Halo!

Kali ini aku mau membahas soal ujian tengah semester (UTS) mata kuliah **Pengantar Struktur Aljabar I** di Prodi Matematika FMIPA UGM pada tahun akademik 2014/2015. Dosen pengampunya adalah Bu Sri Wahyuni.

CATATAN:
Aku menerangkan ini pakai bahasa yang nonformal ya? Biar enak aja. Tapi kalau ujian jangan sekali-kali pakai bahasa nonformal. Nanti dimarahin bapak dan ibu dosen, hehehe. :D

SOAL

Jika $(G,*)$ merupakan grup, tunjukkan bahwa himpunan

$C(G)=\{x \in G|\ \forall g \in G,\ \ x*g=g*x\}$

membentuk subgrup di dalam *G*!

PEMBAHASAN

Himpunan $C(G)$ yang didefinisikan seperti di atas itu disebut sebagai *center*-nya *G*. Kita akan buktikan bahwa *center*-nya *G* ini adalah subgrup di dalam *G*.

Pertama-tama, kita harus pahami dulu bahwa $C(G) \subseteq G$. Artinya operasi biner $*$ pada *G* juga berlaku pada $C(G)$. Dengan demikian operasi biner $*$ ini terdefinisi dengan baik di $C(G)$.

Tapi ini belum membuktikan bahwa operasi biner $*$ tertutup di $C(G)$ lho!

Ambil sebarang dua elemen di $C(G)$. Misalkan $a,b \in C(G)$.

Karena $a \in C(G)$, maka $a*g=g*a$ untuk setiap $g \in G$.

Demikian pula, karena $b \in C(G)$, maka $b*g=g*b$ untuk setiap $g \in G$.

Apakah $a * b \in C(G)$ juga? Mari kita selidiki! ☺

Karena:

1. $a, b \in C(G) \subseteq G$
2. G grup terhadap $*$ $\Rightarrow$ $*$ bersifat asosiatif di G

maka untuk setiap $g \in G$, berlaku:

$(a * b) * g = a * (b * g)$

Karena $b * g = g * b$ untuk setiap $g \in G$, maka:

$(a * b) * g = a * (g * b)$

Menggunakan sifat operasi biner $*$ pada G yang asosiatif, diperoleh:

$a * (g * b) = (a * g) * b$

Karena $a * g = g * a$ untuk setiap $g \in G$, maka:

$(a * g) * b = (g * a) * b$

Sekali lagi, menggunakan sifat operasi biner $*$ pada G yang asosiatif, diperoleh:

$(g * a) * b = g * (a * b)$

Jadi, untuk setiap $g \in G$ berlaku $(a * b) * g = g * (a * b)$.

Kesimpulannya $a * b \in C(G)$.

Jadi, operasi biner $*$ tertutup di $C(G)$.

$\therefore$ Jadi, operasi biner $*$ terdefinisi dengan baik dan tertutup di $C(G)$.

Selanjutnya adalah langkah utama membuktikan bahwa $C(G)$ merupakan subgrup.

Karena:

1. $\forall a,b \in C(G) \Rightarrow a,b \in G$
2. G grup terhadap $*$ $\Rightarrow$ $*$ bersifat asosiatif di G

Dengan demikian operasi biner $*$ juga bersifat asosiatif di $C(G)$.

Sesuai definisi elemen identitas *e* bahwa $\exists e \in G$, $\forall g \in G \;\; e * g = g * e = g$

Maka dengan demikian $e \in C(G)$. ***#poin.1***

Ambil sebarang $a \in C(G)$. ***#poin.2***

Karena $a \in C(G)$, maka $a * g = g * a$ untuk setiap $g \in G$.

Jangan lupa! Karena $C(G) \subseteq G$ maka *a* juga elemen di *G*.

Jangan lupa juga! Karena $(G,*)$ merupakan grup, maka terdapat elemen $a^{-1} \in G$ sehingga berlaku $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Dari ***#poin.1*** diketahui bahwa $e \in C(G)$.

Karena $e = a * a^{-1}$ maka berlaku juga $a * a^{-1} \in C(G)$

Karena $a * a^{-1} \in C(G)$, maka untuk setiap $g \in G$ berlaku:

$g * (a * a^{-1}) = (a * a^{-1}) * g$

Jangan lupa! Karena $a \in C(G)$, maka $a * g = g * a$ untuk setiap $g \in G$.

Dengan demikian diperoleh

$g * (a * a^{-1}) = a * g * a^{-1}$

Atau dengan kata lain

$a * g * a^{-1} = a * a^{-1} * g$

Menggunakan sifat asosiatif operasi biner $*$ untuk memberi tanda kurung

$a * \left(g * a^{-1}\right) = a * \left(a^{-1} * g\right)$

Menggunakan sifat kanselasi pada *G* diperoleh

$g * a^{-1} = a^{-1} * g$

Bila dirunut kembali ke poin ***#poin.2*** maka untuk sebarang $a \in C(G)$ berlaku $g * a^{-1} = a^{-1} * g$ untuk setiap $g \in G$.

Ini artinya, untuk sebarang $a \in C(G)$ berlaku $a^{-1} \in C(G)$.

$\therefore$ Jadi, terbukti bahwa $C(G)$ merupakan subgrup di dalam *G*.

Eh, kalau ada salah di pembahasan soal ini tolong dikoreksi sendiri ya! Hehehe. ☺