$$|\cos(N \cdot \pi) - \cos((N+1) \cdot \pi)| \leq 1$$

Nah, ini **kontradiksinya!**

Karena di awal **Langkah-11** ini kita punya pertidaksamaan:

$$|\cos(N \cdot \pi) - \cos((N+1) \cdot \pi)| = 2$$

Lha, ya kontradiksi toh?

### • Kesimpulan Akhir

Karena muncul kontradiksi di **Langkah-11**, maka kita bisa menyatakan bahwa **Ingkaran dari Pernyataan yang Akan Dibuktikan Kebenarannya** ternyata adalah pernyataan yang salah! Dengan demikian, kita yakin menyatakan bahwa yang sesungguhnya berlaku benar adalah **Pernyataan yang Akan Dibuktikan Kebenarannya**. Dengan kata lain,  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$  tidak ada.

\*\*\*

*Fiih....*

Setelah sekian panjang tulisan di atas, kita masih punya PR untuk menunjukkan bahwa:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \quad .$$

Wew....

Ayolah kita tuntaskan!

Oke! Kita akan menggunakan definisi formal limit fungsi untuk menunjukkan bahwa  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ .

#### **Pernyataan yang Akan Dibuktikan Kebenarannya**

Untuk sebarang bilangan real positif  $\epsilon$  akan terdapat bilangan real positif  $\delta$  sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x| < \delta$  maka akan memenuhi pertidaksamaan  $\left|x \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| < \epsilon$ .

#### • Langkah-1

Kita ambil sebarang bilangan real positif  $\epsilon_0$ .

#### • Langkah-2

Selanjutnya, kita akan mengamati bentuk  $\left|x \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right|$ .

Perhatikan penjabaran berikut.

$$\begin{aligned} \left|x \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| &= |x| \cdot \left|\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \\ &\leq |x| \cdot 1 \end{aligned}$$

Kenapa bisa begitu?

Itu karena fungsi  $\cos$  terdefinisi dengan baik untuk sebarang bilangan real dan range-nya adalah himpunan  $[-1, 1]$ . Iya toh?

Dengan demikian, untuk sebarang bilangan real  $x$  akan berlaku pertidaksamaan  $|\cos x| \leq 1$ .

- **Langkah-3**

Berdasarkan **Langkah-2**, kita punya pertidaksamaan  $\left| x \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq |x|$ .

Nah, dengan demikian, untuk sebarang bilangan real positif  $\epsilon_0$  yang diambil di **Langkah-1**, maka kita bisa menetapkan bilangan real positif  $\delta$  sebagai  $\delta = \frac{\epsilon_0}{2}$ , sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x| < \delta$  (yang ekuivalen dengan  $0 < |x| < \frac{\epsilon_0}{2}$ ) maka akan memenuhi pertidaksamaan  $\left| x \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| < |x| < \frac{\epsilon_0}{2} < \epsilon_0$ .

- **Kesimpulan**

Jika diberikan sebarang bilangan real positif  $\epsilon_0$ , maka kita bisa menetapkan bilangan real positif  $\delta$  sebagai  $\delta = \frac{\epsilon_0}{2}$ , sedemikian sehingga **Pernyataan yang Akan Dibuktikan Kebenarannya** di atas berlaku benar. Dengan kata lain, terbukti benar bahwa  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ .

■



10

# Ayo Kerjakan!

## Ujian Tengah Semester

### Soal Nomor 6

Soal

Let  $f$  and  $g$  be two functions defined on  $(a, \infty)$  and suppose  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  and  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ .  
Prove that  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f \circ g)(x) = L$  !

---

Dikerjakan

Oke! Karena ini bukan ujian *beneran*, jadi kita terjemahkan saja soalnya ke Bahasa Indonesia.

Diketahui  $f$  dan  $g$  adalah dua fungsi yang didefinisikan di  $(a, \infty)$  dan diketahui juga  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  dan  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ . Tunjukkan bahwa  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f \circ g)(x) = L$  !

Seperti biasa, supaya tidak bikin bingung, ayo kita jabarkan dulu definisi dari  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  dan  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ .

#### Definisi Formal Limit Fungsi yang Dipakai

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  jika dan hanya jika untuk sebarang bilangan real positif  $\epsilon_0$  akan terdapat bilangan real positif  $N'_f$  sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real  $x'$  yang lebih besar dari  $N'_f$  (dkl.  $x' > N'_f$ ) akan berlaku  $|f(x') - L| < \epsilon_0$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$  jika dan hanya jika untuk sebarang bilangan real positif  $\epsilon_0$  akan terdapat bilangan real positif  $N'_g$  sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real  $x'$  yang lebih besar dari  $N'_g$  (dkl.  $x' > N'_g$ ) akan berlaku  $g(x') > \epsilon_0$ .

Nah, berdasarkan definisi di atas, maka untuk menunjukkan bahwa  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f \circ g)(x) = L$  adalah dengan menunjukkan kebenaran pernyataan di dalam kotak hijau berikut.

#### Pernyataan yang Akan Dibuktikan Kebenarannya

Jika diberikan sebarang bilangan real positif  $\epsilon$ , maka kita dapat menentukan suatu bilangan real positif  $N'$  sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real  $x'$  yang lebih besar dari  $N'$  (dkl.  $x' > N'$ ) akan berlaku  $|(f \circ g)(x') - L| < \epsilon$ .

**Sekali lagi!** Misi kita adalah menentukan eksistensi dari bilangan real positif  $N'$ ! Paham ya!

Oh ya! Ingat bahwa notasi  $(f \circ g)(x)$  itu ekuivalen dengan  $f(g(x))$ . Artinya, bilangan real  $x$  dioperasikan terhadap fungsi  $g$  terlebih dahulu, baru kemudian hasilnya (yaitu  $g(x)$ ) dioperasikan terhadap fungsi  $f$ .

Sekali lagi. **Ingat!** Karena  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ , artinya adalah fungsi  $g$  dioperasikan terlebih dahulu, baru setelahnya fungsi  $f$  dioperasikan.

Oke deh! Ayo kita mulai pembuktiannya!

- **Langkah-1**

Kita ambil sebarang bilangan real positif  $\epsilon_0$ .

- **Langkah-2**

Berdasarkan **Definisi Formal Limit Fungsi yang Dipakai poin(1)**, untuk bilangan real positif  $\epsilon_0$  yang diambil secara sebarang pada **Langkah-1** di atas, maka kita akan mendapatkan bilangan real positif  $N'_f$ .

Berdasarkan **Definisi Formal Limit Fungsi yang Dipakai poin(2)**, untuk bilangan real positif  $\epsilon_0$  yang diambil secara sebarang pada **Langkah-1** di atas, maka kita akan mendapatkan bilangan real positif  $N'_g$ .

Eh, ingat ya! Nilai  $N'_f$  dan  $N'_g$  itu **bisa jadi** bergantung pada nilai  $\epsilon_0$ . Misalkan, sebagai contoh, jika  $\epsilon_0 = 1$ , maka  $N'_f = 0,2$  dan  $N'_g = 0,05$ . Sementara jika  $\epsilon_0 = 0,5$ , maka  $N'_f = 0,07$  dan  $N'_g = 0,018$ .

Nah, sepertinya nih ya, bilangan real positif  $N'$  yang menjadi misi utama pencarian kita itu "sepertinya" bisa ditemukan dengan cara "mengutak-atik"  $N'_f$  dan  $N'_g$ .

Benarkah begitu? Ya, kita cari tahu saja!

- **Langkah-3**

Sekarang ayo kita perhatikan definisi  $f \circ g$ !

Sebagaimana yang "seharusnya" kita wajib tahu, notasi  $(f \circ g)(x)$  itu ekuivalen dengan  $f(g(x))$ , yang mana artinya adalah elemen  $x$  dipetakan oleh fungsi  $g$  terlebih dahulu, kemudian hasil petanya baru dipetakan lagi oleh fungsi  $f$ .

$f \circ g =$  fungsi  $g$  jalan duluan, fungsi  $f$  jalan giliran kedua.

Begitu. Pahami ya! Tentang komposisi ini sudah ditulis berkali-kali lho!

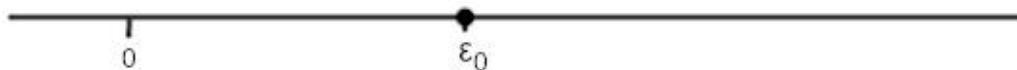
- Langkah-4

Oke! Oke! Oke! Oke!

Sekarang kita masuk ke inti pembuktian, di mana bagian yang "menarik" ada di sini.

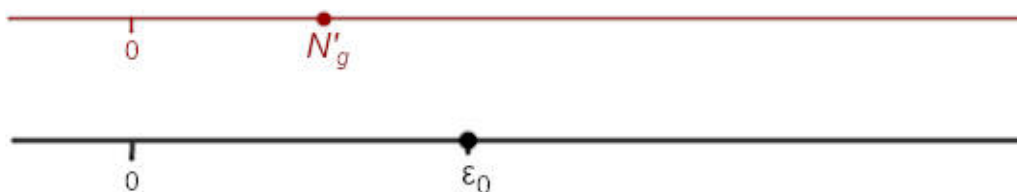
Harapannya, supaya lebih mudah untuk dipahami (khususnya buat orang yang sudah lama nggak belajar analisis real seperti aku) aku akan menjelaskan inti pembuktian ini menggunakan **garis bilangan!**

- Ilustrasi-1



Oke! Jadi di sini kita punya bilangan real positif  $\epsilon_0$ . Kira-kira, seperti itu letaknya pada garis bilangan.

- Ilustrasi-2

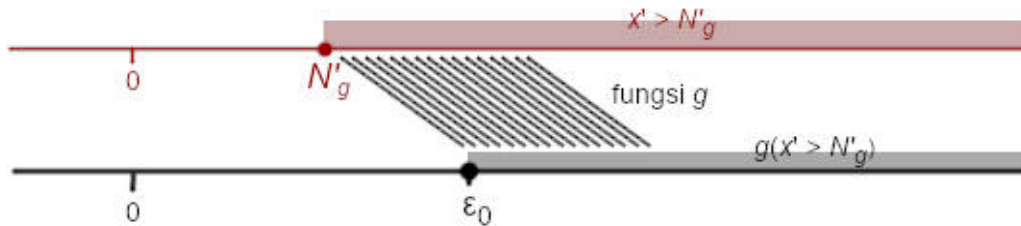


Kemudian, karena fungsi  $g$  dioperasikan pertama, maka bilangan real positif  $N'_g$  akan muncul duluan. Kita tempatkan bilangan  $N'_g$  di garis bilangan baru di posisi atas.

Perhatikan! Sesuai sifat *trichotomy* bilangan real, akan berlaku salah satu kemungkinan:  $0 < N'_g < \epsilon_0$ ,  $N'_g = \epsilon_0$ , atau  $N'_g > \epsilon_0$ . Pada ilustrasi di atas, dicontohkan kemungkinan yang  $0 < N'_g < \epsilon_0$ .

•• Ilustrasi-3

Kemudian, berdasarkan **Definisi Formal Limit Fungsi yang Dipakai poin(2)**, kita akan memperoleh ilustrasi berikut.



Perhatikan!  $g(x' > N'_g)$  itu himpunan lho! Definisi himpunan  $g(x' > N'_g)$  adalah sebagai berikut.

$$g(x' > N'_g) = \{g(x') : x' > N'_g\}$$

Perhatikan! Himpunan  $g(x' > N'_g)$  adalah himpunan semua hasil peta (*image*) bilangan real  $x'$  di  $(a, \infty)$  yang memenuhi syarat  $x' > N'_g$  terhadap fungsi  $g$ .

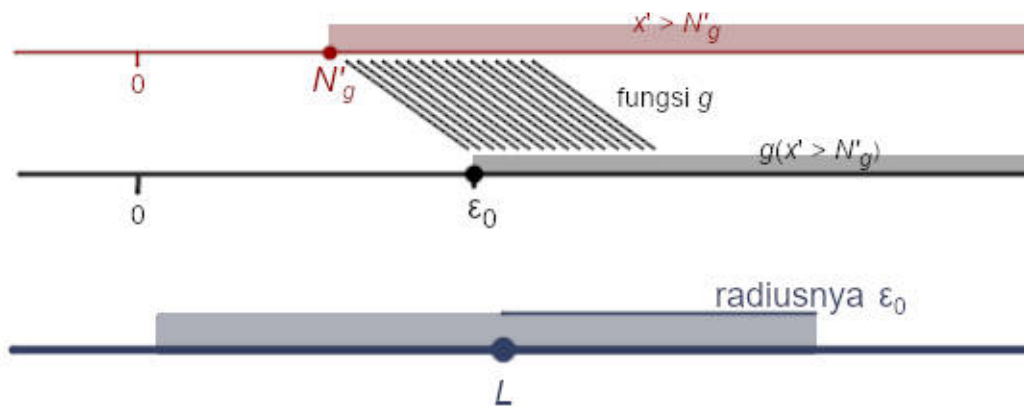
Nah! Karena operasi utamanya adalah komposisi fungsi ( $f \circ g$ ), maka himpunan  $g(x' > N'_g)$  itu nanti akan dipetakan oleh fungsi  $f$ . Jadi, himpunan  $g(x' > N'_g)$  itu adalah domain fungsi  $f$  dalam komposisi ( $f \circ g$ ).

•• **Ilustrasi-4**

Sekarang, saatnya fungsi  $f$  dioperasikan!

Ayo kita gambarkan bilangan real  $L$  pada garis bilangan baru! Di garis bilangan ini, kita juga akan menggambar suatu persekitaran dari  $L$  dengan radius  $\epsilon_0$ .

Oh iya! Bilangan real  $L$  ini bisa negatif, positif, atau malah 0. Tapi, itu nggak penting! Pokoknya, ada persekitaran dari  $L$  dengan radius  $\epsilon_0$ .



Kalau digambar seperti di atas itu kan jadi jelas kan ya? Bilangan  $\epsilon_0$  yang muncul sejak **Ilustrasi-1** dengan persekitaran dari  $L$  yang radiusnya  $\epsilon_0$  itu sebetulnya tidak berhubungan.

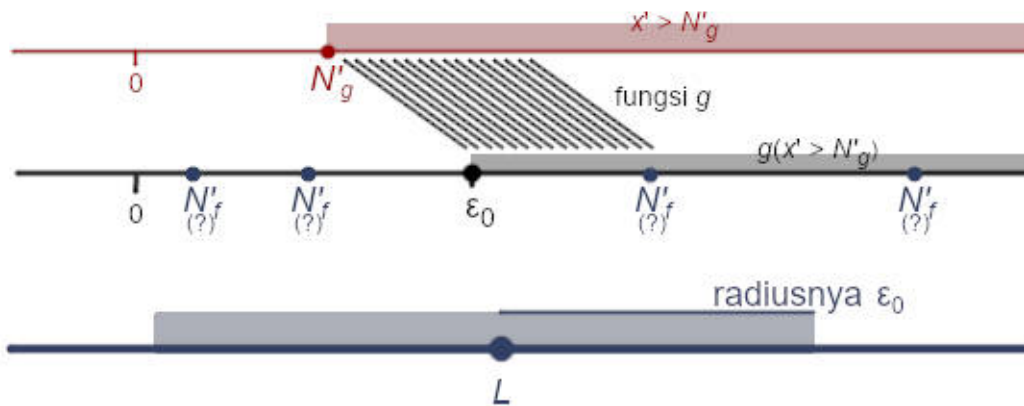
•• **Ilustrasi-5**

Karena sekarang fungsi  $f$  sedang dioperasikan, berarti saatnya kita munculkan bilangan real positif  $N'_f$ !

Kita munculkan  $N'_f$  di garis bilangan hitam (garis yang letaknya di posisi tengah) yang sudah eksis sejak awal **Ilustrasi-1**.

Eh? Kenapa  $N'_f$  ditempatkan di garis bilangan hitam di posisi tengah?

Itu karena  $N'_f$  akan berhubungan dengan bilangan-bilangan real yang termuat di dalam himpunan  $g(x' > N'_g)$  yang menjadi domain fungsi  $f$  dalam komposisi fungsi  $f \circ g$ .



Berdasarkan **Definisi Formal Limit Fungsi yang Dipakai poin(1)**:

**Sehubungan dengan**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$

Untuk bilangan real positif  $\epsilon_0$  yang diperoleh secara sebarang di **Langkah-1**, akan terdapat bilangan real positif  $N'_f$ , sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real  $x'$  yang lebih besar dari  $N'_f$  (dkl.  $x' > N'_f$ ) akan berlaku  $|f(x') - L| < \epsilon_0$ .

maka kita bisa "memodifikasi" definisi di atas menjadi:

**Sehubungan dengan**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  (**Modifikasi**)

Untuk bilangan real positif  $\epsilon_0$  yang diperoleh secara sebarang di **Langkah-1**, akan terdapat bilangan real positif  $N'_f$ , sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real  $x' \in g(x' > N'_g)$  yang lebih besar dari  $N'_f$  (dkl.  $x' > N'_f$  dan  $x' \in g(x' > N'_g)$ ) akan berlaku  $|f(x') - L| < \epsilon_0$ .

Hanya saja masalahnya....

**KITA TIDAK TAHU PERSISNYA BILANGAN  $N'_f$  ITU APA!**

**KITA TIDAK TAHU PERSISNYA LETAK BILANGAN  $N'_f$  DI GARIS BILANGAN ITU DI MANA!**

Euh....

Seperti yang bisa dilihat pada ilustrasi di atas, bilangan  $N'_f$  mungkin saja berada di antara 0 dan  $\epsilon_0$  ( $0 < N'_f < \epsilon_0$ ) atau malah lebih besar dari  $\epsilon_0$  ( $N'_f > \epsilon_0$ ). Eh? Atau malah  $N'_f = \epsilon_0$ ? Ya kan?

Hmmm....

### •• Adegan-6

Lha, jangan bingung!

Ingat! Misi utama kita adalah **MENEMUKAN** bilangan real positif  $N'$  sedemikian sehingga **Pernyataan yang Akan Dibuktikan Kebenarannya** di dalam kotak hijau di atas itu berlaku benar.

Nah, supaya tidak bingung....

Bagaimana jika kita tetapkan nilai bilangan real positif  $N'$  sebagai yang terbesar dari  $N'_f$  dan  $\epsilon_0$ ? Dengan kata lain,  $N' = \text{maksimum}\{N'_f, \epsilon_0\}$ . Artinya, jika berlaku  $N'_f > \epsilon_0$ , maka  $N' = N'_f$ . Sementara, jika yang berlaku  $N'_f < \epsilon_0$ , maka  $N' = \epsilon_0$ . Nah, jika  $N'_f = \epsilon_0$ , maka  $N' = N'_f = \epsilon_0$ .

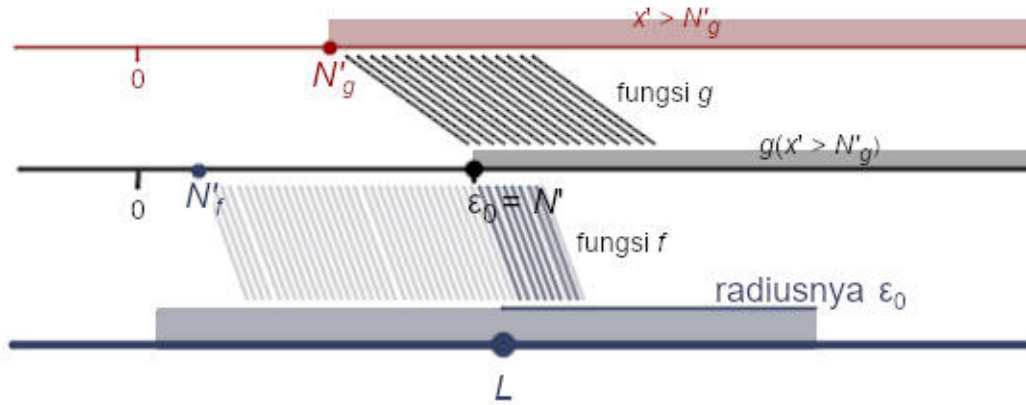
Karena aku sehari-hari *ngoding*, maka di dalam otakku, penetapan bilangan real positif  $N'$  lebih logis seperti ini.

```

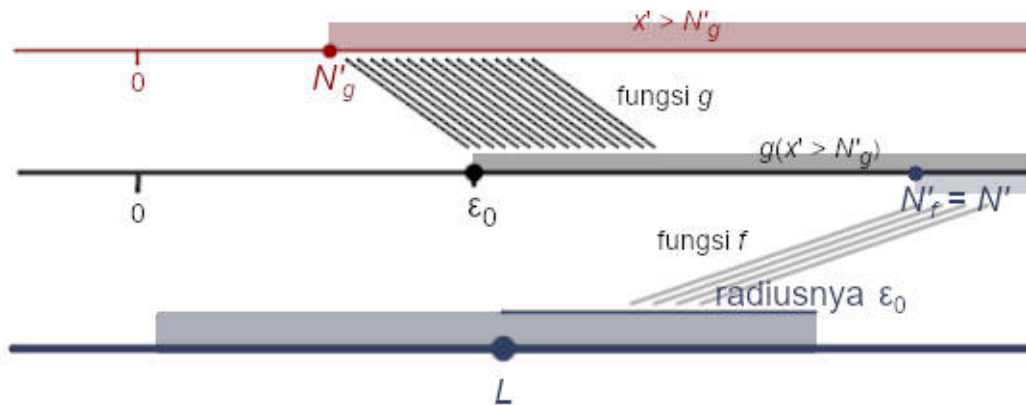
IF ( $N'_f = \epsilon_0$ ) THEN
   $N' := \epsilon_0$ 
ELSE
  IF ( $N'_f > \epsilon_0$ ) THEN
     $N' := N'_f$ 
  ELSE
     $N' := \epsilon_0$ 

```

Ini ilustrasi ketika  $N'_f < \epsilon_0$ .



Sementara ini ilustrasi ketika  $N'_f \geq \epsilon_0$ .



• **Kesimpulan**

Diketahui  $f$  dan  $g$  adalah dua fungsi yang didefinisikan di  $(a, \infty)$  dan diketahui juga  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  dan  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ .

Jika, kita ambil sebarang bilangan real positif  $\epsilon_0$ , maka:

- Kita akan mendapatkan bilangan real positif  $N'_f$  berdasarkan **Definisi Formal Limit Fungsi yang Dipakai poin (1)**.
- Kita akan mendapatkan bilangan real positif  $N'_g$  berdasarkan **Definisi Formal Limit Fungsi yang Dipakai poin (2)**.

Jika kita tetapkan bilangan real positif  $N'$  sebagai:

$$N' = \text{maksimum}\{N'_f, \epsilon\}$$

maka pernyataan **Pernyataan yang Akan Dibuktikan Kebenarannya** dalam kotak hijau di atas itu akan berlaku benar.



# 11

## Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 1 (a)

### Soal

Diberikan fungsi-fungsi  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $c \in \mathbb{R}$ . Jika  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$  dan  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$ , tunjukkan  $\lim_{x \rightarrow c} (g \circ f)(x) = L$ .

---

### Dikerjakan

Soal nomor ini mirip-mirip seperti soal ujian tengah semester nomor 6. Walaupun begitu, tetap, ada perbedaannya. Walaupun ya secara garis besar, langkah-langkah pembuktiannya ya mirip-mirip beda sedikit.

Oke! Untuk mengerjakan soal ini, kita akan memakai definisi formal limit fungsi, yang tentunya berhubungan dengan  $\epsilon$  dan  $\delta$ .

Nah, sebelum mulai mengerjakan soal, kita harus tahu dulu "**misi utama**" kita pada soal ini yaitu sebagai berikut.

**Misi Utama Kita**

Untuk sebarang bilangan real positif  $\epsilon_0$  yang diberikan, maka kita harus bisa menentukan suatu bilangan real positif  $\delta_{misi}$  sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x - c| < \delta_{misi}$  juga akan memenuhi pertidaksamaan  $|(g \circ f)(x) - L| < \epsilon_0$ .

Sekali lagi. **Ingat!** Misi utama kita adalah menentukan bilangan real positif  $\delta_{misi}$  sebagaimana pernyataan di atas itu!

Selain itu, mungkin ada baiknya kita juga mengingat definisi formal limit fungsi berikut ini.

**Definisi Formal Limit Fungsi yang Dipakai**

Diketahui fungsi-fungsi  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $c \in \mathbb{R}$ .

1.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$  jika dan hanya jika untuk sebarang bilangan real positif  $\epsilon$  akan terdapat suatu bilangan real positif  $\delta_1$  sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x - c| < \delta_1$  juga akan memenuhi pertidaksamaan  $f(x) > \epsilon$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$  jika dan hanya jika untuk sebarang bilangan real positif  $\epsilon$  akan terdapat suatu bilangan real positif  $M_2$  sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $x > M_2$  juga akan memenuhi pertidaksamaan  $|g(x) - L| < \epsilon$

Oh ya! Ingat bahwa notasi  $(g \circ f)(x)$  itu ekuivalen dengan  $g(f(x))$ . Artinya, bilangan real  $x$  dioperasikan terhadap fungsi  $f$  terlebih dahulu, baru kemudian hasilnya (yaitu  $f(x)$ ) dioperasikan terhadap fungsi  $g$ .

Sekali lagi. **Ingat!** Karena  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ , artinya adalah fungsi  $f$  dioperasikan terlebih dahulu, baru setelahnya fungsi  $g$  dioperasikan.

Oke! Ayo kita mulai langkah-langkah pembuktiannya!

- **Langkah-1**

Kita ambil sebarang bilangan real positif  $\epsilon_0$ .

- **Langkah-2**

Berdasarkan **Definisi Formal Limit Fungsi yang Dipakai poin(1)**, untuk bilangan real positif  $\epsilon_0$  yang diambil secara sebarang pada **Langkah-1** di atas, maka kita akan mendapatkan bilangan real positif  $\delta'_1$ .

Berdasarkan **Definisi Formal Limit Fungsi yang Dipakai poin(2)**, untuk bilangan real positif  $\epsilon_0$  yang diambil secara sebarang pada **Langkah-1** di atas, maka kita akan mendapatkan bilangan real positif  $M'_2$ .

Eh, ingat ya! Nilai  $\delta'_1$  dan  $M'_2$  itu **bisa jadi** bergantung pada nilai  $\epsilon_0$ . Misalkan, sebagai contoh, jika  $\epsilon_0 = 1$ , maka  $\delta'_1 = 0,2$  dan  $M'_2 = 0,05$ . Sementara jika  $\epsilon_0 = 0,5$ , maka  $\delta'_1 = 0,07$  dan  $M'_2 = 0,018$ .

- **Langkah-3**

Oke! Jadi kita punya bilangan-bilangan real positif  $\epsilon_0$ ,  $\delta'_1$ , dan  $M'_2$ .

Sekarang, kita cermati nilai  $\epsilon_0$  dan  $M'_2$ .

**Seandainya** berlaku pertidaksamaan  $M'_2 \leq \epsilon_0$ , maka kita bisa menetapkan  $\delta_{misi} = \delta'_1$ .

Dengan demikian, berdasarkan **Definisi Formal Limit Fungsi yang Dipakai poin (1)**, untuk setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x - c| < \delta_{misi}$  (ekuivalen dengan  $0 < |x - c| < \delta'_1$ ) juga akan memenuhi pertidaksamaan  $f(x) > \epsilon_0$ .

Kemudian, karena  $M'_2 \leq \epsilon_0$ , maka akan berlaku pula pertidaksamaan  $f(x) > M'_2$ . Ya toh?

Nah, karena berlaku pertidaksamaan  $f(x) > M'_2$ , maka berdasarkan **Definisi Formal Limit Fungsi yang Dipakai poin (2)**, akan berlaku pertidaksamaan  $|g(f(x)) - L| < \epsilon_0$ .

Selesai?

Ya belum!

Bagaimana jika **seandainya** yang berlaku adalah pertidaksamaan  $M'_2 > \epsilon_0$ ?

Nah lho!

#### • Langkah-4

Oke! Sekarang kita akan menyelidiki ketika yang berlaku adalah pertidaksamaan  $M'_2 > \epsilon_0$ .

Menggunakan **Definisi Formal Limit Fungsi yang Dipakai poin (1)**, jika kita tetapkan nilai  $\epsilon = M'_2$ , maka akan terdapat suatu bilangan real positif  $\delta_3$  sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x - c| < \delta_3$  juga akan memenuhi pertidaksamaan  $f(x) > M'_2$ .

Nah, jika yang berlaku adalah pertidaksamaan  $M'_2 > \epsilon_0$ , maka kita bisa menetapkan  $\delta_{misi} = \delta_3$ .

Dengan demikian, berdasarkan **Definisi Formal Limit Fungsi yang Dipakai poin (1)**, untuk setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x - c| < \delta_{misi}$  (ekuivalen dengan  $0 < |x - c| < \delta_3$ ) juga akan memenuhi pertidaksamaan  $f(x) > M'_2$ .

Kemudian, karena berlaku pertidaksamaan  $f(x) > M'_2$ , maka berdasarkan **Definisi Formal Limit Fungsi yang Dipakai poin (2)**, akan berlaku pertidaksamaan  $|g(f(x)) - L| < \epsilon_0$ .

#### • Kesimpulan

Jika, kita ambil sebarang bilangan real positif  $\epsilon_0$ , maka:

- Kita akan mendapatkan bilangan real positif  $\delta'_1$  berdasarkan **Definisi Formal Limit Fungsi yang Dipakai poin (1)**.
- Kita akan mendapatkan bilangan real positif  $M'_2$  berdasarkan **Definisi Formal Limit Fungsi yang Dipakai poin (2)**.

Dengan menggunakan **Definisi Formal Limit Fungsi yang Dipakai poin (1)**, jika kita tetapkan nilai  $\epsilon = M'_2$ , maka kita akan mendapatkan suatu bilangan real positif  $\delta_3$ .

Jadi, kita sekarang kita punya empat bilangan real positif nih:  $\epsilon_0$ ,  $\delta'_1$ ,  $M'_2$ , dan  $\delta_3$ .

Nah, jika yang berlaku adalah pertidaksamaan  $M'_2 \leq \epsilon_0$ , maka kita bisa menetapkan  $\delta_{misi} = \delta'_1$ . Sedangkan jika yang berlaku adalah pertidaksamaan  $M'_2 > \epsilon_0$ , maka kita bisa menetapkan  $\delta_{misi} = \delta_3$ . Dengan nilai  $\delta_{misi}$  tersebut, maka pernyataan **Misi Utama Kita** dalam kotak hijau di atas itu akan berlaku benar.



12

# Ayo Kerjakan!

## Ujian Akhir Semester

### Soal Nomor 1 (b)

Soal

Diberikan  $c \in \mathbb{R}$  dan fungsi  $f : (c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Jika  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x)$  ada, tunjukkan  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

---

Dikerjakan

Karena  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x)$  ada, maka terdapat suatu bilangan real  $L$  sedemikian sehingga berlaku  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x) = L$ .

Karena  $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ , maka  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \neq 0$ . Dengan demikian,  $\frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} x}$  akan terdefinisi dan kita akan punya persamaan ini.

$$\left( \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x) \right) \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} x} = L \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} x}$$

Menggunakan sifat pembagian limit, kita akan memperoleh persamaan:

$$\left( \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x) \right) \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot f(x))}{\lim_{x \rightarrow \infty} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \cdot f(x) \cdot \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

Sedangkan untuk ruas kanan:

$$L \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} x} = L \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 1}{\lim_{x \rightarrow \infty} x} = L \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = L \cdot 0 = 0$$

Jadi, diperoleh  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .



13

# Ayo Kerjakan!

## Ujian Akhir Semester

### Soal Nomor 2 (a)

Soal

Jika fungsi  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kontinu pada  $\mathbb{R}$  dan  $f(x) = 0$  untuk semua bilangan rasional  $x$ , tunjukkan  $f(x) = 0$  untuk setiap  $x \in \mathbb{R}$ .

---

Dikerjakan

Kita akan menunjukkan bahwa:

#### Pernyataan yang Ingin Dibuktikan

Jika fungsi  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kontinu pada  $\mathbb{R}$  dan  $f(q) = 0$  untuk semua bilangan rasional  $q$ , maka  $f(r) = 0$  untuk setiap  $r \in \mathbb{R}$ .

dengan metode *reductio ad absurdum*.

Caranya adalah kita akan mengandaikan bahwa ingkaran pernyataan di atas berlaku benar, yaitu:

#### Inkaran Pernyataan yang Ingin Dibuktikan

Diketahui fungsi  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kontinu pada  $\mathbb{R}$ ,  $f(q) = 0$  untuk semua bilangan rasional  $q$ , dan terdapat  $r' \in \mathbb{R}$  sedemikian sehingga  $f(r') \neq 0$ .

kemudian kita akan memunculkan suatu kontradiksi dari pengingkaran tersebut.

\*\*\*

Oke!

Berdasarkan pengandaian di atas, terdapat  $r' \in \mathbb{R}$  sedemikian sehingga  $f(r') \neq 0$ . Dengan demikian,  $f(r') = L$  untuk suatu  $L \in \mathbb{R}$  dengan  $L \neq 0$ .

Karena fungsi  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kontinu pada  $\mathbb{R}$ , maka fungsi  $f$  kontinu di sebarang titik di  $\mathbb{R}$ . Dengan demikian fungsi  $f$  kontinu di titik  $r'$ .

Karena fungsi  $f$  kontinu di titik  $r'$ , maka — berdasarkan definisi formal fungsi kontinu — **Pernyataan Satu** di bawah ini akan berlaku benar.

#### Pernyataan Satu

Jika kita diberikan sebarang bilangan real positif  $\epsilon$ , maka kita akan selalu dapat menetapkan suatu bilangan real positif  $\delta$  sedemikian sehingga untuk setiap  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $|x - r'| < \delta$  juga akan memenuhi pertidaksamaan  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

Selanjutnya, perhatikan bahwa  $\frac{|L|}{2}$  adalah bilangan real positif. Dengan demikian, berdasarkan pernyataan di atas, untuk  $\epsilon = \frac{|L|}{2}$  akan terdapat suatu bilangan real positif  $\delta_1$  sedemikian sehingga untuk setiap  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $|x - r'| < \delta_1$  juga akan memenuhi pertidaksamaan  $|f(x) - L| < \frac{|L|}{2}$ .

Perhatikan bahwa pertidaksamaan  $|x - r'| < \delta_1$  ekuivalen dengan pertidaksamaan  $r' - \delta_1 < x < r' + \delta_1$ . Perhatikan bahwa  $r' - \delta_1$  dan  $r' + \delta_1$  adalah bilangan-bilangan real.

Selanjutnya, menggunakan sifat:

#### *Density of the Rationals*

Jika  $x$  dan  $y$  adalah sebarang bilangan real dengan  $x < y$ , maka akan terdapat bilangan rasional  $q$  sedemikian sehingga berlaku  $x < q < y$ .

maka akan terdapat bilangan rasional  $q'$  sedemikian sehingga berlaku  $r' - \delta_1 < q' < r' + \delta_1$ .

Perhatikan bahwa bilangan rasional  $q'$  tersebut bisa kita pandang sebagai bilangan real sehingga memenuhi pertidaksamaan  $|q' - r'| < \delta_1$ .

Nah, karena bilangan rasional  $q'$  tersebut memenuhi pertidaksamaan  $|q' - r'| < \delta_1$ , maka bilangan rasional  $q'$  tersebut juga akan memenuhi pertidaksamaan  $|f(q') - L| < \frac{|L|}{2}$ .

Karena diketahui  $f(q) = 0$  untuk semua bilangan rasional  $q$ , maka kita akan memperoleh pertidaksamaan:

$$|f(q') - L| < \frac{|L|}{2} \iff |0 - L| < \frac{|L|}{2} \iff |L| < \frac{|L|}{2}$$

yang mana hal tersebut akan memunculkan suatu **kontradiksi**. Karena  $|L|$  adalah bilangan real positif ( $|L| > 0$ ), maka tidak mungkin berlaku pertidaksamaan  $|L| < \frac{|L|}{2}$ .

Jadi, berdasarkan uraian di atas, kita bisa menyimpulkan bahwa **Ingkaran Pernyataan yang Ingin Dibuktikan** adalah **salah**. Jadi, yang benar adalah **Pernyataan yang Ingin Dibuktikan**.

■



14

# Ayo Kerjakan!

## Ujian Akhir Semester

### Soal Nomor 2 (b)

#### Soal

Diketahui fungsi  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kontinu pada  $\mathbb{R}$ . Jika  $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$  dan  $(x_n)$  barisan di dalam  $A$  yang konvergen ke suatu  $x \in \mathbb{R}$ , tunjukkan  $x \in A$ .

---

#### Dikerjakan

Karena barisan  $(x_n)$  konvergen ke suatu  $x \in \mathbb{R}$ , maka untuk setiap bilangan real positif  $\epsilon$  akan bisa kita tetapkan suatu bilangan asli  $N$  sedemikian sehingga untuk setiap  $n > N$  akan berlaku  $|x_n - x| < \epsilon$ .

Karena sifat berikut

#### **Konvergensi Barisan dan Fungsi**

Diketahui himpunan  $A \subset \mathbb{R}$  fungsi  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , dan  $x \in \mathbb{R}$ .

Jika fungsi  $f$  kontinu di  $x$  dan barisan  $(x_n)$  konvergen ke  $x$ , maka barisan  $(f(x_n))$  konvergen ke  $f(x)$ .

dan juga berdasarkan definisi barisan yang konvergen, maka untuk setiap bilangan real positif  $\epsilon$  akan bisa kita tetapkan suatu bilangan asli  $N$  sedemikian sehingga untuk setiap  $n > N$  akan berlaku  $|f(x_n) - f(x)| < \epsilon$ .

Karena  $x_n \in A$ , maka akan berlaku  $f(x_n) = 0$ . Dengan demikian kita akan punya pertidaksamaan:

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x)| < \epsilon &\iff |0 - f(x)| < \epsilon \\ &\iff |f(x)| < \epsilon \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa pertidaksamaan  $|f(x)| < \epsilon$  berlaku untuk sebarang bilangan real positif  $\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ). Oleh sebab itu, mau tidak mau, haruslah berlaku  $|f(x)| = 0$  yang berakibat  $f(x) = 0$ .

Selanjutnya, sudah jelas, karena  $f(x) = 0$ , maka berdasarkan syarat keanggotaan himpunan  $A$  akan berlaku  $x \in A$ .

■

15

# Ayo Kerjakan!

## Ujian Akhir Semester

### Soal Nomor 3 (a)

Soal

Tunjukkan  $x - \cos x = 0$  mempunyai penyelesaian di dalam  $[0, \frac{\pi}{2}]$ !

---

Dikerjakan

Kita bentuk fungsi real  $g_1$  dan  $g_2$  dengan definisi  $g_1(x) = x$  dan  $g_2(x) = \cos x$ . Jelas bahwa fungsi  $g_1$  dan  $g_2$  kontinu di interval  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Dengan demikian, berdasarkan teorema berikut:

#### Kontinuitas Selisih Dua Fungsi Kontinu

Diketahui fungsi real  $f$  dan  $g$  dari  $A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Jika fungsi  $f$  dan  $g$  kontinu di  $A$ , maka fungsi  $f - g$  yang didefinisikan sebagai  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$  juga kontinu di  $A$ .

maka fungsi  $g_1 - g_2$  juga akan kontinu di interval  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Supaya penyebutannya mudah, kita notasikan fungsi  $(g_1 - g_2)$  sebagai fungsi  $h$ . Dengan demikian,  $h = g_1 - g_2$ , sehingga  $h(x) = x - \cos x$ .

Perhatikan bahwa:

- $h(0) = 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1$  dan,
- $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$ .

Karena  $h(0) = -1$  dan  $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ , berarti  $h(0) < 0 < h\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

Nah, karena fungsi  $h$  kontinu di interval  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , maka menurut teorema berikut:

***Intermediate Value Theorem***

Diketahui fungsi real  $f$  kontinu di interval  $[a, b]$ . Jika  $f(a) \neq f(b)$  dan  $L$  adalah bilangan real yang berada di antara  $f(a)$  dan  $f(b)$  (yaitu,  $f(a) < L < f(b)$ ), maka terdapat  $c \in [a, b]$  sedemikian sehingga berlaku  $L = f(c)$ .

dengan menetapkan interval  $[a, b] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  dan  $L = 0$ , maka akan terdapat  $c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  sedemikian sehingga berlaku  $h(c) = 0$ .

Dengan kata lain, karena  $h(x) = x - \cos x$ , maka akan terdapat  $c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  sedemikian sehingga berlaku  $c - \cos c = 0$ . Jadi, bilangan real  $c$  ini adalah penyelesaian persamaan  $x - \cos x = 0$  di dalam  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

■

# 16

## Ayo Kerjakan! Ujian Akhir Semester Soal Nomor 3 (b)

### Soal

Jika  $P(x) = x^{2n-1} + a_1x^{2n-2} + \dots + a_{2n-2}x + a_{2n-1}$ ,  $n \in N$ , tunjukkan  $P(x) = 0$  mempunyai sekurang-kurang satu akar real.

---

### Dikerjakan

Polinomial  $P(x) = x^{2n-1} + a_1x^{2n-2} + \dots + a_{2n-2}x + a_{2n-1}$ ,  $n \in N$  itu tidak lain adalah polinomial yang derajat tertingginya adalah bilangan ganjil dan koefisien utamanya adalah 1.

Sekadar untuk memberi gambaran, jika kita jabarkan polinomial  $P$  untuk  $n = 1, 2$ , dan  $3$ , maka akan diperoleh hasil sebagaimana berikut.

- $n = 1$ ,  $P(x) = x^1 + a_1$
- $n = 2$ ,  $P(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x^1 + a_3$
- $n = 3$ ,  $P(x) = x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x^1 + a_5$

Selanjutnya, kita akan menunjukkan bahwa pernyataan berikut berlaku benar.

#### **Pernyataan yang Ingin Dibuktikan**

Terdapat bilangan real  $a$  dan  $b$  dengan  $a < b$  sedemikian sehingga  $P(a)$  adalah bilangan real negatif dan  $P(b)$  adalah bilangan real positif.

Sebetulnya, ada banyak cara untuk menunjukkan kebenaran **Pernyataan yang Ingin Dibuktikan** di atas itu. Ayo kita awali dengan memfaktorkan polinomial  $P$  menjadi seperti berikut.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^{2n-1} + a_1x^{2n-2} + \dots + a_{2n-2}x + a_{2n-1} \\ &= x^{2n-1} \cdot \left( 1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{2n-2}}{x^{2n-2}} + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} \right) \end{aligned}$$

Nah! Selanjutnya, kita akan menyelidiki nilai  $\left| 1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{2n-2}}{x^{2n-2}} + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} \right|$ .

Perhatikan! Dengan menggunakan sifat **Triangle Inequality**, kita akan punya pertidaksamaan berikut.

$$\left| \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{2n-2}}{x^{2n-2}} + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} \right| \leq \left| \frac{a_1}{x} \right| + \left| \frac{a_2}{x^2} \right| + \dots + \left| \frac{a_{2n-2}}{x^{2n-2}} \right| + \left| \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} \right| \quad (* 1)$$

Selanjutnya, menggunakan sifat-sifat operasi aritmetika yang melibatkan harga mutlak, maka kita akan punya persamaan berikut.

$$\left| \frac{a_1}{x} \right| + \left| \frac{a_2}{x^2} \right| + \dots + \left| \frac{a_{2n-2}}{x^{2n-2}} \right| + \left| \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} \right| = |a_1| \cdot \frac{1}{|x|} + |a_2| \cdot \frac{1}{|x|^2} + \dots + |a_{2n-2}| \cdot \frac{1}{|x|^{2n-2}} + |a_{2n-1}| \cdot \frac{1}{|x|^{2n-1}} \quad (* 2)$$

Nah, dengan menggabungkan pertidaksamaan (\* 1) dan persamaan (\* 2), maka kita akan memperoleh pertidaksamaan berikut.

$$\left| \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{2n-2}}{x^{2n-2}} + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} \right| \leq |a_1| \cdot \frac{1}{|x|} + |a_2| \cdot \frac{1}{|x|^2} + \dots + |a_{2n-2}| \cdot \frac{1}{|x|^{2n-2}} + |a_{2n-1}| \cdot \frac{1}{|x|^{2n-1}} \quad (* 3)$$

Sekarang, kita ambil sebarang bilangan real positif  $\epsilon$  (yaitu,  $\epsilon > 0$ ). Perhatikan bahwa  $\frac{\epsilon}{n}$  juga merupakan bilangan real positif karena  $n$  itu kan bilangan asli.

Kemudian, kita perhatikan elemen  $|a_i|$  untuk suatu  $1 \leq i \leq 2n - 1$ .

Karena  $\frac{\epsilon}{n}$  dan  $|a_i|$  adalah bilangan-bilangan real positif, maka menurut sifat **Archimedean Property**, akan terdapat suatu bilangan asli  $M_i$  sedemikian sehingga berlaku pertidaksamaan:

$$\frac{\epsilon}{n} \cdot M_i \geq |a_i|$$

atau dengan kata lain

$$\frac{\epsilon}{n} \geq \frac{1}{M_i} \cdot |a_i|$$

atau dengan kata lain

$$\frac{1}{M_i} \cdot |a_i| \leq \frac{\epsilon}{n}$$

Naaah, perhatikan juga, jika bilangan asli  $M_i$  memenuhi pertidaksamaan  $\frac{1}{M_i} \cdot |a_i| \leq \frac{\epsilon}{n}$ , maka semua bilangan asli  $M$  yang lebih besar dari  $M_i$  juga akan memenuhi pertidaksamaan  $\frac{1}{M} \cdot |a_i| \leq \frac{\epsilon}{n}$ .

Lebih lanjut....

Jika bilangan asli  $M_i$  memenuhi pertidaksamaan  $\frac{1}{M_i} \cdot |a_i| \leq \frac{\epsilon}{n}$ , maka semua bilangan real positif  $L$  yang lebih besar dari  $M_i$  juga akan memenuhi pertidaksamaan  $\frac{1}{L} \cdot |a_i| \leq \frac{\epsilon}{n}$ .

Karena variabel  $i$  berkisar antara 1 hingga  $2n - 1$ , maka kita bisa menemukan bilangan asli  $M_1, M_2, M_3$ , hingga  $M_{2n-1}$  yang memenuhi pertidaksamaan:

$$\frac{1}{M_1} \cdot |a_1| \leq \frac{\epsilon}{n}, \quad \frac{1}{M_2} \cdot |a_2| \leq \frac{\epsilon}{n}, \quad \frac{1}{M_3} \cdot |a_3| \leq \frac{\epsilon}{n}, \quad \text{hingga} \quad \frac{1}{M_{2n-1}} \cdot |a_{2n-2}| \leq \frac{\epsilon}{n}$$

Oke! Dari sini alurnya mungkin sudah bisa ditebak! Jika kita menetapkan bilangan asli  $M$  sebagai yang terbesar di antara  $M_1$  hingga  $M_{2n-1}$ , maka akan berlaku pertidaksamaan:

$$\frac{1}{M} \cdot |a_1| \leq \frac{\epsilon}{n}, \quad \frac{1}{M} \cdot |a_2| \leq \frac{\epsilon}{n}, \quad \frac{1}{M} \cdot |a_3| \leq \frac{\epsilon}{n}, \quad \text{hingga} \quad \frac{1}{M} \cdot |a_{2n-2}| \leq \frac{\epsilon}{n}$$

Lebih lanjut, untuk setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $|x| \geq M$  juga akan memenuhi pertidaksamaan:

$$\frac{1}{|x|} \cdot |a_1| \leq \frac{\epsilon}{n}, \quad \frac{1}{|x|} \cdot |a_2| \leq \frac{\epsilon}{n}, \quad \frac{1}{|x|} \cdot |a_3| \leq \frac{\epsilon}{n}, \quad \text{hingga} \quad \frac{1}{|x|} \cdot |a_{2n-2}| \leq \frac{\epsilon}{n}$$

yang berakibat juga:

$$\frac{1}{|x|} \cdot |a_1| \leq \frac{\epsilon}{n}, \quad \frac{1}{|x|^2} \cdot |a_2| \leq \frac{\epsilon}{n}, \quad \frac{1}{|x|^2} \cdot |a_3| \leq \frac{\epsilon}{n}, \quad \text{hingga} \quad \frac{1}{|x|^{2n-2}} \cdot |a_{2n-2}| \leq \frac{\epsilon}{n}$$

(\* 4)

Nah! Jika kita "satukan" pertidaksamaan (\* 3) dengan hasil-hasil pertidaksamaan (\* 4) di atas, maka kita akan mendapatkan pertidaksamaan:

$$\left| \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{2n-2}}{x^{2n-2}} + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} \right| \leq \frac{\epsilon}{n} + \frac{\epsilon}{n} + \dots + \frac{\epsilon}{n} + \frac{\epsilon}{n}$$

yang jelas akan ekuivalen dengan pertidaksamaan:

$$\left| \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{2n-2}}{x^{2n-2}} + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} \right| \leq \epsilon$$

Ingat ya! Pertidaksamaan di atas ini berlaku untuk setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $x \geq M$ .

Dengan kata lain, kita bisa menyatakan bahwa:

### Kesimpulan

Jika kita pilih sebarang bilangan real positif  $\epsilon$ , maka akan selalu ada bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan:

$$\left| \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{2n-2}}{x^{2n-2}} + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} \right| \leq \epsilon$$

Nah! Kita akan masuk bagian yang "menyenangkan".

Perhatikan bahwa bentuk jumlahan:

$$\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{2n-2}}{x^{2n-2}} + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}}$$

itu akan ekuivalen dengan bentuk jumlahan:

$$\left( 1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{2n-2}}{x^{2n-2}} + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} \right) - 1$$

Dengan demikian, pertidaksamaan:

$$\left| \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{2n-2}}{x^{2n-2}} + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} \right| \leq \epsilon$$

akan ekuivalen dengan pertidaksamaan:

$$\left| \left( 1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{2n-2}}{x^{2n-2}} + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} \right) - 1 \right| \leq \epsilon$$

dan bentuk pertidaksamaan di atas akan ekuivalen dengan pertidaksamaan:

$$-\epsilon \leq \left( 1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{2n-2}}{x^{2n-2}} + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} \right) - 1 \leq \epsilon$$

yang ekuivalen dengan pertidaksamaan:

$$1 - \epsilon \leq \left( 1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{2n-2}}{x^{2n-2}} + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} \right) \leq 1 + \epsilon$$

Dengan demikian, kita bisa "merevisi" **Kesimpulan** di atas menjadi ini.

### Kesimpulan "Revisi"

Jika kita pilih sebarang bilangan real positif  $\epsilon$ , maka akan selalu ada bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan:

$$1 - \epsilon \leq \left( 1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{2n-2}}{x^{2n-2}} + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} \right) \leq 1 + \epsilon$$

Karena  $\frac{1}{2}$  adalah bilangan real positif, maka dengan menetapkan  $\epsilon = \frac{1}{2}$ , **Kesimpulan Revisi** dapat kita ubah menjadi **Kesimpulan Revisi 2** sebagaimana di bawah ini.

### Kesimpulan "Revisi" 2

Akan selalu ada bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan:

$$\frac{1}{2} \leq \left( 1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{2n-2}}{x^{2n-2}} + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} \right) \leq \frac{3}{2}$$

dan dengan demikian  $\left( 1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{2n-2}}{x^{2n-2}} + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} \right)$  adalah bilangan real positif. Ingat ya!

Oke! Misalkan  $y$  adalah bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan di **Kesimpulan "Revisi" 2** di atas. Dengan demikian bilangan real  $y$  akan memenuhi pertidaksamaan  $|y| \geq M$  dengan  $M$  adalah bilangan asli sebagaimana saat kita "menciptakan" pertidaksamaan (\* 4).

Nah, tanpa mengurangi keumuman, kita asumsikan  $y$  adalah bilangan real positif. Dengan demikian  $-y$  adalah bilangan real negatif.

Perhatikan bahwa baik  $y$  dan  $-y$  akan memenuhi pertidaksamaan  $|y| \geq M$  serta  $|-y| \geq M$ .

Sekarang ayo kita jelaskan lebih detail!

- Karena  $y$  adalah bilangan real positif, maka  $y$  akan memenuhi pertidaksamaan  $|y| \geq M$ . Berdasarkan **Kesimpulan Revisi 2**, maka jumlahan  $\left(1 + \frac{a_1}{y} + \frac{a_2}{y^2} + \dots + \frac{a_{2n-2}}{y^{2n-2}} + \frac{a_{2n-1}}{y^{2n-1}}\right)$  akan berupa bilangan real positif.

Karena  $P(y) = y^{2n-1} \times \left(1 + \frac{a_1}{y} + \frac{a_2}{y^2} + \dots + \frac{a_{2n-2}}{y^{2n-2}} + \frac{a_{2n-1}}{y^{2n-1}}\right)$ , maka kita bisa menyatakan:

$$P(y) = y^{2n-1} \times (\text{suatu bilangan real positif}).$$

Selain itu, karena  $y$  adalah bilangan real positif, maka  $y^{2n-1}$  adalah bilangan real positif. Dengan demikian, kita bisa menyatakan:

$$P(y) = (\text{suatu bilangan real positif}) \cdot (\text{suatu bilangan real positif})$$

Dengan kata lain,  $P(y)$  adalah bilangan real positif. Jadi, karena  $y$  adalah bilangan real positif, maka  $P(y)$  adalah bilangan real positif.

- Karena  $-y$  adalah bilangan real negatif, maka  $-y$  akan memenuhi pertidaksamaan  $|-y| \geq M$ . Berdasarkan **Kesimpulan Revisi 2**, maka jumlahan  $\left(1 + \frac{a_1}{(-y)} + \frac{a_2}{(-y)^2} + \dots + \frac{a_{2n-2}}{(-y)^{2n-2}} + \frac{a_{2n-1}}{(-y)^{2n-1}}\right)$  akan berupa bilangan real positif.

Karena  $P(-y) = (-y)^{2n-1} \cdot \left(1 + \frac{a_1}{(-y)} + \frac{a_2}{(-y)^2} + \dots + \frac{a_{2n-2}}{(-y)^{2n-2}} + \frac{a_{2n-1}}{(-y)^{2n-1}}\right)$ , maka kita bisa menyatakan:

$$P(-y) = (-y)^{2n-1} \times (\text{suatu bilangan real positif}).$$

Selain itu, karena  $-y$  adalah bilangan real negatif dan  $2n - 1$  adalah bilangan ganjil, maka  $(-y)^{2n-1}$  adalah bilangan real negatif. Dengan demikian, kita bisa menyatakan:

$$P(-y) = (\text{suatu bilangan real negatif}) \times (\text{suatu bilangan real positif})$$

Dengan kata lain,  $P(-y)$  adalah bilangan real negatif. Jadi, karena  $-y$  adalah bilangan real negatif, maka  $P(-y)$  adalah bilangan real negatif.

Oke! Dari sekian panjang penjabaran di atas, kita bisa menetapkan bahwa:

- Polinomial  $P$  adalah fungsi real yang kontinu di  $\mathbb{R}$  termasuk di interval  $[-y, y]$ .
- $P(-y) \neq P(y)$  karena  $P(-y)$  bernilai negatif dan  $P(y)$  bernilai positif.
- Bilangan real 0 berada di antara  $P(-y)$  dan  $P(y)$ .

Nah! Berdasarkan teorema berikut:

***Intermediate Value Theorem***

Diketahui fungsi real  $f$  kontinu di interval  $[a, b]$ . Jika  $f(a) \neq f(b)$  dan  $L$  adalah bilangan real yang berada di antara  $f(a)$  dan  $f(b)$  (yaitu,  $f(a) < L < f(b)$ ), maka terdapat  $c \in [a, b]$  sedemikian sehingga berlaku  $L = f(c)$ .

maka akan terdapat bilangan real  $c$  dengan  $c \in [-y, y]$  sedemikian sehingga berlaku  $0 = P(c)$ .

Jadi, karena ada bilangan real  $c$  sedemikian sehingga berlaku  $P(c) = 0$ , maka  $c$  adalah akar real polinomial  $P$ .



17

# Ayo Kerjakan!

## Ujian Akhir Semester

### Soal Nomor 4 (a)

Soal

Jika  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  kontinu seragam pada  $A$  dan terdapat  $k > 0$  sehingga  $|f(x)| \geq k$  untuk setiap  $x \in A$ , tunjukkan  $\frac{1}{f}$  kontinu seragam pada  $A$ .

---

Dikerjakan

Cara untuk menunjukkan bahwa  $\frac{1}{f}$  kontinu seragam pada  $A$  adalah seperti di bawah ini.

#### Pernyataan yang Ingin Dibuktikan

Untuk sebarang  $a \in A$ , jika diberikan sebarang bilangan real positif  $\epsilon$ , maka kita dapat menentukan suatu bilangan real positif  $\delta$ , sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real  $x \in A$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x - a| < \delta$  juga akan memenuhi pertidaksamaan  $\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} \right| < \epsilon$ .

Oke! Ayo kita mulai pembuktiannya!

#### • Langkah-1

Pertama-tama, kita ambil sebarang  $a_0 \in A$ .

Selain itu, kita juga ambil sebarang bilangan real positif  $\epsilon_0$ .

- **Langkah-2**

Karena pada soal diketahui  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  kontinu seragam pada  $A$ , maka fungsi  $f$  kontinu seragam di titik  $a_0$  yang kita ambil pada **Langkah-1**.

Oleh sebab itu, berdasarkan definisi fungsi kontinu seragam, untuk  $\epsilon_0$  yang kita ambil pada **Langkah-1**, kita bisa menentukan suatu bilangan real positif  $\delta_0$ , sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x - a_0| < \delta_0$  juga akan memenuhi pertidaksamaan  $|f(x) - f(a_0)| < \epsilon_0$ .

- **Langkah-3**

Pada soal, diketahui terdapat  $k > 0$  sehingga  $|f(x)| \geq k$  untuk setiap  $x \in A$ . Perhatikan bahwa bilangan real positif  $k$  ini berlaku untuk sebarang elemen di himpunan  $A$ .

Perhatikan bahwa akan berlaku juga  $\frac{1}{|f(x)|} \leq k$  untuk setiap  $x \in A$ .

Selanjutnya, ingat bahwa bilangan real  $a_0$  yang kita ambil pada **Langkah-1** adalah elemen himpunan  $A$  ( $a_0 \in A$ ).

Dengan demikian, akan berlaku pertidaksamaan  $\frac{1}{|f(a_0)|} \leq k$ .

- **Langkah-4**

Sejauh ini, *so far*, "di tangan" kita sudah ada tiga bilangan real positif:

$$\epsilon_0, \delta_0, \text{ dan } k$$

• **Langkah-5**

Sekarang, ayo kita jabarkan pertidaksamaan  $|f(x) - f(a_0)| < \epsilon_0$  !

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a_0)} \right| < \epsilon_0 &\iff \left| \frac{f(a_0)}{f(x) \cdot f(a_0)} - \frac{f(x)}{f(x) \cdot f(a_0)} \right| < \epsilon_0 && \text{step-1} \\
 &\iff \left| \frac{f(a_0) - f(x)}{f(x) \cdot f(a_0)} \right| < \epsilon_0 && \text{step-2} \\
 &\iff \frac{|f(a_0) - f(x)|}{|f(x) \cdot f(a_0)|} < \epsilon_0 && \text{step-3} \\
 &\iff \frac{|f(x) - f(a_0)|}{|f(x) \cdot f(a_0)|} < \epsilon_0 && \text{step-4} \\
 &\iff \frac{|f(x) - f(a_0)|}{|f(x)| \cdot |f(a_0)|} < \epsilon_0 && \text{step-5}
 \end{aligned}$$

**Catatan:**

- **step-1:** Menyamakan pembilang dan penyebut.
- **step-2:** Meringkas bentuk rasional karena penyebutnya sudah sama.
- **step-3:** Sifat harga mutlak pada bentuk rasional.
- **step-4:** Sifat harga mutlak bahwa  $|x - y| = |y - x|$  untuk sebarang  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- **step-5:** Sifat harga mutlak pada perkalian.

Dengan demikian, berdasarkan penjabaran di atas, pertidaksamaan  $\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a_0)} \right| < \epsilon_0$  ekuivalen dengan:

$$\frac{|f(x) - f(a_0)|}{|f(x)| \cdot |f(a_0)|} < \epsilon_0.$$

• **Langkah-6**

Perhatikan! Jika  $x \in A$  dan karena  $a_0 \in A$ , maka akan berlaku pertidaksamaan:

$$\frac{1}{|f(x)| \cdot |f(a_0)|} < k^2.$$

Oleh sebab itu, jika  $x \in A$  dan karena  $a_0 \in A$ , maka akan berlaku pertidaksamaan:

$$\frac{|f(x) - f(a_0)|}{|f(x)| \cdot |f(a_0)|} < |f(x) - f(a_0)| \cdot k^2.$$

- **Langkah-7**

Perhatikan!  $k^2$  adalah bilangan real positif. Akibatnya,  $\frac{\epsilon_0}{k^2}$  juga adalah bilangan real positif.

Oleh sebab itu, berdasarkan definisi fungsi kontinu seragam, kita bisa menentukan suatu bilangan real positif  $\delta_1$ , sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x - a_0| < \delta_1$  juga akan memenuhi pertidaksamaan  $|f(x) - f(a_0)| < \frac{\epsilon_0}{k^2}$ .

Naaah!

Dengan demikian, untuk setiap bilangan real  $x \in A$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x - a_0| < \delta_1$  juga akan memenuhi pertidaksamaan:

$$\frac{|f(x) - f(a_0)|}{|f(x)| \cdot |f(a_0)|} < \frac{\epsilon_0}{k^2} \cdot k^2 \quad \text{yang ekuivalen dengan} \quad \frac{|f(x) - f(a_0)|}{|f(x)| \cdot |f(a_0)|} < \epsilon_0.$$

- **Kesimpulan**

Berdasarkan **Langkah-1** hingga **Langkah-7** di atas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa **Pernyataan yang Ingin Dibuktikan** berlaku benar. Kita dapat menetapkan nilai  $\delta$  sebagaimana nilai  $\delta$  yang bersesuaian dengan  $\frac{\epsilon}{k^2}$  terhadap definisi fungsi kontinu seragam untuk fungsi  $f$ .

■

18

# Ayo Kerjakan!

## Ujian Akhir Semester

### Soal Nomor 4 (b)

Soal

Diketahui fungsi  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  kontinu pada  $[a, b]$ . Jika nilai maksimum atau nilai minimum  $f$  terjadi bukan di titik dalam (interior point)  $[a, b]$ , tunjukkan  $f$  fungsi monoton pada  $[a, b]$ .

---

Dikerjakan

Pertama-tama, ayo kita paparkan dulu definisi-definisi yang dipakai. Maklum, namanya juga sudah belasan tahun yang lalu belajar analisis real.

#### **Titik Maksimum dan Nilai Maksimum**

Diketahui fungsi  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Titik  $c \in [a, b]$  disebut sebagai titik maksimum (lokal) fungsi  $f$  di  $[a, b]$  jika dan hanya jika  $f(x) \leq f(c)$  untuk setiap  $x \in [a, b]$ . Nilai  $f(c)$  disebut sebagai nilai maksimum (lokal) fungsi  $f$  di  $[a, b]$ .

#### ***Interior Point***

Titik  $c \in [a, b]$  disebut sebagai *interior point* dari  $[a, b]$  jika dan hanya jika terdapat persekitaran dari  $c$  yang seluruhnya berada di  $[a, b]$ .

**Fungsi Monoton Naik**

Fungsi  $f$  disebut fungsi monoton naik pada  $[a, b]$  jika dan hanya jika  $f(x) \leq f(y)$  untuk setiap  $x, y \in [a, b]$  dengan  $x < y$ .

Kita akan menunjukkan bahwa:

**Pernyataan yang Ingin Dibuktikan**

Diketahui fungsi  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  kontinu pada  $[a, b]$ . Jika nilai maksimum atau nilai minimum  $f$  terjadi bukan di *interior point*  $[a, b]$ , maka  $f$  adalah fungsi monoton pada  $[a, b]$ .

dengan metode *reductio ad absurdum*.

Caranya, kita akan mengandaikan bahwa ingkaran pernyataan di atas berlaku benar, yaitu:

**Inkaran Pernyataan yang Ingin Dibuktikan**

Diketahui fungsi  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  kontinu pada  $[a, b]$ . Diketahui nilai maksimum atau nilai minimum  $f$  terjadi bukan di *interior point*  $[a, b]$  dan  $f$  **bukan** fungsi monoton pada  $[a, b]$ .

kemudian kita akan menunjukkan bahwa dengan pengandaian tersebut akan muncul kontradiksi.

Pertama-tama, kita asumsikan bahwa  $f$  **bukan** fungsi konstan di interval  $[a, b]$ ! Sebab, jika  $f$  adalah fungsi konstan di interval  $[a, b]$ , maka semua titik di interval  $[a, b]$  akan menjadi titik maksimum sekaligus titik minimum fungsi  $f$ .

Oke ya, sekali lagi kita asumsikan bahwa  $f$  **bukan** fungsi konstan di interval  $[a, b]$ !

Dari pernyataan, diketahui nilai maksimum atau nilai minimum  $f$  terjadi bukan di *interior point*  $[a, b]$ .

Nah ini!

Kita tahu bahwa himpunan semua *interior point*  $[a, b]$  adalah  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ .

Sedangkan titik  $a$  dan  $b$  adalah *limit point* dari  $(a, b)$ .

Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa nilai maksimum atau nilai minimum  $f$  terjadi di titik  $a$  atau titik  $b$ .

Perhatikan! Nilai maksimum atau nilai minimum tidak bisa terjadi bersama-sama di titik  $a$  atau  $b$ !

Jadi, jika  $a$  adalah titik maksimum, maka  $b$  adalah titik minimum. Demikian juga sebaliknya. Sebab, jika  $a$  dan  $b$  kedua-duanya adalah titik maksimum, maka pasti akan ada titik minimum di antara  $a$  dan  $b$ . Demikian juga sebaliknya.

Berdasarkan pengandaian,  $f$  **bukan** fungsi monoton pada  $[a, b]$ . Artinya, ada titik  $c \in (a, b)$  yang menyebabkan fungsi  $f$  tidak menjadi fungsi monoton.

Karena terdapat titik  $c \in (a, b)$  yang menyebabkan fungsi  $f$  tidak menjadi fungsi monoton, maka akan terdapat suatu persekitaran  $V$  dari titik  $c$  yang mana:

1. Karena  $c$  adalah *interior point*  $[a, b]$ , maka persekitaran  $V$  sepenuhnya termuat di dalam  $(a, b)$ .
2. Jika  $\delta > 0$  adalah radius dari persekitaran  $V$ , maka akan berlaku:
  - $f(x) \leq f(y)$  untuk setiap  $x, y \in V$  yang memenuhi pertidaksamaan  $c - \delta < x < y < c$  juga  $f(x) \geq f(y)$  untuk setiap  $x, y \in V$  yang memenuhi pertidaksamaan  $c < x < y < c + \delta$  atau
  - $f(x) \geq f(y)$  untuk setiap  $x, y \in V$  yang memenuhi pertidaksamaan  $c - \delta < x < y < c$  juga  $f(x) \leq f(y)$  untuk setiap  $x, y \in V$  yang memenuhi pertidaksamaan  $c < x < y < c + \delta$

Apabila divisualisasikan, titik  $c$  ini adalah "titik balik" di mana fungsi  $f$  yang sebelumnya monoton naik "berubah haluan" menjadi monoton turun, atau sebaliknya, fungsi  $f$  yang sebelumnya monoton turun "berubah haluan" menjadi monoton naik.

Apapun kondisi yang terjadi, berdasarkan dua hal di atas, akan terdapat dua titik berbeda  $x', y' \in V$  sedemikian sehingga berlaku  $f(x') = f(y')$  dan titik  $c$  berada di antara  $x'$  dan  $y'$ .

Karena di awal kita mengasumsikan bahwa  $f$  **bukan** fungsi konstan di interval  $[a, b]$ , maka  $f$  juga bukan merupakan fungsi konstan di persekitaran  $V$ . Akibatnya,  $f(x') \neq f(c)$  dan  $f(y') \neq f(c)$ .

Kemudian, berdasarkan **Teorema Nilai Ekstrema** ini

#### Teorema Nilai Ekstrema

Jika fungsi real  $f$  kontinu di interval  $[a, b]$ , maka fungsi  $f$  memiliki titik ekstrema di dalam interval  $[a, b]$ .

maka fungsi  $f$  memiliki titik ekstrema di dalam interval  $[x', y']$  yang tidak lain adalah titik  $c$ .

**Muncul kontradiksi!** Karena diketahui bahwa nilai maksimum atau nilai minimum  $f$  terjadi bukan di *interior point*  $[a, b]$ , sedangkan  $c$  adalah *interior point*  $[a, b]$ .

Jadi, kita bisa menyatakan bahwa **Inkaran Pernyataan yang Ingin Dibuktikan** adalah **salah** dan yang benar adalah **Pernyataan yang Ingin Dibuktikan**.



19

# Ayo Kerjakan!

## Ujian Akhir Semester

### Soal Nomor 5 (a)

#### Soal

Diberikan  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $c \in \mathbb{R}$ . Jika  $f'(c)$  ada dan untuk setiap  $r > 0$  terdapat  $x \in \mathbb{N}$ ,  $(c) - \{c\}$  sehingga  $f(x) = f(c)$ , tunjukkan  $f'(c) = 0$  !

---

#### Dikerjakan

Eh, kalau diperhatikan... soalnya ini agak aneh ya? Mungkin salah ketik? Yaitu di bagian "...untuk setiap  $r > 0$  terdapat  $x \in \mathbb{N}$ ,  $(c) - \{c\}$ ..."

Sekadar informasi, aku dapat soal ini dari bank soal HIMATIKA FMIPA UGM yang bisa diakses bebas di internet. Tapi, aku nggak menanyakan ke mereka tentang benar-tidaknya isi soal ini.

Yah, menurutku sih memang betul ada salah ketik untuk soal ini.

Aku menduga teks soal yang benar itu seperti ini.

#### Soal yang "Sepertinya" Benar

Diberikan  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $c \in \mathbb{R}$ . Jika  $f'(c)$  ada dan untuk setiap  $r > 0$  terdapat  $x \in N_r(c) - \{c\}$  sehingga  $f(x) = f(c)$ , tunjukkan  $f'(c) = 0$  !

Isi soal di atas terlihat lebih "masuk akal" kan?

Nah, yang dimaksud dengan  $N_r(c)$  tidak lain adalah persekitaran dari  $c$  dengan *radius*  $r$ . Kita bisa mendefinisikan  $N_r(c)$  sebagai ini.

$$N_r(c) = \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < r\}$$

Dengan demikian,  $N_r(c) - \{c\}$  bisa kita definisikan seperti di bawah ini.

$$N_r(c) - \{c\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < r \text{ dan } x \neq c\}$$

Karena  $|c - c| = 0$ , maka definisi  $N_r(c) - \{c\}$  di atas akan ekuivalen dengan ini.

$$N_r(c) - \{c\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - c| < r\}$$

Oke!

Diketahui  $f'(c)$  ada. Dengan demikian,  $f'(c) = L$  untuk suatu  $L \in \mathbb{R}$ .

Berdasarkan definisi turunan, karena  $f'(c) = L$ , maka:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = L$$

Kemudian, berdasarkan definisi limit, pernyataan di bawah akan berlaku benar.

#### **Pernyataan yang Berlaku Benar**

Jika kita diberikan sebarang bilangan real positif  $\epsilon$ , maka kita akan selalu dapat menetapkan suatu bilangan real positif  $\delta$  sedemikian sehingga untuk setiap  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $0 < |x - c| < \delta$  juga akan memenuhi pertidaksamaan  $\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \epsilon$ .

Berdasarkan soal, untuk setiap  $r > 0$  terdapat  $x \in N_r(c) - \{c\}$  sehingga  $f(x) = f(c)$ .

Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan bahwa untuk sebarang bilangan real positif  $\epsilon$ , maka akan terdapat suatu bilangan real positif  $\delta$  dan bilangan real  $x'$  sedemikian sehingga  $x'$  memenuhi:

- pertidaksamaan  $0 < |x' - c| < \delta$
- pertidaksamaan  $\left| \frac{f(x') - f(c)}{x' - c} - L \right| < \epsilon$ , dan
- persamaan  $f(x') = f(c)$ .

Nah, karena bilangan real  $x'$  tersebut memenuhi pertidaksamaan  $\left| \frac{f(x') - f(c)}{x' - c} - L \right| < \epsilon$  dan persamaan  $f(x') = f(c)$ , maka:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x') - f(c)}{x' - c} - L \right| < \epsilon &\iff \left| \frac{f(c) - f(c)}{x' - c} - L \right| < \epsilon \\ &\iff \left| \frac{0}{x' - c} - L \right| < \epsilon \\ &\iff |0 - L| < \epsilon \\ &\iff |L| < \epsilon \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita akan mendapatkan pertidaksamaan  $|L| < \epsilon$ .

Perhatikan! Pertidaksamaan  $|L| < \epsilon$  ini **berlaku untuk sebarang**  $\epsilon > 0$  lho!

Nah, ketika nilai  $\epsilon$  lebih besar dari  $|L|$ , maka pertidaksamaan tersebut bisa jadi tidak akan berlaku benar dan dengan demikian "berpotensi" memunculkan **kontradiksi**.

Naaah! Supaya kontradiksi tersebut tidak muncul, kita harus menetapkan bilangan real  $L$ , supaya pertidaksamaan  $|L| < \epsilon$  akan bernilai benar untuk sebarang bilangan real positif  $\epsilon_0$  ( $\epsilon > 0$ ).

Seperti yang bisa ditebak, satu-satunya bilangan real  $L$  yang akan memenuhi pertidaksamaan  $|L| < \epsilon$  untuk sebarang bilangan real positif  $\epsilon_0$  adalah 0.

Jadi, karena  $L = 0$ , maka terbukti sudah bahwa  $f'(c) = L = 0$ .

■



20

# Ayo Kerjakan!

## Ujian Akhir Semester

### Soal Nomor 5 (b)

Soal

Diketahui fungsi  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mempunyai turunan di setiap titik  $x \in [0, \infty)$ . Jika  $f'(x) = C$  untuk setiap  $x \in [0, \infty)$  dan  $a > 0$ , tentukan  $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x+a) - f(x)\}$  !

---

Dikerjakan

Perhatikan!

Karena pada soal diketahui:

Jika  $f'(x) = C$  untuk setiap  $x \in [0, \infty)$ ...

berarti kurva fungsi  $f$  pada interval  $x \in [0, \infty)$  berbentuk **garis lurus!**

Weh! Kenapa begitu?

Seperti yang kita tahu  $f'(c)$  adalah gradien/kemiringan kurva fungsi  $f$  di titik  $c$ . Nah, karena kemiringan kurva fungsi  $f$  pada interval  $[0, \infty)$  selalu berupa konstanta yang sama, yaitu  $C$ , maka kurva fungsi  $f$  ya bentuknya garis lurus. Dengan kata lain, pada interval  $[0, \infty)$ ,  $f$  adalah fungsi linear.

Kita tahu bahwa bentuk umum persamaan fungsi linear adalah:

$$f(x) = mx + c$$

dengan  $m \in \mathbb{R}$  adalah gradien kurva fungsi  $f$  dan  $c \in \mathbb{R}$  adalah faktor translasi kurva fungsi terhadap sumbu X.

Nah, karena diketahui bahwa  $f$  adalah fungsi linear dengan gradiennya  $C$ , maka kita akan punya persamaan:

$$f(x) = Cx + c$$

Oh, supaya tidak membingungkan, kita ganti saja notasi faktor translasi dari  $c$  menjadi  $d$ . Dengan demikian, kita akan punya persamaan:

$$f(x) = Cx + d$$

Dengan demikian, untuk  $a > 0$ , kita akan punya persamaan:

$$f(x+a) - f(x) = C(x+a) + d - (Cx + d) = Cx + Ca + d - Cx - d = Ca$$

Jadi, jelas bahwa  $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x+a) - f(x)\} = \lim_{x \rightarrow \infty} Ca = Ca$ .

■