Pembahasan
Ujian Tengah Semester
TA 2004/2005

Pengantar Struktur Aljabar 1

Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Gadjah Mada
Yogyakarta

Mawi Wijna *

2022

*Walaupun pembahasan soal ujian ini belum tentu benar, akan tetapi semoga ada manfaatnya meskipun sedikit. Dibuat untuk mengisi waktu luang sambil menidurkan bayi. :p

Soal

1. (a) Diberikan himpunan G tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner $\star$.
   Tuliskan definisi $(G, \star)$ sebagai grup!

   (b) Diketahui S adalah himpunan bilangan real $\mathbb{R} - \{-1\}$ dan didefinisikan $\star$ pada S sebagai berikut.

   $$\forall x, y \in S \qquad x * y \; = \; x + y + (x \cdot y)$$

   Simbol "$+$" dan "$\cdot$" adalah operasi penjumlahan dan perkalian bilangan real seperti biasa.
   Tunjukkan bahwa $\star$ adalah operasi biner dan $(S, \star)$ adalah grup!

   (c) Diberikan himpunan G yang terdiri dari tiga elemen, yaitu $G = \{e, x, y\}$.
   Buat tabel Cayley untuk G sehingga G merupakan grup!
   DIBERI KETERANGAN LENGKAP!

2. (a) Tulis tiga teorema tentang subgrup!
   Buktikan **SATU** dari ketiga teorema terebut! (pilih sendiri.)

   (b) Perhatikan grup $\mathbb{Z}_{16}$.
      i. Tunjukkan $\mathbb{Z}_{16}$ siklik dan tulis semua elemen pembangunnya!
      ii. Tulis semua subgrup proper $\mathbb{Z}_{16}$!
      Apakah subgrup-subgrup tersebut siklik? Apakah abelian? Berikan penjelasan!

3. Diberikan grup abelian G dan H, K subgrup G.
   Tunjukkan bahwa himpunan $\{hk \mid h \in H \text{ dan } k \in K\}$ adalah subgrup G juga!

Pembahasan Soal Nomor 1 (a)

Soal
Diberikan himpunan G tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner $\star$.
Tuliskan definisi $(G, \star)$ sebagai grup!

Pembahasan
Himpunan G tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner $\star$ disebut grup jika dan hanya jika memenuhi tiga aksioma berikut.

1. Operasi $\star$ di G bersifat asosiatif, yaitu untuk sebarang $g_1, g_2, g_3 \in G$ berlaku $(g_1 \star g_2) \star g_3 = g_1 \star (g_2 \star g_3)$.
2. Himpunan G memuat elemen identitas terhadap operasi $\star$, yaitu terdapat $e \in G$ sedemikian sehingga untuk setiap $g \in G$ akan berlaku $e \star g = g \star e = e$. Elemen e ini disebut sebagai elemen identitas di G terhadap operasi $\star$.
3. Setiap elemen di G memiliki invers terhadap operasi $\star$, yaitu untuk setiap $g \in G$, kita dapat menemukan $g' \in G$ sedemikian sehingga berlaku $g \star g' = g' \star g = e$ dengan elemen e adalah elemen identitas di G terhadap operasi $\star$. Elemen g' disebut sebagai invers dari elemen g. Sebaliknya, elemen g adalah elemen invers dari elemen g'.

■

Pembahasan Soal Nomor 1 (b)

Soal
Diketahui S adalah himpunan bilangan real $\mathbb{R} - \{-1\}$ dan didefinisikan $\star$ pada S sebagai berikut.

$$\forall x, y \in S \qquad x * y \;=\; x + y + (x \cdot y)$$

Simbol "+" dan "·" adalah operasi penjumlahan dan perkalian bilangan real seperti biasa.
Tunjukkan bahwa $\star$ adalah operasi biner dan $(S, \star)$ adalah grup!

Pembahasan
Sebelumnya, yang dimaksud dengan definisi himpunan S sebagai $\mathbb{R} - \{-1\}$ adalah $S \subset \mathbb{R}$ dan $-1 \notin S$.

***

Untuk membuktikan bahwa $(S, \star)$ adalah grup, kita akan melakukan serangkaian pembuktian berikut secara berurutan.

1. Membuktikan bahwa operasi $\star$ merupakan operasi biner, yaitu terdefinisi dengan baik sekaligus tertutup di S.
2. Jika Poin (1) terbukti benar, maka kita akan membuktikan bahwa operasi $\star$ bersifat asosiatif di S.
3. Jika Poin (2) terbukti benar, maka kita akan membuktikan bahwa S memuat elemen identitas terhadap operasi $\star$.
4. Jika Poin (3) terbukti benar, maka kita akan membuktikan bahwa setiap elemen di S memiliki invers terhadap operasi $\star$.

Oke! Mari kita mulai pembuktian!

***

• (1) Membuktikan bahwa operasi $\star$ merupakan operasi biner, yaitu terdefinisi dengan baik sekaligus tertutup di S.

Pertama, kita ingin membuktikan bahwa operasi $\star$ merupakan operasi biner, yaitu operasi yang terdefinisi dengan baik sekaligus tertutup di S. Kenapa? Ya, karena operasi biner dibutuhkan sebagai syarat suatu grup.

Mari kita ambil sebarang $s_1, s_2, k_1, k_2 \in S$ dengan $s_1 = k_1$ dan $s_2 = k_2$.
Perhatikan penjabaran berikut!

$$\begin{aligned} s_1 \star s_2 &= s_1 + s_2 + (s_1 \cdot s_2) \\ &= k_1 + k_2 + (k_1 \cdot k_2) \\ &= k_1 \star k_2 \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, terlihat bahwa untuk sebarang $s_1, s_2, k_1, k_2 \in S$ dengan $s_1 = k_1$ dan $s_2 = k_2$ akan berlaku $s_1 \star s_2 = k_1 \star k_2$. Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa operasi $\star$ terdefinisi dengan baik di S.

Selanjutnya, kita akan membuktikan bahwa operasi $\star$ tertutup di S.

Mari kita ambil sebarang $s_1, s_2 \in S$. Dengan demikian, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ dan $s_1, s_2 \neq -1$.
Berdasarkan definisi operasi $\star$, kita akan mendapatkan:

$$s_1 \star s_2 \;=\; s_1 + s_2 + (s_1 \cdot s_2).$$

Perhatikan!

1. Karena $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, maka $s_1 \cdot s_2 \in \mathbb{R}$.
2. Karena $s_1, s_2, (s_1 \cdot s_2) \in \mathbb{R}$, maka $s_1 + s_2 + (s_1 \cdot s_2) \in \mathbb{R}$.

Dengan demikian, berdasarkan 2 poin di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa $s_1 \star s_2 \in \mathbb{R}$.

Pertanyaannya,

> *Apakah $s_1 \star s_2 \in S$?*

Perhatikan bahwa $s_1 \star s_2 \notin S$ jika dan hanya jika $s_1 \star s_2 = -1$.

Pertanyaan lanjutannya,

> *Apakah ada $s'_1, s'_2 \in S$ sedemikian sehingga $s'_1 \star s'_2 = -1$?*

Oke, **kita akan mengandaikan bahwa ada** $s'_1, s'_2 \in S$ sedemikian sehingga $s'_1 \star s'_2 = -1$.
Berdasarkan definisi operasi $\star$ kita akan memperoleh:

$$s'_1 \star s'_2 \ = \ s'_1 + s'_2 + (s'_1 \cdot s'_2) \ = \ -1$$

Perhatikan persamaan $s'_1 + s'_2 + (s'_1 \cdot s'_2) \ = \ -1$!

Karena $s'_1 \in \mathbb{R}$, maka (jelas) terdapat $-s'_1 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $-s'_1 + s'_1 = 0$.
Jika kedua ruas pada persamaan di atas kita jumlahkan dengan $-s'_1$ dari kiri, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
& s'_1 + s'_2 + (s'_1 \cdot s'_2) \ = \ -1 \\
\iff \ & (-s'_1) \ + \ s'_1 + s'_2 + (s'_1 \cdot s'_2) \ = \ (-s'_1) \ + \ (-1) \\
\iff \ & (-s'_1 + s'_1) \ + \ s'_2 + (s'_1 \cdot s'_2) \ = \ -s'_1 - 1 \\
\iff \ & 0 + s'_2 + (s'_1 \cdot s'_2) \ = \ -(s'_1 + 1) \\
\iff \ & s'_2 + (s'_1 \cdot s'_2) \ = \ -(1 + s'_1)
\end{aligned}$$

Kemudian, $s'_2 + (s'_1 \cdot s'_2)$ dapat kita faktorkan menjadi $s'_2 \cdot (1 + s'_1)$.

$$\begin{aligned}
& s'_2 + (s'_1 \cdot s'_2) \ = \ -(1 + s'_1) \\
\iff \ & s'_2 \cdot (1 + s'_1) \ = \ -(1 + s'_1)
\end{aligned}$$

Perhatikan!
Karena $s'_1 \in S$, maka $s'_1 \in \mathbb{R}$ dan $s'_1 \neq -1$.
Karena $s'_1 \neq -1$, maka $1 + s'_1 \neq 0$.
Karena $1 + s'_1 \neq 0$, maka $\dfrac{1}{1 + s'_1}$ ada.

Jika kedua ruas pada persamaan $s'_2 \cdot (1 + s'_1) \ = \ -(1 + s'_1)$ kita kalikan dengan $\dfrac{1}{1 + s'_1}$ dari kanan, maka akan diperoleh ini.

$$\begin{aligned}
& s'_2 \cdot (1 + s'_1) \ = \ -(1 + s'_1) \\
\iff \ & s'_2 \cdot (1 + s'_1) \cdot \left(\frac{1}{1 + s'_1}\right) \ = \ -(1 + s'_1) \cdot \left(\frac{1}{1 + s'_1}\right) \\
\iff \ & s'_2 \cdot \left(\frac{1 + s'_1}{1 + s'_1}\right) \ = \ -1 \cdot \left(\frac{1 + s'_1}{1 + s'_1}\right)
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di bagian atas, diketahui bahwa $1 + s'_1 \neq 0$. Dengan demikian, $\dfrac{1 + s'_1}{1 + s'_1} = 1$.
Karena $\dfrac{1 + s'_1}{1 + s'_1} = 1$, maka persamaan $s'_2 \cdot \left(\dfrac{1 + s'_1}{1 + s'_1}\right) \ = \ -1 \cdot \left(\dfrac{1 + s'_1}{1 + s'_1}\right)$ akan ekuivalen dengan $s'_2 = -1$.

Muncul kontradiksi!

Tidak mungkin $s'_2 = -1$!
Karena $s'_2 \in S$, akibatnya $s'_2 \neq -1$.

Dengan langkah yang mirip, jika kita menjumlahkan kedua ruas persamaan $s'_1 + s'_2 + (s'_1 \cdot s'_2) \ = \ -1$ dengan $-s'_2$, maka kita akan mendapatkan hasil $s'_1 = -1$. Ini juga **kontradiktif** karena $s'_1 \in S$ yang berakibat $s'_1 \neq -1$.

Dengan demikian, pengandaian bahwa ada $s_1', s_2' \in S$ sedemikian sehingga $s_1' \star s_2' = -1$ adalah **SALAH!**.

Pernyataan yang benar adalah, **tidak ada** $s_1', s_2' \in S$ sedemikian sehingga $s_1' \star s_2' = -1$.

Dengan kata lain, untuk setiap $s_1', s_2' \in S$ akan berlaku $s_1' \star s_2' \neq -1$.
Dengan kata lain, untuk setiap $s_1', s_2' \in S$ akan berlaku $s_1' \star s_2' \in S$.
Dengan demikian kita dapat menyimpulkan bahwa operasi $\star$ tertutup di S.

Berdasarkan uraian panjang di **bagian (1)** ini, kita sudah berhasil menunjukkan bahwa operasi $\star$ terdefinisi dengan baik dan tertutup di S.

Oleh sebab itu, kita dapat menyimpulkan bahwa operasi $\star$ merupakan operasi biner.

Selanjutnya, mari kita beralih membuktikan poin 2.

• (2) Membuktikan bahwa operasi $\star$ bersifat asosiatif di S.

Sekarang kita akan membuktikan bahwa operasi $\star$ bersifat asosiatif di S. Supaya lebih mendetilkan sifat asosiatif, kita akan mendefisikan ulang operasi $\star$ dengan menambahkan tanda kurung sebagaimana berikut.

$$\forall s_1, s_2 \in S, \quad s_1 \star s_2 \;=\; (s_1 + s_2) + (s_1 \cdot s_2).$$

Tanpa berlama-lama, mari kita ambil sebarang $s_1, s_2, s_3 \in S$. Kita bentuk $(s_1 \star s_2) \star s_3$ kemudian menjabarkannya. Dalam proses penjabaran, kita akan menggunakan sifat asosiatif, komutatif, dan distributif penjumlahan serta perkalian di bilangan real.

$$\begin{aligned}
(s_1 \star s_2) \star s_3 &= \Big((s_1 + s_2) + (s_1 \cdot s_2)\Big) \star s_3 \\
&= \Big(((s_1 + s_2) + (s_1 \cdot s_2)) \;+ s_3\Big) \;+\; \Big((s_1 + s_2) + (s_1 \cdot s_2)\Big) \cdot s_3 \\
&= (s_1 + s_2) + s_3 + (s_1 \cdot s_2) \;+\; (s_1 + s_2) \cdot s_3 + (s_1 \cdot s_2) \cdot s_3 \\
&= (s_1 + s_2 + s_3) \;+\; (s_1 \cdot s_2) + (s_1 \cdot s_3) + (s_2 \cdot s_3) \;+\; (s_1 \cdot s_2 \cdot s_3)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, mari kita bentuk $s_1 \star (s_2 \star s_3)$ kemudian menjabarkannya. Dalam proses penjabaran, kita juga akan menggunakan sifat asosiatif, komutatif, dan distributif penjumlahan serta perkalian di bilangan real.

$$\begin{aligned}
s_1 \star (s_2 \star s_3) &= s_1 \star \Big((s_2 + s_3) + (s_2 \cdot s_3)\Big) \\
&= \Big(s_1 + ((s_2 + s_3) + (s_2 \cdot s_3))\Big) \;+\; s_1 \cdot \Big((s_2 + s_3) + (s_2 \cdot s_3)\Big) \\
&= (s_1 + s_2 + s_3) \;+\; (s_2 \cdot s_3) \;+\; s_1 \cdot (s_2 + s_3) \;+\; s_1 \cdot (s_2 \cdot s_3) \\
&= (s_1 + s_2 + s_3) \;+\; (s_2 \cdot s_3) \;+\; (s_1 \cdot s_2) + (s_1 \cdot s_3) \;+\; (s_1 \cdot s_2 \cdot s_3) \\
&= (s_1 + s_2 + s_3) \;+\; (s_1 \cdot s_2) + (s_1 \cdot s_3) \;+\; (s_2 \cdot s_3) \;+\; (s_1 \cdot s_2 \cdot s_3)
\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil penjabaran $(s_1 \star s_2) \star s_3$ dan $s_1 \star (s_2 \star s_3)$ di atas kita dapat menyimpulkan bahwa $(s_1 \star s_2) \star s_3 \;=\; s_1 \star (s_2 \star s_3)$.

Dengan demikian, karena untuk sebarang $s_1, s_2, s_3 \in S$ kita memperoleh persamaan:

$$(s_1 \star s_2) \star s_3 \;=\; s_1 \star (s_2 \star s_3)$$

maka kita dapat menyimpulkan bahwa operasi $\star$ bersifat asosiatif di S.

Selanjutnya, mari kita beralih membuktikan poin 3.

• (3) Membuktikan bahwa S memuat elemen identitas terhadap operasi $\star$.

Misalkan $e_\star \in S$ adalah elemen identitas terhadap operasi $\star$.
Dengan demikian, untuk sebarang $s \in S$ akan berlaku persamaan berikut.

$$s \star e_\star = e_\star \star s = s$$

Pertanyaannya, wujud $e_\star$ itu seperti apa?

Untuk menjawab pertanyaan tersebut mari kita jabarkan $s \star e_\star$ dan $e_\star \star s$ sesuai definisi operasi $\star$.

- $s \star e_\star \;=\; (s + e_\star) + (s \cdot e_\star)$
- $e_\star \star s \;=\; (e_\star + s) + (e_\star \cdot s)$

Karena $s \star e_\star = s$, maka:

$$(s + e_\star) + (s \cdot e_\star) = s$$

Berdasarkan syarat keanggotaan S, karena $s \in S$, maka $s \in \mathbb{R}$.
Sebagaimana yang kita ketahui. Karena $(\mathbb{R}, +)$ adalah grup, maka elemen s memiliki invers terhadap operasi penjumlahan bilangan real, yaitu $-s$.

Jika kedua ruas persamaan $(s + e_\star) + (s \cdot e_\star) = s$ dijumlahkan dengan $-s$ dari kiri, akan diperoleh:

$$\begin{aligned}
(s + e_\star) + (s \cdot e_\star) = s &\iff (-s) + (s + e_\star) + (s \cdot e_\star) = (-s) + s \\
&\iff \big((-s) + s\big) \;+\; e_\star + (s \cdot e_\star) = (-s) + s \\
&\iff 0 \;+\; e_\star + (s \cdot e_\star) = 0 \\
&\iff e_\star + (s \cdot e_\star) = 0 \\
&\iff e_\star + (e_\star \cdot s) = 0 \\
&\iff e_\star \cdot (1 + s) = 0
\end{aligned}$$

Dengan demikian, berdasarkan penjabaran di atas, persamaan $(s + e_\star) + (s \cdot e_\star) = s$ ekuivalen dengan $e_\star \cdot (1 + s) = 0$.

Selanjutnya perhatikan teorema berikut.

> **Teorema 1.b.1**
> Diketahui $x, y \in \mathbb{R}$.
>
> Jika $x \cdot y = 0$, maka $x = 0$ atau $y = 0$.

Berdasarkan **Teorema 1.b.1** di atas, karena $e_\star \cdot (1 + s) = 0$, maka akan berlaku $e_\star = 0$ atau $1 + s = 0$.

Jika yang terjadi adalah $1 + s = 0$, maka akibatnya $s = -1$.
Perhatikan bahwa **hal ini tidak mungkin terjadi** karena himpunan S tidak memuat -1!
(Jangan lupa! Elemen s itu merupakan anggota himpunan S.)

Dengan demikian, jika $e_\star \cdot (1 + s) = 0$, maka satu-satunya hal yang mungkin adalah $e_\star = 0$.

Perhatikan bahwa $e_\star = 0 \in \mathbb{R}$ dan $e_\star = 0 \neq -1$. Dengan demikian $e_\star = 0 \in S$.

Karena $e_\star = 0 \in S$ merupakan elemen identitas di S atas operasi $\star$, maka kita bisa menyimpulkan bahwa S memuat elemen identitas terhadap operasi $\star$.

Selanjutnya, mari kita beralih membuktikan poin 4 sebagai yang terakhir.

• (4) Membuktikan bahwa setiap elemen di S memiliki invers terhadap operasi $\star$.

Jangan lupa! Pada poin sebelumnya, kita sudah membuktikan bahwa S memiliki elemen identitas terhadap operasi $\star$ yaitu 0.

Nah, sekarang kita ambil sebarang $s \in S$.
Misalkan $\alpha \in S$ adalah elemen invers untuk s. Dengan demikian akan berlaku persamaan berikut.

$s \star \alpha = \alpha \star s = 0$.

Pertanyaannya, wujud α itu seperti apa?

Untuk menjawab pertanyaan tersebut mari kita jabarkan $a \star \alpha$ dan $\alpha \star a$ sesuai definisi operasi $\star$.

- $s \star \alpha \;=\; (s + \alpha) + (s \cdot \alpha)$
- $\alpha \star s \;=\; (\alpha + s) + (\alpha \cdot s)$

Karena $s \star \alpha = 0$, maka:

$s \star \alpha \;=\; (s + \alpha) + (s \cdot \alpha) = 0$

Berdasarkan syarat keanggotaan S, karena $s \in S$, maka $s \in \mathbb{R}$.
Sebagaimana yang kita ketahui. Karena $(\mathbb{R}, +)$ adalah grup, maka elemen s memiliki invers terhadap operasi penjumlahan bilangan real, yaitu $-s$.

Jika kedua ruas persamaan $(s + \alpha) + (s \cdot \alpha) = 0$ dijumlahkan dengan $-s$ dari kiri, akan diperoleh:

$$\begin{aligned}
(s + \alpha) + (s \cdot \alpha) = 0 &\iff (-s) + (s + \alpha) + (s \cdot \alpha) = (-s) + 0 \\
&\iff \big((-s) + s\big) \;+\; \alpha + (s \cdot \alpha) = -s \\
&\iff 0 \;+\; \alpha + (s \cdot \alpha) = -s \\
&\iff \alpha + (s \cdot \alpha) = -s \\
&\iff \alpha + (\alpha \cdot s) = -s \\
&\iff \alpha \cdot (1 + s) = -s
\end{aligned}$$

Berdasarkan syarat keanggotaan S, karena $s \in S$, maka $s \in \mathbb{R}$ dan $s \neq 1$.
Karena $s \neq 1$, maka $1 + s \neq 0$.
Dengan demikian $\dfrac{1}{1+s}$ terdefinisi dengan baik.

Jika kedua ruas pada persamaan $\alpha \cdot (1 + s) = -s$ kita kalikan dengan $\dfrac{1}{1+s}$ dari kanan, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (1 + s) = -s &\iff \alpha \cdot (1 + s) \cdot \left(\frac{1}{1+s}\right) = -s \cdot \left(\frac{1}{1+s}\right) \\
&\iff \alpha \cdot \left(\frac{1+s}{1+s}\right) = \left(\frac{-s}{1+s}\right) \\
&\iff \alpha = \frac{-s}{1+s}
\end{aligned}$$

Dengan demikian, untuk sebarang $s \in S$, kita dapat menemukan invers untuk s terhadap operasi $\star$, yaitu $\dfrac{-s}{1+s}$, sedemikian sehingga berlaku persamaan:

$s \star \dfrac{-s}{1+s} = \dfrac{-s}{1+s} \star s = 0.$

***

Jadi, berdasarkan uraian panjang di atas, karena kita sudah membuktikan kebenaran empat aksioma berikut secara berurutan:

1. Operasi $\star$ merupakan operasi biner, yaitu terdefinisi dengan baik sekaligus tertutup,
2. Operasi $\star$ bersifat asosiatif di S,
3. Grup S memuat elemen identitas terhadap operasi $\star$, dan
4. Setiap elemen di S memiliki invers terhadap operasi $\star$,

maka kita dapat menyimpulkan bahwa $(S, \star)$ adalah grup.

■

Pembahasan Soal Nomor 1 (c)

Soal
Diberikan himpunan G yang terdiri dari tiga elemen, yaitu $G = \{e, x, y\}$.
Buat tabel Cayley untuk G sehingga G merupakan grup!
DIBERI KETERANGAN LENGKAP!

Pembahasan
Diketahui himpunan G yang memiliki 3 elemen, yaitu e, x, dan y.
Ingat! Karena himpunan G memuat 3 elemen, maka ketiga elemen tersebut berbeda-beda lho!
Dengan kata lain, $e \neq x \neq y$.

Kemudian, kita ingin membuat agar G menjadi suatu grup. Untuk itu, tentu kita butuh suatu **operasi biner** di G. Pertanyannya,

Operasi biner di G yang kita butuhkan itu seperti apa?

Nah!

Karena ketiga elemen di G (e, x, dan y) berwujud abstrak, maka dari itu kita **tidak bisa secara spesifik** "menciptakan" suatu operasi biner. Apa yang disebut menciptakan secara spesifik itu ya menciptakan suatu operasi biner yang ketahuan rumusnya, semacam $a \star b = a + b^2$.

Oleh sebab itu, **asumsikan** saja bahwa kita sudah memiliki suatu operasi biner yang terdefinisi dengan baik dan juga tertutup di G. Untuk memudahkan, kita beri simbol operasi biner tersebut dengan $\oplus$. Dengan demikian, $(G, \oplus)$ adalah suatu grup.

Apakah dengan begitu soal ini sudah selesai dikerjakan?

Ya jelas **belum** toh ya *Ferguso*!

***

Kembali ke soal!

Diketahui himpunan $G = \{e, x, y\}$.
Diketahui pula operasi biner $\oplus$ di G sedemikian sehingga $(G, \oplus)$ adalah grup.

Nah, sekarang kita akan menyelidiki "hubungan" antar elemen di G jika dikaitkan dengan operasi biner $\oplus$.

Seperti yang kita ketahui, karena $\oplus$ merupakan operasi biner yang terdefinisi dengan baik dan tertutup di G, maka untuk setiap $\alpha, \beta \in G$ akan berlaku $\alpha \oplus \beta \in G$. Karena $G = \{e, x, y\}$, maka nilai α dan β dapat kita substitusi dengan e, x, atau y. Misal, untuk $\alpha = x$ dan $\beta = e$, kita akan memperoleh $\alpha \oplus \beta = x \oplus e \in G$. Jika dirinci semua kemungkinan nilai α dan β, kita akan mendapatkan hasil sebagai berikut.

1. $e \oplus x \in G$
2. $e \oplus y \in G$
3. $e \oplus e \in G$

4. $x \oplus x \in G$
5. $x \oplus y \in G$
6. $x \oplus e \in G$

7. $y \oplus x \in G$
8. $y \oplus y \in G$
9. $y \oplus e \in G$

Ingat! Karena tidak disebutkan bahwa G adalah grup komutatif, maka untuk amannya kita asumsikan bahwa G **bukan grup komutatif**. Dengan demikian, untuk sebarang $\alpha, \beta \in G$ **tidak selalu berlaku** $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$.

Kembali ke 9 kemungkinan $\alpha \oplus \beta$ yang kita jabarkan di atas. Karena $\alpha \oplus \beta \in G$, maka jelas bahwa $\alpha \oplus \beta = \delta$ untuk suatu $\delta \in G$ kan?

Ambil contoh untuk poin nomor 5. Karena $x \oplus y \in G$, maka $x \oplus y = \delta$ untuk suatu $\delta \in G$. Karena $\delta \in G = \{e, x, y\}$, maka kemungkinannya bisa $x \oplus y = e$ atau $x \oplus y = x$ atau $x \oplus y = y$ kan?

Ingat ya! Operasi biner $\oplus$ itu tertutup dan terdefinisi dengan baik di G! Dengan demikian, untuk sebarang $\alpha, \beta \in G$ **hanya ada tepat satu** $\delta \in G$, sedemikian sehingga $\alpha \oplus \beta = \delta$.

Pertanyaannya,

> *Jadi, yang benar yang mana nih?*
> $x \oplus y = e$*?*
> *Atau* $x \oplus y = x$*?*
> *Atau* $x \oplus y = y$*?*

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan di atas, mari kita mengambil acuan ke **aksioma grup**.

Ingat! Salah satu aksioma grup menyebutkan bahwa **suatu grup pasti memuat tepat satu elemen identitas terhadap operasi binernya**. Ya, toh?

Dengan demikian, karena $G = \{e, x, y\}$, maka **tepat salah satu** dari e atau x atau y pasti adalah elemen identitas. Untuk memudahkan penyebutan, kita pilih e sebagai elemen identitas di G terhadap operasi biner $\oplus$.

Karena e adalah elemen identitas di G, maka menurut aksioma grup, kita akan memperoleh $g \oplus e = e \oplus g = g$ untuk setiap $g \in G$. Dengan demikian 9 poin yang kita jabarkan di atas akan menjadi seperti ini.

1. $e \oplus x = x$
2. $e \oplus y = y$
3. $e \oplus e = e$

4. $x \oplus x =$ belum diketahui
5. $x \oplus y =$ belum diketahui
6. $x \oplus e = x$

7. $y \oplus x =$ belum diketahui
8. $y \oplus y =$ belum diketahui
9. $y \oplus e = y$

Oke! Dari 9 poin di atas terlihat hanya 4 poin yang hasil operasinya masih mis-te-ri-us. Ayo, kita ungkap 4 poin tersebut! Kita mulai dari poin nomor 5 yang di bagian atas sudah didaulat sebagai contoh.

Sebagaimana yang sudah dipaparkan di atas, hasil $x \oplus y$ adalah salah satu dari e, x, atau y. Perhatikan! Jika kita menetapkan $x \oplus y = x$, maka akan menyebabkan $y = e$. **Ini tidak boleh terjadi** karena e, x, dan y adalah 3 elemen yang berbeda-beda toh?

Hal serupa juga kita dapatkan ketika menetapkan $x \oplus y = y$. Kita akan mendapatkan persamaan $x = e$. **Ini juga tidak boleh terjadi** karena e, x, dan y adalah 3 elemen yang berbeda-beda.

Nah, karena hasil $x \oplus y$ tidak boleh berupa x atau y, maka satu-satunya kemungkinan yang boleh adalah $x \oplus y = e$. Ini berarti, x dan y **saling invers**. Akibatnya, kita juga akan memperoleh $y \oplus x = e$. Dengan demikian 9 poin yang kita jabarkan di atas akan menjadi seperti ini.

1. $e \oplus x = x$
2. $e \oplus y = y$
3. $e \oplus e = e$

4. $x \oplus x =$ belum diketahui
5. $x \oplus y = e$
6. $x \oplus e = x$

7. $y \oplus x = e$

8. $y \oplus y =$ belum diketahui

9. $y \oplus e = y$

Oke! Tersisa 2 poin yang hasilnya masih misterius, yaitu poin 4 dan 8. Kita mulai dengan menyelidiki poin 4, yaitu $x \oplus x$.

Sebagaimana yang sudah-sudah, hasil $x \oplus x$ adalah salah satu dari e, x, atau y. Perhatikan! Jika kita menetapkan $x \oplus x = e$, maka akan menyebabkan invers dari x adalah dirinya sendiri (*self inverse*). **Ini tidak boleh terjadi** karena setiap elemen memiliki **invers yang tunggal**, sementara kita sudah memiliki y sebagai invers dari x.

Jika kita menetapkan $x \oplus x = x$, maka ini akan menyebabkan $x = e$ karena kita sudah menetapkan bahwa $x \oplus e = x$. **Ini juga tidak boleh terjadi** karena e, x, dan y adalah 3 elemen yang berbeda-beda.

Nah, karena hasil $x \oplus x$ tidak boleh berupa e atau x, maka satu-satunya kemungkinan yang boleh adalah $x \oplus x = y$. Dengan cara yang serupa kita akan mendapatkan $y \oplus y = x$. Dengan demikian 9 poin yang kita jabarkan di atas akan menjadi seperti ini.

1. $e \oplus x = x$

2. $e \oplus y = y$

3. $e \oplus e = e$

4. $x \oplus x = y$

5. $x \oplus y = e$

6. $x \oplus e = x$

7. $y \oplus x = e$

8. $y \oplus y = x$

9. $y \oplus e = y$

Nah, dengan demikian kita dapat menyimpulkan bahwa $(G, \oplus)$ merupakan grup dengan $G = \{e, x, y\}$ dan operasi $\oplus$ sebagaimana didefinisikan di atas.

***

Karena soal memerintahkan kita untuk membuat tabel Cayley, maka mari kita sajikan hasil operasi pada 9 poin di atas ke dalam tabel dengan 9 kotak inti seperti di bawah ini.

$\oplus$	**e**	**x**	**y**
e	e	x	y
x	x	y	e
y	y	e	x

$\oplus$	**e**	**x**	**y**
e	e	x	y
x	x	y	e
y	y	e	x

Kolom biru menandakan elemen yang berada di sisi kiri tanda operasi $\oplus$. Sementara baris hijau menandakan elemen yang berada di sisi kanan tanda operasi $\oplus$. Kotak bertanda panah merah adalah contoh hasil dari operasi $x \oplus y$ (sesuai poin nomor 5, $x \oplus y = e$).

∎

Pembahasan Soal Nomor 2 (a)

Soal
Tulis tiga teorema tentang subgrup!
Buktikan **SATU** dari ketiga teorema terebut! (pilih sendiri.)

Pembahasan
Ada banyak lho teorema yang berkaitan dengan subgrup. Beberapa teorema yang cukup populer adalah berikut.

Teorema Subgrup 1
Diketahui G adalah grup terhadap operasi biner $\star$.
Diketahui pula H adalah sebarang subgrup dari G.

Elemen identitas di H adalah elemen identitas di G.

Teorema Subgrup 2
Diketahui G adalah grup terhadap operasi biner $\star$.
Diketahui pula H adalah himpunan bagian dari G.

H merupakan subgrup dari G jika dan hanya jika untuk sebarang $h_1, h_2 \in H$ berlaku $h_1 \star h_2^{-1} \in H$.

Teorema Subgrup 3
Diketahui G adalah grup terhadap operasi biner $\star$.
Diketahui pula H adalah subgrup dari G.

Jika jumlah elemen di G adalah n dan jumlah elemen di H adalah m (dengan $n, m \in \{1, 2, 3, 4...\}$, maka $n = m \cdot r$ untuk suatu $r \in \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

• Pembuktian Teorema Subgrup 2

Untuk membuktikan teorema ini, kita harus membuktikan kebenaran dua pernyataan berikut.

1. Jika H merupakan subgrup dari G, maka untuk sebarang $h_1, h_2 \in H$ berlaku $h_1 \star h_2^{-1} \in H$.
2. Jika untuk sebarang $h_1, h_2 \in H$ berlaku $h_1 \star h_2^{-1} \in H$, maka H merupakan subgrup dari G.

•• Pembuktian Poin Nomor 1.

Diketahui H adalah subgrup dari G. Dengan demikian:

(i) Untuk sebarang $h_1, h_2 \in H$ akan berlaku $h_1 \star h_2 \in H$.

(ii) Untuk sebarang $h \in H$, terdapat $h^{-1} \in H$ sedemikian sehingga $h \star h^{-1} = h^{-1} \star h = e$.

Berdasarkan poin nomor (ii) di atas, jika kita mengambil sebarang $h_2 \in H$, maka kita dapat menemukan $h_2^{-1} \in H$ sedemikian sehingga $h_2 \star h_2^{-1} = h_2^{-1} \star h_2 = e$.

Berdasarkan poin nomor (i) di atas, untuk sebarang $h_1 \in H$ akan berlaku $h_1 \star h_2^{-1} \in H$.

Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa poin nomor 1 berlaku benar, yaitu jika H merupakan subgrup dari G, maka untuk sebarang $h_1, h_2 \in H$ berlaku $h_1 \star h_2^{-1} \in H$.

•• Pembuktian Poin Nomor 2.

Untuk membuktikan bahwa H adalah subgrup dari G, kita akan melakukan serangkaian pembuktian berikut secara berurutan.

(i) Membuktikan bahwa operasi $\star$ merupakan operasi biner, yaitu terdefinisi dengan baik sekaligus tertutup di H.

(ii) Jika Poin (i) terbukti benar, maka kita akan membuktikan bahwa operasi $\star$ bersifat asosiatif di H.

(iii) Jika Poin (ii) terbukti benar, maka kita akan membuktikan bahwa H memuat elemen identitas terhadap operasi $\star$.

(iv) Jika Poin (iii) terbukti benar, maka kita akan membuktikan bahwa setiap elemen di H memiliki invers terhadap operasi $\star$.

••• (i) Membuktikan bahwa operasi $\star$ merupakan operasi biner, yaitu terdefinisi dengan baik sekaligus tertutup di H.

Karena $(G, \star)$ merupakan grup, maka kita dapat menyimpulkan bahwa operasi $\star$ terdefinisi dengan baik di G. Karena H merupakan himpunan bagian dari G, maka kita dapat menyimpulkan bahwa operasi $\star$ juga terdefinisi dengan baik di H.

Ingat! Walaupun operasi $\star$ juga terdefinisi dengan baik di H, tidak ada jaminan bahwa operasi $\star$ ini tertutup di H. Dengan demikian, kita harus menunjukkan bahwa operasi $\star$ tertutup di H.

Kita akan menunjukkan bahwa operasi $\star$ tertutup di H dengan cara mengambil sebarang 2 elemen di H kemudian menunjukkan bahwa hasil operasi 2 elemen tersebut terhadap $\star$ juga termuat di H.

Oke, kita ambil sebarang $h_1, h_2 \in H$. Kita akan menunjukkan bahwa $h_1 \star h_2 \in H$.

Dari pernyataan, diketahui bahwa untuk sebarang $h_1, h_2 \in H$ akan berlaku $h_1 \star h_2^{-1} \in H$. Perhatikan! Karena h_1 dan h_2 berlaku untuk sebarang elemen di H, maka kita dapat menelaah kasus ketika $h_2 = h_1$. Dengan demikian, berdasarkan apa yang kita ketahui, diperoleh persamaan berikut.

$$h_1 \star h_2^{-1} = h_1 \star h_1^{-1} \in H.$$

Ingat! Karena H adalah himpunan bagian dari G, maka h_1 dan h_2 juga merupakan elemen di himpunan G. Karena $(G, \star)$ adalah grup, dengan demikian invers dari h_1 dan h_2 (yaitu h_1^{-1} dan h_2^{-1}) termuat di G. Oleh sebab itu, kita dapat menyatakan bahwa $h_1^{-1} \star h_1 = e$ dengan $e \in G$ adalah elemen identitas untuk operasi $\star$. Dengan demikian, persamaan di atas akan menjadi seperti ini.

$$h_1 \star h_2^{-1} = h_1 \star h_1^{-1} = e \in H$$

Dengan kata lain, himpunan H memuat elemen identitas.

Masih memanfaatkan $h_1, h_2 \in H$ yang kita pilih secara sebarang. Karena kita sudah mengetahui bahwa $e \in H$, maka untuk kasus ketika $h_1 = e$, kita akan memperoleh persamaan berikut.

$$h_1 \star h_2^{-1} = e \star h_2^{-1} = h_2^{-1} \in H.$$

Dengan kata lain, untuk sebarang $h_2 \in H$, akan berlaku invers dari h_2 juga termuat di himpunan H.

Fiuh....

Di awal, kita ingin menunjukkan bahwa untuk sebarang $h_1, h_2 \in H$ akan berlaku $h_1 \star h_2 \in H$. Eh, yang ada kita malah mendapatkan berbagai macam sifat yang sebetulnya akan dibuktikan setelah ini.

Oke! Mari kita ambil sebarang $h_1, h' \in H$. Ingat! Di bagian atas kita sudah menunjukkan bahwa H memuat setiap invers untuk elemen-elemennya. Dengan demikian H memuat invers untuk h'. Misalkan invers untuk h' kita sebut sebagai h''. Dengan demikian $h'' \in H$ serta $(h',\ h'')$ adalah pasangan invers (yang mana sesuai sifat grup, pasangan invers adalah tunggal).

Kemudian, berdasarkan pernyataan yang diketahui bahwa untuk sebarang $h_1, h_2 \in H$ akan berlaku $h_1 \star h_2^{-1} \in H$, maka ketika $h_2 = h'$ akan berlaku $h_1 \star h'' \in H$. Demikian pula, ketika $h_2 = h''$, maka akan berlaku $h_1 \star h' \in H$.

Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa untuk sebarang $h_1 \in H$ dan sebarang pasangan invers (h', h'') yang merupakan pasangan elemen di H, akan berlaku $h_1 \star h' \in H$ dan $h_1 \star h'' \in H$. Karena invers setiap himpunan H memuat semua invers atas elemen-elemennya, maka kita dapat menyatakan bahwa untuk sebarang $h_1, h_2 \in H$ akan berlaku $h_1 \star h_2 \in H$. Dengan kata lain, operasi $\star$ tertutup di H.

Mari lanjut membuktikan poin (ii).

••• (ii) Membuktikan bahwa operasi $\star$ bersifat asosiatif di H.

Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka operasi $\star$ bersifat asosiatif untuk semua elemen himpunan G.

Karena H adalah himpunan bagian dari G, maka semua elemen himpunan H juga merupakan elemen himpunan G.

Dengan demikian, otomatis operasi $\star$ juga bersifat asosiatif untuk semua elemen himpunan H.

Mari lanjut membuktikan poin (iii).

••• (iii) Membuktikan bahwa H memuat elemen identitas terhadap operasi $\star$.

Pada pembuktian poin (i) sudah dibuktikan bahwa H memuat elemen identitas terhadap operasi $\star$.

Mari lanjut membuktikan poin (iv).

••• (iv) Membuktikan bahwa setiap elemen di H memiliki invers terhadap operasi $\star$.

Pada pembuktian poin (i) sudah dibuktikan bahwa setiap elemen di H memiliki invers terhadap operasi $\star$.

***

Jadi, berdasarkan uraian panjang di atas, karena kita sudah membuktikan kebenaran empat aksioma berikut secara berurutan:

1. Membuktikan bahwa operasi $\star$ merupakan operasi biner, yaitu terdefinisi dengan baik sekaligus tertutup di H,
2. Membuktikan bahwa operasi $\star$ bersifat asosiatif di H,
3. Membuktikan bahwa H memuat elemen identitas terhadap operasi $\star$, dan
4. Membuktikan bahwa setiap elemen di H memiliki invers terhadap operasi $\star$.

maka kita dapat menyimpulkan bahwa jika untuk sebarang $h_1, h_2 \in H$ berlaku $h_1 \star h_2^{-1} \in H$, maka H merupakan subgrup dari G.

■

Pembahasan Soal Nomor 2 (b)

Soal
Perhatikan grup $\mathbb{Z}_{16}$.

i Tunjukkan $\mathbb{Z}_{16}$ siklik dan tulis semua elemen pembangunnya!

ii Tulis semua subgrup proper $\mathbb{Z}_{16}$!
Apakah subgrup-subgrup tersebut siklik? Apakah abelian? Berikan penjelasan!

Pembahasan
Tak kenal, maka tak sayang.
Mari kita kenalan dulu dengan $\mathbb{Z}_{16}$!

- $\mathbb{Z}_{16}$ memiliki 16 elemen, yaitu:
  $\mathbb{Z}_{16} = \{\bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3},\ \bar{4},\ \bar{5},\ \bar{6},\ \bar{7},\ \bar{8},\ \bar{9},\ \bar{10},\ \bar{11},\ \bar{12},\ \bar{13},\ \bar{14},\ \bar{15}\}$

  Alasan kita memberi tanda $^-$ pada elemen-elemen di $\mathbb{Z}_{16}$ adalah untuk memudahkan kita membedakan antara elemen di himpunan bilangan bulat dan elemen di $\mathbb{Z}_{16}$. Dengan demikian $\bar{3}$ adalah elemen di $\mathbb{Z}_{16}$, sementara 3 adalah bilangan bulat.

- $\mathbb{Z}_{16}$ adalah grup terhadap operasi penjumlahan modulo 16 (*sum of modulo* 16).
  Jika $\star$ menyatakan notasi operasi yang dimaksud, maka $\bar{a} \star \bar{b} = \bar{s}$, dengan $0 \leq s < 16$ dan memenuhi persamaan $(a + b) = 16r + s$ untuk suatu $r \in \mathbb{Z}^+$. (*catatan:* $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6...\}$)

  Contoh:

  - $\bar{8} \star \bar{13} = \bar{5}$ karena $(8 + 13) = 21 = 16 \cdot 1 + 5$.
  - $\bar{2} \star \bar{7} = \bar{9}$ karena $(2 + 7) = 9 = 16 \cdot 0 + 9$.
  - $\bar{1} \star \bar{15} = \bar{0}$ karena $(1 + 15) = 16 = 16 \cdot 1 + 0$.

- Elemen identitas di $\mathbb{Z}_{16}$ terhadap operasi penjumlahan modulo 16 adalah $\bar{0}$.

- Elemen invers di untuk suatu $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{16}$ dengan $\bar{a} \neq \bar{0}$ terhadap operasi penjumlahan modulo 16 adalah $\overline{(16 - a)}$.

***

• (i) Tunjukkan $\mathbb{Z}_{16}$ siklik dan tulis semua elemen pembangunnya!

Sebelumnya, untuk $z \in \mathbb{Z}_{16}$ kita definisikan $z^n = \underbrace{z \star z \star z \star z \star ... \star z}_{\text{sebanyak } n \text{ kali}}$

Kita juga akan menjabarkan beberapa sifat operasi jumlahan modulo 16 sebagaimana berikut.

- Untuk sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $\overline{(a + b)} = \bar{a} \star \bar{b}$.
- Untuk sebarang $n \in \mathbb{Z}^+$ dan $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{16}$ berlaku $\bar{a}^n = \overline{(a \cdot n)}$.
- Untuk sebarang $n \in \mathbb{Z}^+$ berlaku $\overline{(16 \cdot n)} = \bar{0}$.
- Untuk sebarang $a \in \mathbb{Z}$, maka a dapat dinyatakan sebagai $a = 16 \cdot r + s$ untuk suatu $r, s \in \mathbb{Z}$ dan $0 \leq s < 16$. Maka:
  $\bar{a} = \overline{(16 \cdot r + s)} = \overline{(16 \cdot r)} \star \bar{s} = \bar{0} + \bar{s} = \overline{(0 + s)} = \bar{s}$

Definisi Grup Siklik dan Elemen Pembangun
Diketahui $(G, \star)$ adalah grup. Grup G dikatakan sebagai grup siklik, jika terdapat $a \in G$ sedemikian sehingga untuk sebarang $g \in G$ akan berlaku $g = a^n$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}^+$. Elemen a tersebut dinamakan elemen pembangun G.

Nah, untuk menujukkan bahwa $\mathbb{Z}_{16}$ adalah grup siklik, kita harus menemukan elemen pembangun $\mathbb{Z}_{16}$, yaitu suatu elemen $a \in \mathbb{Z}_{16}$ sedemikian sehingga untuk sebarang $z \in \mathbb{Z}_{16}$ akan berlaku $z = a^n$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}^+$.

Untuk mudahnya, kita dapat memilih $a = \bar{1}$ sebagai elemen pembangun $\mathbb{Z}_{16}$. Perhatikan bahwa:

$\bar{0} = \bar{1}^0$
$\bar{1} = \bar{1}^1$
$\bar{2} = \bar{1}^2 = \bar{1} \star \bar{1} = \bar{2}$ karena $(1 + 1) = 2 = 16 \cdot 0 + 2$.
$\bar{3} = \bar{1}^3 = \bar{1}^2 \star \bar{1} = \bar{2} \star \bar{1} = \bar{3}$ karena $(2 + 1) = 3 = 16 \cdot 0 + 3$.
$\bar{4} = \bar{1}^4 = \bar{1}^3 \star \bar{1} = \bar{3} \star \bar{1} = \bar{4}$ karena $(3 + 1) = 4 = 16 \cdot 0 + 4$.

...dan seterusnya hingga...

$\bar{15} = \bar{1}^{15} = \bar{1}^{14} \star \bar{1} = \bar{14} \star \bar{1} = \bar{15}$ karena $(14 + 1) = 15 = 16 \cdot 0 + 15$.

Perhatikan juga. Selain $a = \bar{1}$, kita juga dapat memilih $a = \bar{9}$ sebagai elemen pembangun $\mathbb{Z}_{16}$, karena:

$\bar{0} = \bar{9}^0$
$\bar{1} = \bar{9}^9$ karena $(9 \cdot 9) = 81 = 16 \cdot 5 + 1$
$\bar{2} = \bar{9}^2$ karena $(9 \cdot 2) = 18 = 16 \cdot 1 + 2$
$\bar{3} = \bar{9}^{11}$ karena $(9 \cdot 11) = 99 = 16 \cdot 6 + 3$

$\bar{4} = \bar{9}^4$ karena $(9 \cdot 4) = 36 = 16 \cdot 2 + 4$
$\bar{5} = \bar{9}^{13}$ karena $(9 \cdot 13) = 117 = 16 \cdot 7 + 5$
$\bar{6} = \bar{9}^6$ karena $(9 \cdot 6) = 54 = 16 \cdot 3 + 6$
$\bar{7} = \bar{9}^{15}$ karena $(9 \cdot 15) = 135 = 16 \cdot 8 + 7$

$\bar{8} = \bar{9}^8$ karena $(9 \cdot 8) = 72 = 16 \cdot 4 + 8$
$\bar{9} = \bar{9}^1$ karena $(9 \cdot 1) = 9 = 16 \cdot 0 + 9$
$\bar{10} = \bar{9}^{10}$ karena $(9 \cdot 10) = 90 = 16 \cdot 5 + 10$
$\bar{11} = \bar{9}^3$ karena $(9 \cdot 3) = 27 = 16 \cdot 1 + 11$

$\bar{12} = \bar{9}^{12}$ karena $(9 \cdot 12) = 108 = 16 \cdot 6 + 12$
$\bar{13} = \bar{9}^5$ karena $(9 \cdot 5) = 45 = 16 \cdot 2 + 13$
$\bar{14} = \bar{9}^{14}$ karena $(9 \cdot 14) = 126 = 16 \cdot 7 + 14$
$\bar{15} = \bar{9}^7$ karena $(9 \cdot 7) = 63 = 16 \cdot 3 + 15$

Nah, pertanyannya,

Apakah ada elemen pembangun lain untuk $\mathbb{Z}_{16}$ selain $\bar{1}$ dan $\bar{9}$?

Jawaban dari pertanyaan di atas adalah **ada!**
Grup $\mathbb{Z}_{16}$ memiliki elemen pembangun lain selain $\bar{1}$ dan $\bar{9}$.

Elemen pembangun $\mathbb{Z}_{16}$ adalah $\bar{1}$, $\bar{3}$, $\bar{5}$, $\bar{7}$, $\bar{9}$,$\bar{11}$,$\bar{13}$, dan $\bar{15}$.

Lebih tepatnya, elemen pembangun di $\mathbb{Z}_{16}$ adalah $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{16}$, dengan a dan 16 saling **relatif prima**.
Bilangan bulat a dan b dikatakan saling relatif prima jika dan hanya jika tidak terdapat bilangan bulat c dengan $0 < c < \min(a, b)$ sedemikian sehingga a atau b merupakan kelipatan dari c. Contoh:

- Bilangan 16 dan 15 saling relatif prima.
  Sebabnya, tidak terdapat bilangan bulat c dengan $0 < c < 15$ $(\min(15, 16) = 15)$ sedemikian sehingga 16 dan 15 merupakan kelipatan dari c.
- Bilangan 16 dan 10 tidak saling relatif prima.
  Sebabnya, terdapat bilangan bulat $c = 2$ dengan $0 < c < 10$ $(\min(10, 16) = 10)$ sedemikian sehingga 16 dan 10 merupakan kelipatan dari 2.

- **(ii) Tulis semua subgrup proper $\mathbb{Z}_{16}$!**
  Apakah subgrup-subgrup tersebut siklik? Apakah abelian? Berikan penjelasan!

Berdasarkan pengerjaan **poin (i)**, kita mengetahui bahwa $\bar{1}$, $\bar{3}$, $\bar{5}$, $\bar{7}$, $\bar{9}$,$\bar{1}1$,$\bar{1}3$, dan $\bar{1}5$ merupakan elemen pembangun $\mathbb{Z}_{16}$. Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa elemen-elemen selain itu, yaitu $\bar{0}$, $\bar{2}$, $\bar{4}$, $\bar{6}$, $\bar{8}$, $\bar{1}0$, $\bar{1}2$, dan $\bar{1}4$ bukan merupakan elemen pembangun $\mathbb{Z}_{16}$.

Sebetulnya, jika kita mengambil sebarang $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{16}$ kemudian membentuk himpunan H_a dengan definisi:
$H_a = \{\bar{a}^0, \bar{a}^1, \bar{a}^2, \bar{a}^3, \bar{a}^4, \bar{a}^5, ...\}$

maka H_a akan menjadi suatu subgrup dari $\mathbb{Z}_{16}$. Kita menamakan H_a sebagai subgrup dari $\mathbb{Z}_{16}$ yang dibangun oleh elemen $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{16}$.

Berdasarkan pengerjaan **poin (i)**, kita mengetahui bahwa $H_1 = \{\bar{1}^0, \bar{1}^1, \bar{1}^2, \bar{1}^3, ...\}$ dan $H_9 = \{\bar{9}^0, \bar{9}^9, \bar{9}^2, \bar{9}^3, ...\}$ akan ekuivalen dengan $\mathbb{Z}_{16}$ itu sendiri. Demikian pula dengan H_3, H_5, H_7, H_9, H_{11}, H_{13}, dan H_{15} juga akan ekuivalen dengan $\mathbb{Z}_{16}$.

Pertanyaannya,

Bagaimanakah wujud H_a jika $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{16}$ bukan merupakan elemen pembangun $\mathbb{Z}_{16}$?

Mari kita mulai dengan menyelidiki contoh. Ambil elemen $\bar{1}0 \in \mathbb{Z}_{16}$. Kita tahu bahwa $\bar{1}0$ bukan elemen pembangun $\mathbb{Z}_{16}$ karena 10 dan 16 adalah kelipatan dari 2. Perhatikan bahwa $10 \cdot 8 = 16 \cdot 5$. Dengan demikian, kita akan memperoleh $\bar{1}0^8 = \bar{0}$. Mari kita lihat penjabaran $\bar{1}0^n$ berikut.

$\bar{1}0^0 = \overline{(10 \cdot 0)} = \bar{0}$
$\bar{1}0^1 = \overline{(10 \cdot 1)} = \bar{1}0$
$\bar{1}0^2 = \overline{(10 \cdot 2)} = \bar{2}0 = \overline{(16 \cdot 1 + 4)} = \overline{(16 \cdot 1)} \star \bar{4} = \bar{0} \star \bar{4} = \overline{(0 + 4)} = \bar{4}$
$\bar{1}0^3 = \overline{(10 \cdot 3)} = \bar{3}0 = \overline{(16 \cdot 1 + 14)} = \overline{(16 \cdot 1)} \star \bar{1}4 = \bar{0} \star \bar{1}4 = \overline{(0 + 14)} = \bar{1}4$

$\bar{1}0^4 = \overline{(10 \cdot 4)} = \bar{4}0 = \overline{(16 \cdot 2 + 8)} = \overline{(16 \cdot 2)} \star \bar{8} = \bar{0} \star \bar{8} = \overline{(0 + 8)} = \bar{8}$
$\bar{1}0^5 = \overline{(10 \cdot 5)} = \bar{5}0 = \overline{(16 \cdot 3 + 2)} = \overline{(16 \cdot 3)} \star \bar{2} = \bar{0} \star \bar{2} = \overline{(0 + 2)} = \bar{2}$
$\bar{1}0^6 = \overline{(10 \cdot 6)} = \bar{6}0 = \overline{(16 \cdot 3 + 12)} = \overline{(16 \cdot 3)} \star \bar{1}2 = \bar{0} \star \bar{1}2 = \overline{(0 + 12)} = \bar{1}2$
$\bar{1}0^7 = \overline{(10 \cdot 7)} = \bar{7}0 = \overline{(16 \cdot 4 + 12)} = \overline{(16 \cdot 4)} \star \bar{6} = \bar{0} \star \bar{6} = \overline{(0 + 6)} = \bar{6}$

...kemudian...

$\bar{1}0^8 = \overline{(10 \cdot 8)} = \bar{8}0 = \overline{(16 \cdot 5 + 0)} = \overline{(16 \cdot 5)} \star \bar{0} = \bar{0} \star \bar{0} = \overline{(0 + 0)} = \bar{0}$
$\bar{1}0^9 = \overline{(10 \cdot 9)} = \bar{9}0 = \overline{(80 + 10)} = \bar{8}0 \star \bar{1}0 = \bar{0} \star \bar{1}0 = \overline{(0 + 10)} = \bar{1}0$
$\bar{1}0^10 = \overline{(10 \cdot 10)} = \bar{1}00 = \overline{(80 + 20)} = \bar{8}0 \star \bar{2}0 = \bar{0} \star \bar{4} = \overline{(0 + 4)} = \bar{4}$

...dan seterusnya...

Dari penjabaran di atas kita dapat membuat H_{10}:

$H_{10} = \{\bar{1}0^0, \bar{1}0^1, \bar{1}0^2, \bar{1}0^3, \bar{1}0^4, \bar{1}0^5, \bar{1}0^6, \bar{1}0^7\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{1}0, \bar{1}2, \bar{1}4\}$.

Definisi Subgrup Proper
Diketahui G dan H adalah grup terhadap operasi biner yang sama.
Grup H disebut sebagai subgrup proper dari G jika dan hanya jika $H \subset G$ dan $H \neq G$.
Grup H disebut sebagai subgrup non-proper dari G jika dan hanya jika $H = G$.

Berdasarkan definisi di atas, H_{10} adalah subgrup proper dari $\mathbb{Z}_{16}$.

Pertanyaannya,

Apakah ada subgrup proper lain di $\mathbb{Z}_{16}$ selain H_{10}?

Jawaban dari pertanyaan di atas adalah **ada!**

Perhatikan bahwa 16 dapat kita faktorkan menjadi $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$.
Perhatikan bahwa 2, $4 = (2 \cdot 2)$, dan $8 = (2 \cdot 2 \cdot 2)$ merupakan kelipatan dari 16. Dengan demikian kita dapat membentuk H_2, H_4, dan H_8 sebagai subgrup proper dari $\mathbb{Z}_{16}$. Mari kita bentuk H_4 dan H_8.

$H_4 = \{\bar{4}^0, \bar{4}^1, \bar{4}^2, \bar{4}^3\} = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{1}2\}$.

$H_8 = \{\bar{8}^0, \bar{8}^1\} = \{\bar{0}, \bar{8}\}$.

Bagaimanakah dengan H_2?

Perhatikan bahwa 10 dan 2 tidak saling relatif prima karena merupakan bilangan bulat kelipatan 2. Dengan demikian H_2 akan ekuivalen dengan H_{10}. Dengan demikian,

$$H_2 = H_{10} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}\}.$$

Jadi, H_2, H_4, dan H_8 adalah subgrup proper dari $\mathbb{Z}_{16}$. Eh, terkadang ada juga yang menyertakan subgrup trivial $H_0 = \{\bar{0}\}$ sebagai subgrup proper.

***

Selanjutnya, mari kita menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut.

Apakah subgrup-subgrup dari $\mathbb{Z}_{16}$ siklik?

Jawabannya adalah **ya!** Semua subgrup-subgrup dari $\mathbb{Z}_{16}$ siklik, yaitu memiliki elemen pembangun.

- $\mathbb{Z}_{16}$ adalah subgrup non-proper dan non-trivial dari $\mathbb{Z}_{16}$ dengan (salah satu) elemen pembangunnya adalah $\bar{1}$.
- $H_0 = \{\bar{0}\}$ adalah subgrup proper dan trivial dari $\mathbb{Z}_{16}$ dengan (salah satu) elemen pembangunnya adalah $\bar{0}$.
- $H_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}\}$ adalah subgrup proper dan non-trivial dari $\mathbb{Z}_{16}$ dengan (salah satu) elemen pembangunnya adalah $\bar{2}$.
- $H_4 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{12}\}$ adalah subgrup proper dan non-trivial dari $\mathbb{Z}_{16}$ dengan (salah satu) elemen pembangunnya adalah $\bar{4}$.
- $H_8 = \{\bar{0}, \bar{8}\}$ adalah subgrup proper dan non-trivial dari $\mathbb{Z}_{16}$ dengan elemen pembangunnya adalah $\bar{8}$.

Apakah subgrup-subgrup dari $\mathbb{Z}_{16}$ adalah grup abelian?

Jawabannya adalah **ya!** Semua subgrup-subgrup dari $\mathbb{Z}_{16}$ adalah grup abelian, yaitu operasi $\star$ bersifat komutatif. Grup $\mathbb{Z}_{16}$ sendiri adalah grup abelian.

Kenapa bisa begitu?

Kita tahu bahwa $\mathbb{Z}_{16}$ adalah grup siklik. Dengan demikian $\mathbb{Z}_{16}$ memiliki elemen pembangun. Sebut saja $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{16}$ adalah elemen pembangun $\mathbb{Z}_{16}$.

Selanjutnya, kita ambil sebarang $x \in \mathbb{Z}_{16}$, maka kita dapat menyatakan x sebagai $x = \bar{a}^n$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}^+$. Demikian pula jika kita ambil lagi sebarang $y \in \mathbb{Z}_{16}$, maka kita dapat menyatakan y sebagai $y = \bar{a}^m$ untuk suatu $m \in \mathbb{Z}^+$.

Selanjutnya, kita akan mengoperasikan x dan y dengan operasi $\star$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
x \star y &= \bar{a}^n \star \bar{a}^m \\
&= \overline{(a \cdot n)} \star \overline{(a \cdot m)} \\
&= \overline{((a \cdot n) + (a \cdot m))} \\
&= \overline{a \cdot (n + m)} \\
&= \overline{a \cdot (m + n)} \\
&= \overline{((a \cdot m) + (a \cdot n))} \\
&= \overline{(a \cdot m)} \star \overline{(a \cdot n)} \\
&= \bar{a}^m \star \bar{a}^n \\
&= y \star x
\end{aligned}$$

Karena untuk sebarang $x, y \in \mathbb{Z}_{16}$ berlaku $x \star y = y \star x$, maka akan berlaku bahwa $\mathbb{Z}_{16}$ adalah grup komutatif atau grup abelian.

■

Pembahasan Soal Nomor 3

Soal
Diberikan grup abelian G dan H, K subgrup G.
Tunjukkan bahwa himpunan $\{hk \mid h \in H \text{ dan } k \in K\}$ adalah subgrup G juga!

Pembahasan
Mari kita perjelas apa-apa yang diketahui pada soal.

Diketahui G merupakan grup. Dengan demikian kita bisa menyatakan bahwa G merupakan grup terhadap suatu operasi biner. Mari kita notasikan operasi biner tersebut sebagai $\star$.

Diketahui pula H dan K adalah subgrup dari G. Dengan demikian $H \subseteq G$ dan $K \subseteq G$. Dengan demikian pula H dan K adalah grup terhadap operasi biner $\star$ yang sama pada G.

Jadi, $(G, \star)$, $(H, \star)$, dan $(K, \star)$ adalah grup.

Kemudian diketahui bahwa G merupakan grup abelian. Artinya, operasi $\star$ bersifat komutatif di G. Dengan demikian, untuk sebarang $g_1, g_2 \in G$ akan berlaku $g_1 \star g_2 = g_2 \star g_1$.

Karena H dan K adalah himpunan bagian dari G, maka setiap elemen di H dan K juga merupakan elemen di G. Akibatnya, sifat komutatif $\star$ di grup G juga akan berlaku di grup H dan grup K.

Dengan demikian untuk sebarang $h_1, h_2 \in H$ akan berlaku $h_1 \star h_2 = h_2 \star h_1$.
Dengan demikian untuk sebarang $k_1, k_2 \in K$ akan berlaku $k_1 \star k_2 = k_2 \star k_1$.

Jadi, $(G, \star)$, $(H, \star)$, dan $(K, \star)$ adalah grup-grup abelian.

***

Berdasarkan grup H dan K, dibentuk suatu himpunan J dengan definisi sebagai berikut.

$$J = \{h \star k \mid h \in H \text{ dan } k \in K\}$$

Nah, soal memerintahkan kita untuk membuktikan bahwa $(J, \star)$ adalah grup.
Lebih, tepatnya membuktikan bahwa $(J, \star)$ adalah subgrup dari G.

Untuk membuktikan bahwa $(J, \star)$ adalah grup, kita akan melakukan serangkaian pembuktian berikut secara berurutan.

1. Membuktikan bahwa J merupakan himpunan bagian dari G.
2. Jika Poin (1) terbukti benar, maka kita akan membuktikan bahwa operasi $\star$ merupakan operasi biner, yaitu terdefinisi dengan baik sekaligus tertutup di J.
3. Jika Poin (2) terbukti benar, maka kita akan membuktikan bahwa operasi $\star$ bersifat asosiatif.
4. Jika Poin (3) terbukti benar, maka kita akan membuktikan bahwa J memuat elemen identitas terhadap operasi $\star$.
5. Jika Poin (4) terbukti benar, maka kita akan membuktikan bahwa setiap elemen di J memiliki invers terhadap operasi $\star$.

Oke! Mari kita mulai pembuktian!

***

• (1) Membuktikan bahwa J merupakan himpunan bagian dari G.

Mari, kita ambil sebarang $x \in J$. Cara untuk membuktikan bahwa J merupakan himpunan bagian dari G adalah dengan menunjukkan bahwa $x \in G$.

Berdasarkan definisi himpunan J, kita dapat menyatakan x sebagai $x = h_1 \star k_1$ untuk suatu $h_1 \in H$ dan $k_1 \in K$. Karena H adalah subgrup dari G, maka elemen-elemen di H juga merupakan elemen-elemen di G, termasuk h_1. Demikian pula, karena K adalah subgrup dari G, maka elemen-elemen di K juga merupakan elemen-elemen di G, termasuk k_1. Dengan kata lain, kita akan memperoleh $h_1 \in G$ dan $k_1 \in G$.

Kemudian, karena $(G, \star)$ adalah grup maka jelas operasi $\star$ tertutup di G. Dengan demikian, karena $h_1 \in G$ dan $k_1 \in G$, maka kita bisa menyimpulkan bahwa $h_1 \star k_1 \in G$. Dengan kata lain, $x \in G$.

Dengan demikian, terbukti bahwa J merupakan himpunan bagian dari G.

Mari lanjut membuktikan poin 2.

• (2) Membuktikan bahwa operasi $\star$ merupakan operasi biner, yaitu terdefinisi dengan baik sekaligus tertutup di J.

Karena $(G, \star)$ merupakan grup, maka kita dapat menyimpulkan bahwa operasi $\star$ terdefinisi dengan baik di G. Karena J merupakan himpunan bagian dari G, maka kita dapat menyimpulkan bahwa operasi $\star$ juga terdefinisi dengan baik di J.

Ingat! Walaupun operasi $\star$ juga terdefinisi dengan baik di J, tidak ada jaminan bahwa operasi $\star$ ini tertutup di J. Dengan demikian, kita harus menunjukkan bahwa operasi $\star$ tertutup di J.

Kita akan menunjukkan bahwa operasi $\star$ tertutup di J dengan cara mengambil sebarang 2 elemen di J kemudian menunjukkan bahwa hasil operasi 2 elemen tersebut terhadap $\star$ juga termuat di J.

Oke, kita ambil sebarang $x, y \in J$. Berdasarkan definisi himpunan J, kita dapat menyatakan x dan y sebagai $x = h_1 \star k_1$ dan $y = h_2 \star k_2$ untuk suatu $h_1, h_2 \in H$ dan $k_1, k_2 \in K$.

Kemudian, kita operasikan x dengan y terhadap operasi $\star$ sebagai berikut.

$$x \star y$$

Karena $x = h_1 \star k_1$ dan $y = h_2 \star k_2$, maka:

$$x \star y = (h_1 \star k_1) \star (h_2 \star k_2)$$

Karena H dan K adalah himpunan bagian dari G, maka h_1, h_2, k_1, k_2 juga merupakan elemen-elemen di G. Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka sifat asosiatif operasi $\star$ juga berlaku pada keempat elemen tersebut. Dengan demikian kita dapat "memindah" tanda kurung pada persamaan di atas menjadi seperti di bawah.

$$(h_1 \star k_1) \star (h_2 \star k_2) = h_1 \star (k_1 \star h_2) \star k_2$$

Karena H dan K adalah subgrup dari grup G yang abelian, maka akan berlaku $k_1 \star h_2 = h_2 \star k_1$. Dengan demikian persamaan di atas akan menjadi seperti ini.

$$h_1 \star (k_1 \star h_2) \star k_2 = h_1 \star (h_2 \star k_1) \star k_2$$

Selanjutnya, kita gunakan lagi sifat asosiatif operasi $\star$ untuk "memindah" tanda kurung pada persamaan di atas menjadi seperti di bawah.

$$h_1 \star (h_2 \star k_1) \star k_2 = (h_1 \star h_2) \star (k_1 \star k_2)$$

Karena $h_1, h_2 \in H$ dan $(H, \star)$ adalah grup, maka terdapat $h_3 \in H$ sedemikian sehingga $h_1 \star h_2 = h_3$. Demikian pula, karena $k_1, k_2 \in H$ dan $(K, \star)$ adalah grup, maka terdapat $k_3 \in K$ sedemikian sehingga $k_1 \star k_2 = k_3$. Dengan demikian, persamaan di atas akan menjadi seperti di bawah ini.

$$(h_1 \star h_2) \star (k_1 \star k_2) = h_3 \star k_3$$

Merujuk ke beberapa baris di atas, pada akhirnya kita akan mendapatkan persamaan berikut.

$$x \star y = h_3 \star k_3, \qquad \text{untuk suatu } h_3 \in H \text{ dan } k_3 \in K.$$

Dengan kata lain, $x \star y \in J$.

Karena hasil operasi $\star$ untuk sebarang 2 elemen di J tetap merupakan elemen di J, maka terbukti bahwa operasi $\star$ tertutup di J.

Mari lanjut membuktikan poin 3.

• (3) Membuktikan bahwa operasi $\star$ bersifat asosiatif di J.

Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka operasi $\star$ bersifat asosiatif untuk semua elemen himpunan G.

Karena H dan K adalah himpunan bagian dari G, maka semua elemen himpunan H dan K juga merupakan elemen himpunan G.

Dengan demikian, otomatis operasi $\star$ juga bersifat asosiatif untuk semua elemen himpunan H dan K.

Mari lanjut membuktikan poin 4.

• (4) Membuktikan bahwa J memuat elemen identitas terhadap operasi $\star$.

Diketahui $(G, \star)$ adalah grup. Diketahui pula H dan K adalah subgrup dari G. Selanjutnya, perhatikan sifat berikut.

Sifat Elemen Identitas di Subgrup
Diketahui G adalah grup dan H adalah subgrup dari G.

Elemen identitas di G juga merupakan elemen identitas di H.

Berdasarkan sifat di atas, jika e merupakan elemen identitas di G, maka e juga merupakan elemen identitas di H dan K. Dengan kata lain, e termuat di H dan K ($e \in H$ dan $e \in K$).

Perhatikan, bahwa kita dapat membentuk persamaan berikut.

$$e = \underset{\in H}{e} \star \underset{\in K}{e} \in J$$

Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa $e \in J$.

Pertanyaannya,

Apakah e juga merupakan elemen identitas di J?

Mari kita ambil sebarang $x \in J$. Berdasarkan definisi himpunan J, kita dapat menyatakan x sebagai $x = h_1 \star k_1$ untuk suatu $h_1 \in H$ dan $k_1 \in K$.

Selanjutnya, kita akan menyelidiki hasil dari $e \star x$ dan $x \star e$.

Untuk $e \star x$, kita dapat menyatakan operasi tersebut dengan persamaan berikut.

$$e \star x = e \star (h_1 \star k_1)$$

Karena e, h_1, dan k_1 merupakan elemen-elemen himpunan G, maka kita dapat mengguanakan sifat asosiatif operasi $\star$ untuk "memindah" tanda kurung pada persamaan di atas menjadi seperti berikut.

$$e \star (h_1 \star k_1) = (e \star h_1) \star k_1.$$

Karena e juga merupakan elemen identitas di H, maka kita akan memperoleh $e \star h_1 = h_1$. Dengan demikian, persamaan di atas akan menjadi seperti di bawah ini.

$$(e \star h_1) \star k_1 = h_1 \star k_1 = x$$

Berdasarkan penjabaran di atas, kita mendapatkan persamaan $e \star x = x$. Dengan langkah-langkah yang serupa untuk $x \star e$, kita akan mendapatkan persamaan $x \star e = x$.

Dengan demikian, karena $e \in J$ dan untuk sebarang $x \in J$ berlaku $x \star e = e \star x = x$, maka kita dapat menyimpulkan bahwa J memuat elemen identitas, yaitu e yang juga merupakan elemen identitas di grup G, subgrup H, dan subgrup K.

Mari lanjut membuktikan poin terakhir.

• (5) Membuktikan bahwa setiap elemen di J memiliki invers terhadap operasi $\star$.

Untuk membuktikan bahwa setiap elemen di J memiliki invers terhadap operasi $\star$ adalah dengan cara menunjukkan bahwa untuk sebarang $x \in J$ terdapat $y \in J$ sedemikian sehingga berlaku $x \star y = y \star x = e$.

Mari kita ambil sebarang $x \in J$. Berdasarkan definisi himpunan J, kita dapat menyatakan x sebagai $x = h_1 \star k_1$ untuk suatu $h_1 \in H$ dan $k_1 \in K$.

Karena H adalah grup, maka h_1 memiliki invers, yaitu $h_1^{-1} \in H$.
Karena K adalah grup, maka k_1 memiliki invers, yaitu $k_1^{-1} \in K$.

Berdasarkan definisi himpunan J, jika kita bentuk $y = h_1^{-1} \star k_1^{-1}$, maka kita akan memperoleh $y \in J$. Selanjutnya, kita akan menunjukkan bahwa y ini merupakan invers dari x. Perhatikan bahwa:

$$x \star y = (h_1 \star k_1) \star (h_1^{-1} \star k_1^{-1})$$

Karena H dan K adalah himpunan bagian dari G, maka h_1, h_1^{-1}, k_1, k_1^{-1} juga merupakan elemen-elemen di G. Karena $(G, \star)$ adalah grup, maka sifat asosiatif operasi $\star$ juga berlaku pada keempat elemen tersebut. Dengan demikian kita dapat "memindah" tanda kurung pada persamaan di atas menjadi seperti di bawah.

$$(h_1 \star k_1) \star (h_1^{-1} \star k_1^{-1}) = h_1 \star (k_1 \star h_1^{-1}) \star k_1^{-1}$$

Karena H dan K adalah subgrup dari grup G yang abelian, maka akan berlaku $k_1 \star h_1^{-1} = h_1^{-1} \star k_1$. Dengan demikian persamaan di atas akan menjadi seperti ini.

$$h_1 \star (k_1 \star h_1^{-1}) \star k_1^{-1} = h_1 \star (h_1^{-1} \star k_1) \star k_1^{-1}$$

Selanjutnya, kita gunakan lagi sifat asosiatif operasi $\star$ untuk "memindah" tanda kurung pada persamaan di atas menjadi seperti di bawah.

$$h_1 \star (h_1^{-1} \star k_1) \star k_1^{-1} = (h_1 \star h_1^{-1}) \star (k_1 \star k_1^{-1})$$

Karena $h_1 \star h_1^{-1} = k_1 \star k_1^{-1} = e$, maka kita akan mendapatkan persamaan berikut.

$$(h_1 \star h_1^{-1}) \star (k_1 \star k_1^{-1}) = e \star e = e$$

Berdasarkan uraian di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa $x \star y = e$. Dengan langkah-langkah yang serupa, kita dapat juga menyimpulkan bahwa $y \star x = e$.

Dengan demikian, karena untuk sebarang $x \in J$ terdapat $y \in J$ sedemikian sehingga berlaku $x \star y = y \star x = e$, maka kita dapat menyimpulkan bahwa setiap elemen di J memiliki invers terhadap operasi $\star$.

***

Jadi, berdasarkan uraian panjang di atas, karena kita sudah membuktikan kebenaran empat aksioma berikut secara berurutan:

1. Himpunan J merupakan himpunan bagian dari G,
2. Operasi $\star$ merupakan operasi biner, yaitu terdefinisi dengan baik sekaligus tertutup di J,
3. Operasi $\star$ bersifat asosiatif,
4. Himpunan J memuat elemen identitas terhadap operasi $\star$, dan
5. Setiap elemen di J memiliki invers terhadap operasi $\star$

maka kita dapat menyimpulkan bahwa $(J, \star)$ adalah grup dengan $J = \{h \star k \mid h \in H \text{ dan } k \in K\}$.

■