Halo!

Kali ini aku mau membahas soal ujian tengah semester (UTS) mata kuliah **Pengantar Struktur Aljabar I** di Prodi Matematika FMIPA UGM pada tahun akademik 2014/2015. Dosen pengampunya adalah Bu Sri Wahyuni.

CATATAN:
Aku menerangkan ini pakai bahasa yang nonformal ya? Biar enak aja. Tapi kalau ujian jangan sekali-kali pakai bahasa nonformal. Nanti dimarahin bapak dan ibu dosen, hehehe. :D

SOAL

Pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$, selidiki apakah $\mathbb{R}$ merupakan grup terhadap operasi $*$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\, x * y = x + y + 3$$

Berikan penjelasan dengan lengkap!

PEMBAHASAN

Langkah pertama dalam pembahasan ini adalah menyelidiki apakah operasi biner $*$ pada soal di atas itu terdefinisi dengan baik serta tertutup:

1. **Operasi biner $*$ terdefinisi dengan baik**
   Ini artinya setiap elemen pada himpunan X dapat dioperasikan dengan operasi biner tersebut. Misal X adalah himpunan kucing. Jika operasi biner $*$ pada X didefinisikan sebagai "kawin" maka operasi biner tersebut nggak terdefinisi dengan baik karena kucing yang sesama jenis itu nggak bisa kawin, hahaha. ☺

2. **Hasil operasi biner $*$ merupakan anggota himpunan X**
   Lha ini jelas! Semisal hasil operasi biner $*$ "kawin" pada himpunan kucing X itu menghasilkan anjing, semut, atau burung ya jelas ngawur! ☺
   Sifat operasi biner ini disebut juga sebagai sifat tertutup atau *closed*.

Nah, terus gimana dengan operasi biner $*$ pada soal di atas itu yang didefinisikan sebagai $(\forall x, y \in \mathbb{R})\, x * y = x + y + 3$?

Pertama-tama, kita harus paham dulu dengan sifat bilangan real yaitu jika kita ambil sembarang dua elemen pada himpunan bilangan real (misalkan kita sebut elemen ini sebagai *a* dan *b*) maka hasil jumlahan *a* dan *b* tetap merupakan elemen bilangan real. Ya toh?

Kalau dalam notasi matematika, sifat jumlahan bilangan real itu berlaku seperti ini:

$(\forall a, b \in \mathbb{R})\, a + b \in \mathbb{R}$

Karena 3 termasuk elemen himpunan bilangan real maka:

$(\forall a \in \mathbb{R})\, a + 3 \in \mathbb{R}$

Jadi jelas dong bahwa:

$(\forall x, y \in \mathbb{R})\, x + y + 3 \in \mathbb{R}$

$\therefore$ Jadi, terbukti dong bahwa operasi biner $*$ **terdefinisi dengan baik dan tertutup!**

EITS! Tapi ini bukan berarti pembahasan soalnya selesai lho!

Kita baru membuktikan bahwa operasi biner $*$ yang didefinisikan itu memang valid. :D

Kita belum membuktikan apakah himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan operasi biner tersebut merupakan grup.

Enaknya pembuktiannya pindah ke halaman selanjutnya saja ya!

Langkah kedua dalam pembahasan ini adalah menyelidiki apakah himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan operasi biner $*$ merupakan grup. Seperti yang kita tahu, ada 3 syarat yang harus dipenuhi agar himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ menjadi grup terhadap operasi biner $*$, yaitu:

1. Operasi biner $*$ di $\mathbb{R}$ bersifat asosiatif, yaitu:
   $(\forall a,b,c \in \mathbb{R}) \quad (a*b)*c = a*(b*c)$
2. Terdapat elemen identitas $e \in \mathbb{R}$, sehingga:
   $(\forall a \in \mathbb{R}) \quad a*e = e*a = a$
3. Untuk setiap elemen $a \in \mathbb{R}$ terdapat elemen invers $a^{-1} \in \mathbb{R}$, sehingga:
   $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$

◈ Apakah operasi biner $*$ di $\mathbb{R}$ bersifat asosiatif?

Misalkan diambil sembarang $x, y, z \in \mathbb{R}$. Perhatikan operasi berikut:

$(x*y)*z$

Sesuai dengan definisi operasi biner, diperoleh:

$(x*y)*z = (x+y+3)*z$

Sekali lagi, dengan definisi operasi biner, diperoleh:

$(x+y+3)*z = x+y+3+z+3$

Kita tahu bahwa himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ memiliki sifat asosiatif terhadap operasi penjumlahan, yaitu:

$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad (x+y)+z = x+(y+z)$

Tidak hanya itu. Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ juga memiliki sifat komutatif terhadap operasi penjumlahan, yaitu:

$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x+y = y+x$

Dari dua sifat himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ di atas, bisa kita peroleh:

$$\begin{aligned} x+y+3+z+3 &= x+3+y+z+3 \\ &= x+\left(y+z+3\right)+3 \\ &= x+\left(y*z\right)+3 \\ &= x*\left(y*z\right) \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa

$\left(\forall a,b,c \in \mathbb{R}\right) \quad \left(a*b\right)*c = a*\left(b*c\right)$

$\therefore$ Dengan demikian operasi biner $*$ di $\mathbb{R}$ bersifat asosiatif.

◈ Apakah himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ memiliki elemen identitas terhadap operasi biner $*$?

Kita akan menyelidiki apakah ada elemen $e \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ berlaku:

$a*e = e*a = a$

Berdasarkan definisi operasi biner $*$ kita peroleh:

$a*e = a+e+3$

Apabila $a*e = a$ maka:

$a+e+3 = a$

Menggunakan sifat komutatif dan kanselasi operasi penjumlahan pada bilangan real, bisa diperoleh:

$$
\begin{aligned}
-a+(a+e+3) &= -a+(a) \\
(-a+a)+e+3 &= (-a+a) \\
0+e+3 &= 0 \\
e+3 &= 0 \\
e &= -3
\end{aligned}
$$

Untuk $e*a$ bisa kita jabarkan sebagai:

$e*a=e+a+3$

Apabila $e*a=a$ maka:

$e+a+3=a$

Menggunakan sifat komutatif dan kanselasi operasi penjumlahan pada bilangan real, bisa diperoleh:

$$
\begin{aligned}
(e+a+3)-a &= (a)-a \\
e+(a-a)+3 &= (a-a) \\
e+0+3 &= 0 \\
e+3 &= 0 \\
e &= -3
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Jelas bahwa $-3\in\mathbb{R}$. Dengan demikian $\mathbb{R}$ memiliki elemen identitas terhadap operasi biner $*$ yaitu -3.

◈ Apakah setiap elemen pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ memiliki elemen invers terhadap operasi biner $*$?

Kita akan menyelidiki apakah untuk setiap elemen $a \in \mathbb{R}$ terdapat elemen $a^{-1} \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga berlaku:

$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

dengan $e \in \mathbb{R}$ sebagai elemen identitas.

Ambil sebarang $a \in \mathbb{R}$. Misalkan terdapat $b \in \mathbb{R}$ sehingga memenuhi $a * b = e$.

Perhatikan bahwa:

$a * b = e \Leftrightarrow a + b + 3 = -3$

Menggunakan sifat kanselasi pada operasi penjumlahan bilangan real, kita peroleh:

$$
\begin{aligned}
a + b + 3 &= -3 \\
(a + b + 3) - 3 &= (-3) - 3 \\
a + b + (3 - 3) &= (-3 - 3) \\
a + b &= -6 \\
-a + (a + b) &= -a + (-6) \\
(-a + a) + b &= (-a - 6) \\
b &= -a - 6
\end{aligned}
$$

Dengan cara yang serupa untuk $b * a = e$ kita juga akan memperoleh hasil:

$b = -a - 6$

Jelas bahwa $-a - 6 \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ Dengan demikian setiap elemen $a \in \mathbb{R}$ memiliki elemen identitas terhadap operasi biner $*$ yaitu $-a - 6$.

☝ Kesimpulan dari pembuktian ini adalah, $\mathbb{R}$ merupakan grup terhadap operasi biner $*$.