

Halo!

Kali ini aku mau membahas soal [ujian tengah semester \(UTS\)](#) mata kuliah [Pengantar Struktur Aljabar I](#) di Prodi Matematika FMIPA UGM pada tahun akademik 2014/2015. Dosen pengampunya adalah Bu [Sri Wahyuni](#).

CATATAN:

Aku menerangkan ini pakai bahasa yang nonformal ya? Biar enak aja. Tapi kalau ujian jangan sekali-kali pakai bahasa nonformal. Nanti dimarahin bapak dan ibu dosen, hehehe. :D

SOAL

Diketahui himpunan matriks sebagai berikut:

$$V = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

merupakan grup terhadap perkalian matriks.

Apakah perbedaan grup V di atas dengan bilangan bulat modulo 4 (\mathbb{Z}_4) terhadap penjumlahan bilangan bulat modulo 4?

PEMBAHASAN

Sebagaimana yang kita ketahui, bilangan bulat modulo 4 (\mathbb{Z}_4) memiliki elemen sebagai berikut:

$$\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

Kita juga mengetahui bahwa \mathbb{Z}_4 merupakan grup terhadap penjumlahan bilangan bulat modulo 4. Pembuktiannya pasti sudah dijelaskan oleh bapak dan ibu dosen pada awal perkuliahan kan? 😊

Karena \mathbb{Z}_4 merupakan himpunan berhingga maka kita dapat menyelidiki hasil penjumlahan bilangan bulat modulo 4 terhadap elemen-elemennya sebagai berikut:

$0+0=0$	$1+0=1$	$2+0=2$	$3+0=3$
$0+1=1$	$1+1=2$	$2+1=3$	$3+1=0$
$0+2=2$	$1+2=3$	$2+2=0$	$3+2=1$
$0+3=3$	$1+3=0$	$2+3=1$	$3+3=2$

Bisa kita lihat bahwa \mathbb{Z}_4 dengan V memiliki tabel hasil operasi biner yang serupa. Berikut ini adalah tabel hasil perkalian elemen-elemen pada V .

$A_1 \cdot A_1 = A_1$	$A_2 \cdot A_1 = A_2$	$A_3 \cdot A_1 = A_3$	$A_4 \cdot A_1 = A_4$
$A_1 \cdot A_2 = A_2$	$A_2 \cdot A_2 = A_1$	$A_3 \cdot A_2 = A_4$	$A_4 \cdot A_2 = A_3$
$A_1 \cdot A_3 = A_3$	$A_2 \cdot A_3 = A_4$	$A_3 \cdot A_3 = A_1$	$A_4 \cdot A_3 = A_2$
$A_1 \cdot A_4 = A_4$	$A_2 \cdot A_4 = A_3$	$A_3 \cdot A_4 = A_2$	$A_4 \cdot A_4 = A_1$

Bila kita cermati lagi, elemen-elemen pada \mathbb{Z}_4 dan V dapat berelasi sebagai berikut:

$$0 \sim A_1$$

$$1 \sim A_2$$

$$2 \sim A_3$$

$$3 \sim A_4$$

Meskipun demikian, \mathbb{Z}_4 dan V merupakan dua grup yang berbeda. Sebab, elemen-elemen pada himpunannya berbeda dan demikian pula dengan operasi binernya.

Eh, jika di pembahasan soal ini ada yang salah tolong dikoreksi sendiri ya! Hehehe. ☺