Halo!

Kali ini aku mau membahas soal ujian tengah semester (UTS) mata kuliah **Pengantar Struktur Aljabar I** di Prodi Matematika FMIPA UGM pada tahun akademik 2014/2015. Dosen pengampunya adalah Bu Sri Wahyuni.

CATATAN:
Aku menerangkan ini pakai bahasa yang nonformal ya? Biar enak aja. Tapi kalau ujian jangan sekali-kali pakai bahasa nonformal. Nanti dimarahin bapak dan ibu dosen, hehehe. :D

SOAL

Tunjukkan bahwa himpunan matriks sebagai berikut:

$$V=\left\{A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$$

Membentuk grup terhadap perkalian matriks!

Selanjutnya buatlah diagram Cayley-nya!

PEMBAHASAN

Kita akan menyelidiki apakah V merupakan grup terhadap perkalian matriks.

Sesuai definisi anggota bisa kita amati bahwa V merupakan himpunan matriks berukuran 2×2 sehingga dengan demikian perkalian antar matriksnya dapat didefinisikan sebagai perkalian matriks berukuran 2×2 sebagaimana umumnya:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+bz & ay+bw\\ cx+dz & cy+dw\end{pmatrix}$$

Perhatikan juga bahwa keempat matriks pada himpunan V tersebut unik karena merupakan matriks diagonal. Dengan demikian perkalian matriksnya dapat didefinisikan sebagai:

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax & 0\\ 0 & dw\end{pmatrix}$$

Perkalian matriks seperti di atas jelas terdefinisi dengan baik. Itu karena setiap dua matriks diagonal berukuran 2×2 dapat dikalikan.

Sesuai sifat matriks diagonal, setiap perkalian dua matriks diagonal berukuran 2×2 juga akan menghasilkan matriks diagonal berukuran 2×2. Tapi, ini **belum bisa** membuktikan bahwa himpunan V tertutup terhadap perkalian matriks diagonal berukuran 2×2 lho! ☺

Sesuai sifat matriks diagonal, setiap perkalian dua matriks diagonal berukuran 2×2 juga akan menghasilkan matriks diagonal berukuran 2×2. Tapi, apakah matriks hasil perkalian tersebut juga merupakan anggota himpunan V?

Karena V merupakan himpunan berhingga maka kita dapat menyelidiki hasil perkalian elemen-elemennya sebagai berikut:

$A_1 \cdot A_1 = A_1$	$A_2 \cdot A_1 = A_2$	$A_3 \cdot A_1 = A_3$	$A_4 \cdot A_1 = A_4$
$A_1 \cdot A_2 = A_2$	$A_2 \cdot A_2 = A_1$	$A_3 \cdot A_2 = A_4$	$A_4 \cdot A_2 = A_3$
$A_1 \cdot A_3 = A_3$	$A_2 \cdot A_3 = A_4$	$A_3 \cdot A_3 = A_1$	$A_4 \cdot A_3 = A_2$
$A_1 \cdot A_4 = A_4$	$A_2 \cdot A_4 = A_3$	$A_3 \cdot A_4 = A_2$	$A_4 \cdot A_4 = A_1$

CATATAN:

Dalam lembar pengerjaan soal ujian boleh jadi ada baiknya menjabarkan semua hasil perkalian elemen-elemen matriks di atas seperti ini:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A_3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A_4} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_2}$$

Anyway, berdasarkan tabel hasil penjabaran perkalian matriks di atas bisa kita simpulkan bahwa operasi perkalian matriks diagonal berukuran 2×2 itu tertutup di V.

$\therefore$ Jadi, perkalian matriks diagonal berukuran 2×2 di atas merupakan operasi biner pada V yang terdefinisi dengan baik dan tertutup.

Selanjutnya kita akan menyelidiki syarat-syarat suatu grup, yaitu:

1. Operasi binernya bersifat asosiatif
2. Terdapat elemen identitas
3. Setiap elemen pada V memiliki elemen invers

$\therefore$ Sesuai sifat umum matriks, operasi perkalian matriks itu kan bersifat asosiatif. Jadi, dengan demikian operasi biner perkalian matriks berukuran 2×2 di atas juga bersifat asosiatif.

Untuk elemen identitas serta elemen invers, kita dapat mengacu pada tabel hasil perkalian elemen-elemen pada V yang sudah kita buat di atas itu. Dari tabel kita mendapatkan hasil:

$A_1 \cdot A_1 = A_1$

$A_1 \cdot A_2 = A_2 \cdot A_1 = A_2$

$A_1 \cdot A_3 = A_3 \cdot A_1 = A_3$

$A_1 \cdot A_4 = A_4 \cdot A_1 = A_4$

$\therefore$ Jadi, elemen $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ merupakan elemen identitas.

Dari tabel kita juga memperoleh hasil sebagai berikut:

Elemen invers $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ adalah dirinya sendiri.

Elemen invers $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ adalah dirinya sendiri.

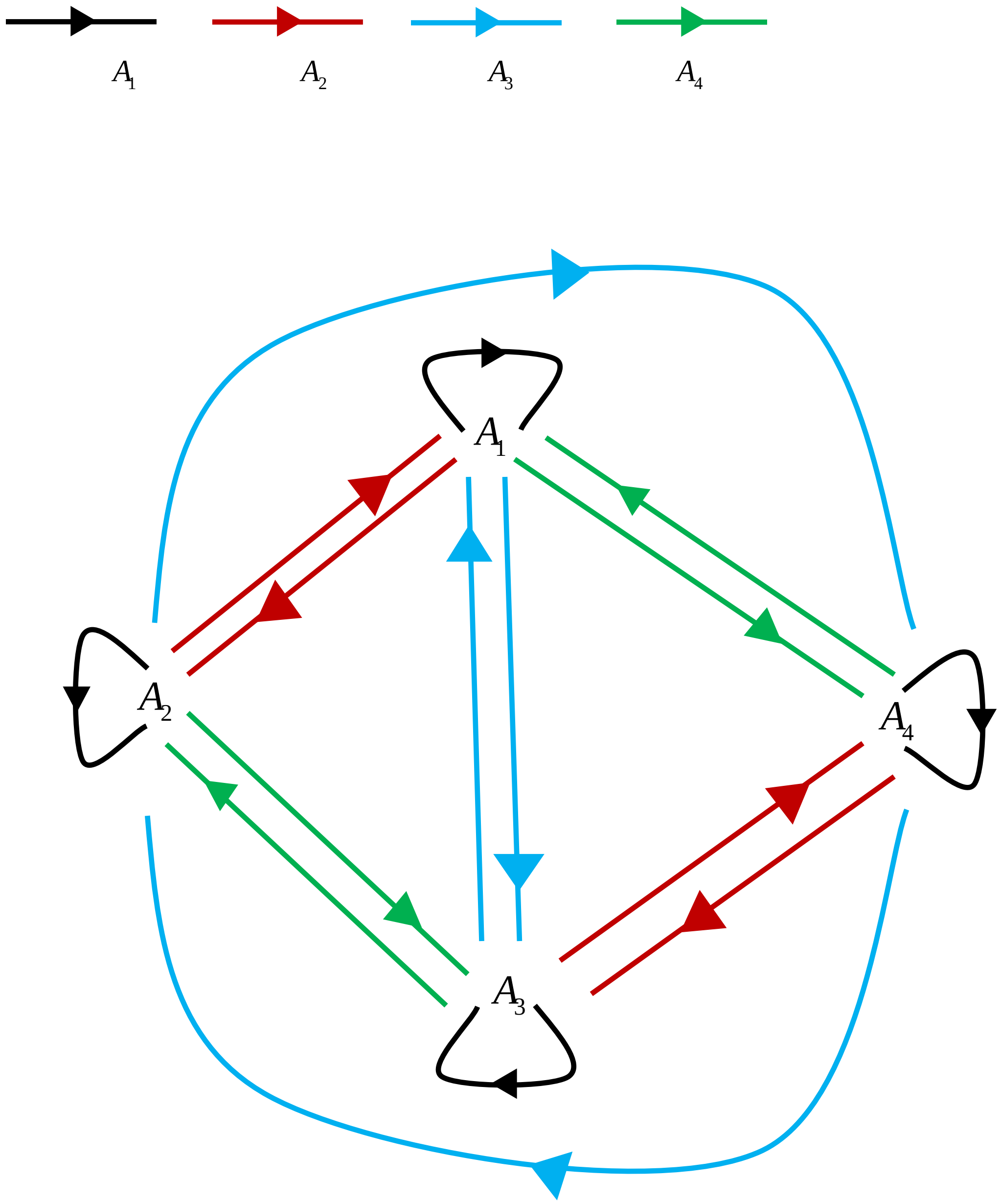
Elemen invers $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ adalah dirinya sendiri.

Elemen invers $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ adalah dirinya sendiri.

$\therefore$ Jadi, setiap elemen pada V memiliki elemen invers.

☝ Terbukti bahwa V merupakan grup terhadap perkalian matriks.

Diagram Cayley-nya adalah sebagai berikut:



Jika di pembahasan soal ini ada kesalahan tolong dikoreksi sendiri ya, hehehe.